

自由进动陀螺章动阻尼分析

傅 仙 罗

(中国科学院力学研究所)

一、引言

旋转刚体(如陀螺转子、自旋卫星等)受到力矩的干扰或由于角动量矢量在惯性空间中方向的改变就产生章动运动。章动要影响陀螺或卫星的姿态和瞄准精度,必须阻尼掉。环形充液章动阻尼器是阻尼章动的器件之一。

旋转刚体与阻尼器质量的耦合运动方程是难以求解析解的。通常采用略去阻尼器质量对刚体运动的影响,则两者的运动可分别考虑,并通过计算阻尼器的能量耗散求出章动角变化。这种方法称为能汇法。迄今对章动的分析都基于这种方法。

Carrier 和 Miles^[1,2] 首先对部分充液环形阻尼器作了分析。他们假设阻尼器只起能量耗散源的作用,并对小章动角和大章动角情况作了处理。Cartwright 等人^[3]将流体看作等质量质点,且承受粘性阻力。他们首次揭示了章动同步和自旋同步两种模式。但该文没有涉及小章动角情况。Alfriend^[4] 采用文献[3]的方法,将液体看成弧形刚性柱代替等效质点,求得近似解析解。Köppen^[5] 给出大章动角情况的理论分析和实验研究,两者结果比较一致。笔者^[6] 曾采用文献[4]的方法对章动阻尼运动作了详细计算,并应用于某一实例,发现此种方法不适用于小章动角情况。综上所述,对于大章动角情况,理论分析是成功的。对于小章动角情况,文献[1]指出的流体运动扩展到环管内的整个外壁上的模型为我们的实验所证实(图1),但[1]的结果未为实验证实^[9]。针对尚未解决的小章动角情况,本文采用新的方法,不从能量角度考虑问题,也不忽略液体质量对陀螺性能的影响,采用与文献[1]同样的流体运动模型,求出液体在小章动角情况下对陀螺转子的阻尼力矩和转子动量矩的变化,采用二阶线性微分方程组近似描述非线性的陀螺转子和阻尼器系统。

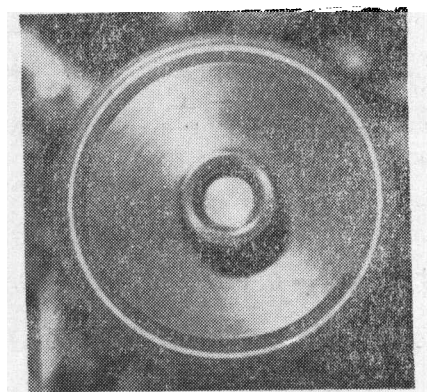


图1 小章动角时液体的分布状态 ($\bar{\eta}/\bar{\eta}^* = 1$)

二、陀螺运动方程

我们考虑的系统,其主要部件是一个二自由度进动陀螺,转子上装有部分充液环形章动阻尼器,环管中心线通过的平面与形体轴垂直。

为便于分析,采用惯性坐标系 $x_0y_0z_0$ 、内外框架坐标系 $x_2y_2z_2$ 、 $x_1y_1z_1$ 、转子坐标系 $x_3y_3z_3$ 、阻尼环坐标系 $x_4y_4z_4$ 和框架坐标系 $\alpha\beta\gamma$ 。

本文于1983年5月23日收到。

假定内外框架的质量和转动惯量可以忽略不计; α 、 β 、 γ 是小量; 陀螺转子相对内框架的角速度 $\dot{\gamma}$ 近似是一常数 Ω ; 忽略框架轴承的摩擦力矩、空气阻尼力矩和稳速力矩的赤道分量。按常规陀螺力学方法^[7], 得陀螺运动方程为

$$\left. \begin{aligned} I_b \ddot{\alpha} + K \dot{\alpha} + (H_G - D) \dot{\beta} &= E_x \\ I_b \ddot{\beta} + K \dot{\beta} - (H_G - D) \dot{\alpha} &= E_y \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 E_x 、 E_y 为激励力矩分量, K 是阻尼环内液体的动量矩在赤道平面内的分量, D 是由 K 引起的 H_G ($H_G = I_{bz}\Omega$) 的改变量, I_b 、 I_{bz} 为陀螺转子的转动惯量。当 $Re < 10^7$ 时, 采用弯圆管湍流稳定流模型, 按文献[6]的方法求阻尼常数, 并根据实验情况稍作修正, 得无量纲阻尼系数的半经验公式为

$$\bar{K}' = K'/H_G^* = G[F(\bar{\gamma})]^{1/4} + C_2$$

$$G = C_1 \sigma d^* \left(\frac{1}{2} + a^{*2} \right)^{3/2} Re^{*-1/4} \left[1 + 0.075 Re^{*1/4} \left(\frac{1}{2} d^* \right)^{1/2} \right]$$

$$H_G^* = \rho R^5 \Omega, \quad d^* = d/R, \quad a^* = a/R, \quad Re^* = \rho R \lambda \Omega d / \mu$$

ρ 为液体密度, μ 为粘度, R 为环半径, d 为环管直径, a 为环心与万向支点的距离, $\lambda = \sigma - 1$, $K = \cos 45^\circ K'$, $\sigma = I_b^{-1} I_{bz}$, C_1 和 C_2 为常数。 $F(\bar{\gamma})$ 为填充角 $\bar{\gamma}$ 的函数, 它由下式确定:

$$F^3 + (\bar{\gamma}^2 - 2\pi\bar{\gamma} + 1)F^2 + (\bar{\gamma}^2 - 3\pi\bar{\gamma} - 1)F + \bar{\gamma}(2\pi - \bar{\gamma})(\pi\bar{\gamma} + 1) = 0$$

由 H_G 与 K' 的矢量差, 经小量展开, 取前两项, 得系数 D 的表达式为

$$D = \frac{1}{4} K^2 H_G^{-1}$$

三、激励状态下的稳态解

在激励条件下, 按电磁理论得激励力矩为

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -T[\cos(Q_+t + \varepsilon) - \cos(Q_-t - \varepsilon)] \\ E_y &= -T[\sin(Q_+t + \varepsilon) - \sin(Q_-t - \varepsilon)] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中, $Q_+ = \Omega + \Omega_e$, $Q_- = \Omega - \Omega_e$, Ω_e 为激励电流角频率, $T = \frac{1}{8\pi} V B_m N I$, V 为磁钢体积, B_m 为磁钢的磁感应强度, I 、 ε 为激励电流的振幅和相角。

将(2)代入(1), 采用算子法求解, 舍去含有指数形式的非稳态解, 经整理, 得稳态解为

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1(t) &= \alpha(t) - \alpha_{0r} = M_1 \sin(Q_-t - \varepsilon - \beta_1^*) - M_2 \sin(Q_+t + \varepsilon - \beta_2^*) \\ \beta_1(t) &= \beta(t) - \beta_{0r} = -M_1 \cos(Q_-t - \varepsilon - \beta_1^*) + M_2 \cos(Q_+t + \varepsilon - \beta_2^*) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{0r} &= \bar{T}[-\Omega^{-1} \cos(\varepsilon + \operatorname{tg}^{-1} K_H) + \Omega_+^{-1} \cos(\varepsilon - \operatorname{tg}^{-1} K_H)] \\ \beta_{0r} &= \bar{T}[\Omega^{-1} \sin(\varepsilon + \operatorname{tg}^{-1} K_H) + \Omega_+^{-1} \sin(\varepsilon - \operatorname{tg}^{-1} K_H)] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \bar{T}(A_1^2 + B_1^2)^{1/2}, \quad M_2 = \bar{T}(A_2^2 + B_2^2)^{1/2} \\ \beta_1^* &= \operatorname{tg}^{-1} K_H + \operatorname{tg}^{-1} B_1 A_1^{-1}, \quad \beta_2^* = \operatorname{tg}^{-1} K_H + \operatorname{tg}^{-1} B_2 A_2^{-1} \\ A_1 &= \bar{K}(\bar{K}^2 + \Omega_{H-}^2)^{-1}, \quad B_1 = \Omega_{H-}(\bar{K}^2 + \Omega_{H-}^2)^{-1} - \Omega_-^{-1} \\ A_2 &= \bar{K}(\bar{K}^2 + \Omega_{H+}^2)^{-1}, \quad B_2 = \Omega_{H+}(\bar{K}^2 + \Omega_{H+}^2)^{-1} - \Omega_+^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} Q_{H-} &= Q_- - \omega_n, \quad Q_{H+} = Q_+ - \omega_n, \quad \omega_n = (H_G - D)I_b^{-1} \\ \bar{K} &= KI_b^{-1}, \quad K_H = \bar{K}\omega_n^{-1}, \quad \bar{T} = TI_b^{-1}(\omega_n^2 + \bar{K}^2)^{1/2} \end{aligned}$$

在激励后, 转子轴相对激励前的偏角为

$$\varphi_{d1} = \bar{T}[Q_+^{-2} + Q_-^{-2} - 2(Q_+Q_-)^{-1}\cos 2\varepsilon]^{1/2} \quad (6)$$

四、章动阻尼运动

在激励情况下, 陀螺转子在相平面上的轨迹近似是一圆周。若切断激励电流, 则激励力矩等于零。此时, 阻尼器开始起阻尼作用, 陀螺转子的章动迅速衰减, 相应的运动方程为

$$\begin{cases} I_b\ddot{\alpha} + K\dot{\alpha} + (H_G - D)\beta = 0 \\ I_b\ddot{\beta} + K\dot{\beta} - (H_G - D)\alpha = 0 \end{cases} \quad (7)$$

设切断电流的时刻 $t = 0$, 由(3)得初值为

$$\begin{cases} \alpha_1(0) = -M_1 \sin(\varepsilon + \beta_1^*) - M_2 \sin(\varepsilon - \beta_2^*) \\ \beta_1(0) = -M_1 \cos(\varepsilon + \beta_1^*) + M_2 \cos(\varepsilon - \beta_2^*) \\ \dot{\alpha}_1(0) = M_1 Q_-^{-1} \cos(\varepsilon + \beta_1^*) - M_2 Q_+^{-1} \cos(\varepsilon - \beta_2^*) \\ \dot{\beta}_1(0) = -M_1 Q_-^{-1} \sin(\varepsilon + \beta_1^*) - M_2 Q_+^{-1} \sin(\varepsilon - \beta_2^*) \end{cases} \quad (8)$$

仍采用算子法, 在初值(8)下, (7)的解为

$$\begin{cases} \alpha_2(t) = A^* e^{-\bar{K}t} \cos(\omega_n t + \varepsilon^*) \\ \beta_2(t) = A^* e^{-\bar{K}t} \sin(\omega_n t + \varepsilon^*) \end{cases} \quad (9)$$

其中

$$\begin{cases} \alpha_2(t) = \alpha_1(t) - \alpha_{20}, \quad \beta_2(t) = \beta_1(t) - \beta_{20} \\ \alpha_{20} = \alpha_{10} + (\bar{K}\dot{\alpha}_{10} - \omega_n\dot{\beta}_{10})(\bar{K}^2 + \omega_n^2)^{-1} \\ \beta_{20} = \beta_{10} + (\bar{K}\dot{\beta}_{10} + \omega_n\dot{\alpha}_{10})(\bar{K}^2 + \omega_n^2)^{-1} \\ A^* = (\dot{\alpha}_{10}^2 + \dot{\beta}_{10}^2)^{1/2}(\bar{K}^2 + \omega_n^2)^{-1/2} \\ \varepsilon^* = -\text{tg}^{-1}\dot{\alpha}_{10}\dot{\beta}_{10}^{-1} - \text{tg}^{-1}K_H \end{cases} \quad (10)$$

解(9)在轨迹平面上为一收敛的螺旋线, 陀螺转子的收敛终止位置与中心位置的偏差角为

$$\alpha_1(\infty) = \alpha_{20}, \quad \beta_1(\infty) = \beta_{20} \quad (11)$$

五、 φ 角的传感形式

在实验中, 用测角线圈(即 φ 角线圈)检测陀螺转子的运动状态。在激励状态下, 按法拉第定律, φ 角的测量曲线为

$$V_{z0} = [\bar{A}_1^2 + \bar{A}_2^2 - 2\bar{A}_1\bar{A}_2\cos(\beta_1^* + \beta_2^*)]^{1/2} \sin(Q_e t + \varepsilon + \text{tg}^{-1}A_\beta) \quad (12)$$

其振幅为 $K_2 Q [M_1^2 + M_2^2 - 2M_1 M_2 \cos(\beta_1^* + \beta_2^*)]^{1/2}$ 。另一方面, 由稳态解(3)得章动角最大值为 $M_1 + M_2$ 。由于 $\beta_1^* + \beta_2^*$ 接近 π , 所以在已知 K_2 的前提下, 测得的 φ 角幅值能近似反映真正的章动角最大值。运用式(12), 改变 Q_e , 可以计算系统的频率特性。

在章动阻尼运动情况下, φ 角传感形式为

$$\bar{V} = [\bar{K}^2 + (\omega_n - Q)^2]^{1/2} A^* e^{-\bar{K}t} \cos[(\omega_n - Q)t + \varepsilon^* + \text{tg}^{-1}\bar{K}(\omega_n - Q)^{-1}] \quad (13)$$

由解(9)求得的陀螺转子章动角变化规律为

$$\varphi_n = A^* e^{-\bar{K}t} \quad (14)$$

两者只相差一因子 $[\bar{K}^2 + (\omega_n - \Omega)^2]^{1/2}$. 因此, 可以用实验值换算出章动角. 根据式 (13) 或 (14), 可以计算系统的阻尼时间特性.

六、讨论与结论

本文讨论的系统由二自由度进动陀螺和部分充液环形章动阻尼器组成. 系统的分析通常采用能汇法. 但对小章动角情况, 只有文献[1]有理论分析, 且文献[5]指出文献[1]的结果未被实验证实. 然而, 小章动角章动运动的阻尼在工程实践中有着重要的应用. 可见, 解决小章动角章动阻尼问题无论在理论上还是在实践中都有重要的意义. 本文采用液体运动扩展到环形管内整个外壁上的模型, 考虑到液体质量对陀螺性能的影响, 在经典的陀螺运动方程组中增加了阻尼力矩项和陀螺力矩改变量. 用算子法求解了激励和阻尼情况下的方程组, 给出了陀螺转子的运动特性的解析表达式和能计算不同填充角情况下系统的阻尼时间特性和频率特性的关系式.

陀螺转子的阻尼时间特性主要取决于阻尼力矩系数 K . 环内充液的多少虽然改变了转子的横向转动惯量, 但对阻尼时间影响甚微, 对阻尼力矩系数的影响很大. 阻尼时间特性如图 2.

系统的频率特性与 K 、 D 、 Ω 、 I_b 、 I_{bz} 等因素有关, 主要取决于系数 D . 因此, 如果按能汇法那样忽略液体质量对陀螺性能的影响, 那就不能求得系统的频率随填充角的变化特性. 系统的频率特性如图 3 所示.

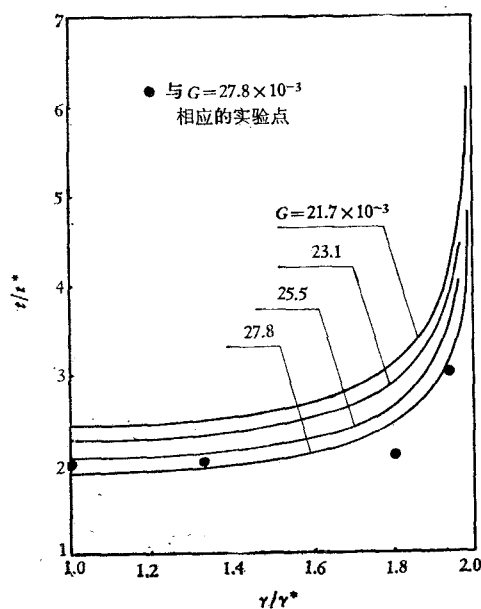


图 2 阻尼时间特性

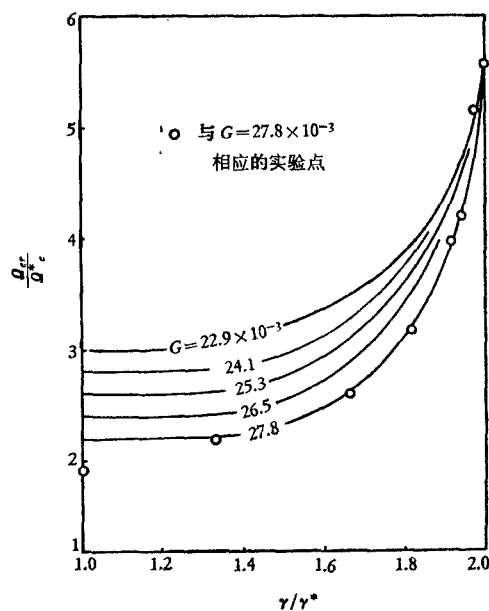


图 3 频率特性(一)

在系统的几何尺寸已经确定的情况下, 可以方便地计算出任意填充角的系统的阻尼时间特性和频率特性. 根据系统对这两种特性的具体要求和实际应用条件, 选择出最佳

填充角。例如,系统要求阻尼时间小于某一值,这样,可以根据阻尼时间特性,定出满足上述要求的填充角范围。另一方面,要调查清楚系统在运行过程中可能会受到什么样的频率范围的外界干扰,而这些外界干扰容易引起系统作章动角超过允许值的章动运动。这样,可以根据已经计算出来的频率特性,定出适宜的某一或某些填充角的范围。满足阻尼时间和频率要求的上述两类填充角范围的重叠部分,即为最佳填充角。

参 考 文 献

- [1] Carrier, G. F., Miles, J. W., *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 27, 6(1960), 237—240.
- [2] Miles, J. W., *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 30, 6(1963), 189—192.
- [3] Cartwright, W. F., Massingill, E. C. and Trueblood, R. D. *AIAA Journal*, Vol. 1, 6(1963), 1375—1380.
- [4] Alfriend, K. T., *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 11, 7(1974), 456—462.
- [5] Köppen, W., *ESRO TT-152*.
- [6] 傅仙罗, 导弹技术, 4(1982).
- [7] 陆元九, 陀螺及惯性导航原理, 上册, 科学出版社, 北京 (1964).

ANALYSIS ON NUTATION DAMPING OF FREELY PRECESSIONAL GYROSCOPE

Fu Xianluo

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

A nonlinear system which consists of a gyroscope to have two precessional degree of freedom and a ring nutation damper partially filled with a viscous fluid is approximately described by second order linear differential equations with constant coefficients in this paper. A mathematical model of a nutational motion of the system with small nutation angle is established. The equations of the gyroscopic motion at both excited and nutational damping are solved, and analytical expressions characterizing the motion of gyroscope rotor are obtained. Expressions for determining the damping time and frequency characteristic are given. It is shown that the damping time characteristic of the system depends mainly on the damping moment of force acting on the gyroscope rotor by the liquid and that the frequency characteristic of the system depends mainly on the change of the moment of momentum of the gyroscopic rotor which the moving liquid causes to change. The formulae given here are applied to a particular rotor-damper system, the results obtained are agreeable to the experimental data.