第17卷 第1期　　力 学 学 报　　Vol. 17, No. 1
1985 年 1 月　　ACTA MECHANICA SINICA　　Jan., 1985

磁场中正柱非线性理论的自洽解

徐 复　唐福林　陈乐山
(中国科学院力学研究所)

提要　本文讨论磁场中中等低气压弧光放电与辉光放电的正柱理论.文献[1]是给定放电中间参数后,假定中性气体运动,研究放电现象. 本文仍假定中性气体运动,但给出初始放电参数,补充两个积分关系,建立了初始放电参数与中间参数的关系. 给出这个问题完整的数学提法. 用数值方法求解. 文献[1]相当于第一次迭代. 结果表明,这种改进是必要的.

一、引　言

本文讨论中等低气压直流放电的正柱理论. 假定存在一个磁场,它的方向和放电方向相同,即为轴向的. 中等低气压的含意是: 电子与中性粒子碰撞平均自由程既不十分大于也不十分小于放电管直径. 这种理论适用于相应参数下辉光放电的正柱区. 和中等低气压下弧光放电的正柱区. 由于辉光放电和低气压弧光放电的应用日益广泛,这种理论的重要性也日益明显.

辉光放电正柱理论的工作,可见文献[2]—[7]. 1976 年, Franklin[8] 总结了到那时为止的正柱理论,并给出一些实验数据. 不论考虑磁场的存在与否,过去正柱理论都不考虑中性气体的运动. 在某些应用中[9,10], 中性气体的运动特别重要. 这样,文献[1]开始考虑中性气体的运动及其物理参数的变化,结果表明,略去中性气体的运动是不适当的.

本文推广了文献[1]的工作. 已知放电初始参数后,给出了磁场 ϕ 正柱非线性理论的完整数学提法. 用数值方法,通过迭代给出了收敛的自洽解. 由于自洽解比文献[1]的解有较大变化. 这说明本文的改进是必要的. 本文的提法可用于实际问题. 此外,文献[1]的主要物理结论在本文仍成立.

二、数学提法和求解

将用和文献[1]相同的物理模型,相同的符号和相同的简化,可以得到如下的基本方程,和边界条件:

$$\frac{du_{cr}}{dS}=\frac{1}{1-u_{cr}^2}\left[A\bar{N}_n-u_{cr}\frac{1+u_{p\theta}^2}{S}+\left(\frac{M}{R'\bar{N}_n}+\frac{R'+1}{R'}\bar{N}_n\right)u_{cr}^2\right.$$
$$\left.-\frac{M}{R'}u_{cr}u_{n\theta}-\left(\frac{1}{R'}+\frac{1}{A+1}\right)\bar{N}_nu_{cr}u_{nr}\right] \tag{1}$$

$$\frac{d}{dS}\ln\bar{N}_e=\frac{1}{1-u_{cr}^2}\left[-A\left\{A+\frac{1}{R'}\left(\frac{M^2}{\bar{N}_n^2}+1\right)+1\right\}\bar{N}_nu_{cr}\right.$$

本文于 1984 年 1 月 22 日收到.

$$+\frac{u_{cr}^2+u_{p\theta}^2}{S}+\frac{Mu_{p\theta}}{R'}+\left(\frac{1}{R'}+\frac{1}{1+A}\right)\bar{N}_n u_{nr}$$

$$-\frac{M}{R'}u_{n\theta}\Big] \tag{2}$$

$$\frac{d\bar{\Phi}}{dS}=\frac{1}{1-u_{cr}^2}\left\{\left[-A-1+\frac{\tau}{R'}\left(\frac{M^2}{\bar{N}_n^2}+1\right)\right]\bar{N}_n u_{cr}+\frac{u_{cr}^2+u_{p\theta}^2}{S}\right.$$

$$+\frac{Mu_{p\theta}}{R'}+\frac{\tau M}{R'}u_{n\theta}+\left(\frac{1}{1+A}-\frac{\tau}{R'}\right)\bar{N}_n u_{nr}-(1+\tau)u_{cr}^2$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{R'}\left(\frac{M^2}{\bar{N}_n}+\bar{N}_n\right)u_{cr}+\frac{M}{R'}u_{n\theta}-\frac{1}{R'}\bar{N}_n u_{nr}\right]\right\} \tag{3}$$

$$\frac{du_{p\theta}}{dS}=-\frac{u_{p\theta}}{S}-\frac{M}{R'}-\bar{N}_n\frac{u_{p\theta}}{u_{cr}}+\frac{\bar{N}_n}{1+A}\cdot\frac{u_{n\theta}}{u_{cr}} \tag{4}$$

$$\frac{d\ln\bar{N}_n}{dS}=\frac{1}{\frac{\tau}{1+\tau}-u_{nr}^2}\left[\frac{u_{n\theta}^2+u_{nr}^2}{S}+\left(A-\frac{1}{R'}-\frac{1}{1+A}\right)\bar{N}_c u_{nr}\right.$$

$$\left.+\left(1+\frac{1}{R'}\right)\bar{N}_c u_{cr}\right] \tag{5}$$

$$\frac{du_{nr}}{dS}=\frac{-1}{\frac{\tau}{1+\tau}-u_{nr}^2}\left[\frac{\tau}{1+\tau}A\bar{N}_c+\frac{\tau}{1+\tau}\cdot\frac{u_{nr}}{S}+u_{nr}\frac{u_{n\theta}^2}{S}\right.$$

$$\left.+\left(1+\frac{1}{R'}\right)\bar{N}_c u_{cr}u_{nr}-\left(\frac{1}{R'}+\frac{1}{1+A}\right)\bar{N}_c u_{nr}^2\right] \tag{6}$$

$$\frac{du_{n\theta}}{dS}=-\frac{u_{n\theta}}{S}-\frac{1}{1+A}\bar{N}_c\frac{u_{n\theta}}{u_{nr}}+\left(\frac{1}{R'}+\frac{m_c}{m_n}A\right)M\frac{\bar{N}_c u_{cr}}{\bar{N}_n u_{nr}}+\bar{N}_c\frac{u_{p\theta}}{u_{nr}} \tag{7}$$

及

$$u_{c\theta}=M\cdot\frac{u_{cr}}{\bar{N}_n}+u_{n\theta} \tag{8}$$

和轴向分量三个方程，

边界条件为:

$$\left.\begin{array}{l} S=0\text{ 时，}u_{cr}=\bar{\Phi}=u_{p\theta}=\ln\bar{N}_n=u_{nr}=u_{n\theta}=0,\ \ln\bar{N}_c=\ln\bar{N}_c(0)\\ S=S_b\text{ 时，}u_{cr}=1\text{ 或 }u_{nr}=\sqrt{\tau/(1+\tau)}\end{array}\right\} \tag{9}$$

附加边界条件为:

$S=0$ 时

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{du_{cr}}{dS}=\dfrac{A}{2},\ \dfrac{d\ln\bar{N}_c}{dS}=\dfrac{d\bar{\Phi}}{dS}=0,\\ \dfrac{du_{p\theta}}{dS}=\dfrac{-M}{2(1+A)(2+A)}\left[\dfrac{m_c}{m_n}+\dfrac{(1+A)^2}{R'}\right]\\ \dfrac{d\ln\bar{N}_n}{dS}=0,\ \dfrac{du_{nr}}{dS}=\dfrac{-A}{2}\bar{N}_c(0),\\ \dfrac{du_{n\theta}}{dS}=-\dfrac{M(1+A)}{2(2+A)}\left(\dfrac{m_c}{m_n}+\dfrac{1}{R'}\right)\end{array}\right\} \tag{10}$$

已知常数 τ, R', A 等，可以求出这组方程的解．但是应当指出，这些参数是所谓中间参数．真正的初始放电参数是：

$$\begin{aligned}&\text{气体种类，}T_p(T_n=T_p);\ T_e;\ B,\ E_z,\ j_{z\,av.}\\&\text{初始充气气压（或初始中性气体数密度 }N_{n\ \mathrm{init.}})\end{aligned}\tag{11}$$

这些参数给定以后，可以决定 $N_n(0)$, M 等．温度 T_p, T_e 认为是常数，是目前所有正柱理论的共同假定，补充能量方程以后，可以取消这个假定．暂时我们认为它们从实验确定．

我们补充两个积分关系：

$$N_n(0)=\frac{S_b^2\cdot N_{n\ \mathrm{init.}}}{\int_0^{S_b}\bar{N}_n(S)\cdot 2SdS}\tag{12}$$

$$\bar{N}_e(0)=j_{z\,av.}\times\frac{1.649+1.259\times\left(\frac{T_e}{10^4}-1.276\right)}{4.600\times10^{17}}\times\frac{\sqrt{T_e}}{E_z}\times\frac{S_b^2}{\int_0^{S_b}\frac{\bar{N}_e(S)}{\bar{N}_e(0)}\frac{1}{\bar{N}_n(s)}\cdot 2SdS}\tag{13}$$

为了计算上确定起见，方程(13)中已用了 Ar 气的数据[11]，式中 $N_{n\ \mathrm{init.}}$ 的单位是 $1/\mathrm{cm}^3$，T_e 的单位是 °K，$j_{z\,av.}$ 的单位是 Stat. Amp/cm²，E_z 的单位是 Stat. Volt/cm.

完整的数学提法是：在给定初始放电参数 (11) 以后，已知 A, τ, R'，求解满足常微分方程组(1)—(7)，边界条件(9)(10)及积分关系(12)(13)的七个无量纲未知函数 u_{er}, $\ln\bar{N}_e$, $\bar{\Phi}$, $u_{p\theta}$, $\ln\bar{N}_n$, u_{nr}, $u_{n\theta}$ 和未知参数 S_b, M, $\ln\bar{N}_e(0)$．这样求出的解，我们称为自洽解．在文献[1]中，我们预先给了 M, $\bar{N}_e(0)$.

我们采用数值方法，通过迭代求解．已知 A, τ, R' 后，假定速度分布是刚体分布，由下两式给出 M, $\ln\bar{N}_e(0)$ 的第一次近似值：

$$N_n(0)=N_{n\ \mathrm{init.}}\times\frac{m_n\times v_{n\theta\,\mathrm{wall.}}^2}{2KT_n}\times\frac{1}{\exp\left(\frac{m_n\times v_{n\theta\,\mathrm{wall}}^2}{2KT_n}\right)-1}\tag{14}$$

$$\bar{N}_e(0)=j_{z\,av.}\times\frac{\frac{m_nv_{n\theta\ \mathrm{wall}}^2}{2}}{1-\exp\left(-\frac{m_nv_{n\theta\,\mathrm{wall}}^2}{2KT_n}\right)}\times\frac{m_e}{e^2E_z}\times\sqrt{\frac{2KT_e}{m_e}}\times\frac{1.649+1.259\times\left(\frac{T_e}{10^4}-1.276\right)}{10^{15}}\tag{15}$$

方程 (15) 也用了 Ar 气的数据[11]．已知 M, $\ln\bar{N}_e(0)$ 的第一次近似值，便可以求解式(1)—(7)，(9) 和 (10)．这样得到的结果便是文献[1]的结果．本文中，我们把解再代入(12)(13)的右方，进行第二次迭代，得到 M, $\ln\bar{N}_e(0)$ 的第二次近似值，再求解(1)—(7)，(9)和(10)，直到最后收敛为止．

在迭代中，已知 M, $\ln\bar{N}_e(0)$ 求解方程组(1)—(7)及边界条件(9)(10)的问题，和以

前一样[1],仍采用变步长 Runge-Kutta 方法求数值解. 计算是在 FELIX 机上进行. 作为例子,我们对 Ar 气作了计算. 取

$$T_p = 1000°\mathrm{K},\quad T_e = 23200°\mathrm{K}$$

$$j_{z\,av.} = 6.3 \times 10^8\ \mathrm{Stat.\ Amp./cm^2}$$

$$p_{\mathrm{init.}} = 1\ \ \mathrm{torr},\quad E_z = 0.01\ \mathrm{Stat.\ Volt./cm}$$

$$B = \begin{cases} 500G & \text{情形 } \alpha \\ 1000G & \text{情形 } \beta \end{cases}$$

收敛的条件取为,相邻相次迭代中各函数值相差的最大值不超过 10^{-4}.

我们有: $A = 0.393$, $\tau = 0.0431$, $R' = 5.39$ 计算结果如下.

1. M 及 $\ln\bar{N}_e(0)$

如果用上标 1 表示第一次迭代值,用上标 s 表示迭代结束时自洽解的值. 则对情形 α, β, 我们有表 1.

表 1

参数	$M^{(1)}$	$M^{(s)}$	$\ln\bar{N}_e(0)^{(1)}$	$\ln\bar{N}_e(0)^{(s)}$
情形 α	2.65	1.82	−9.21	−9.16
情形 β	5.30	5.46	−9.21	−8.88

这个结果说明,对情形 α 第一次迭代值与自洽解相比,M 相差较大;对情形 β, 第一次迭代值与自洽解相比, $\ln\bar{N}_e(0)$ 相差较大. 因此, 如果只取第一次近似值[1], 与自洽解相比, 可能偏差较大.

2. 七个未知函数的计算结果

对于情形 α 和 β, 七个未知函数的第一次近似值与自洽解的比较,见图 1—图 3.

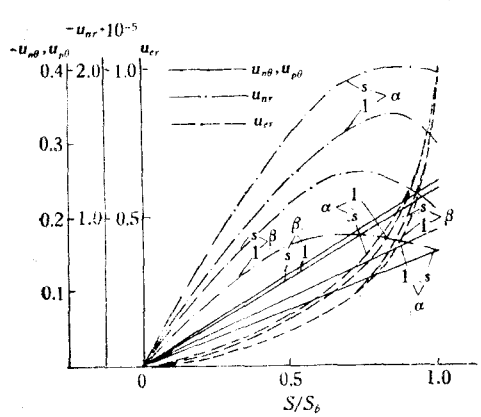

图 1

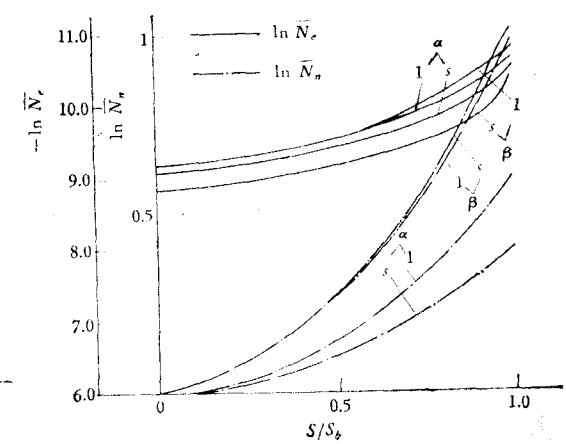

图 2

对于情形 α 来说,七个未知函数的任何一个,其第一次迭代值与自洽解的相差,都具有相同的符号. 在 $0 \leqslant S/S_b \leqslant 1$ 的整个区间内,第一次迭代值或者总是大于自洽解,或者总是小于自洽解. 就相对误差的大小而言, $\ln\bar{N}_e$ 的第一次迭代值与自洽解相差不多;

对 $\bar{\phi}$ 来说，二者相对误差就稍大一些；而对 u_{er}，$u_{p\theta}$，$u_{n\theta}$，$\ln\bar{N}_n$ 及 u_{nr} 而言，必须求出自洽解，才能得到比较精确的结果.

对于情形 β 来说，七个未知函数的任何一个，其第一次近似值与自洽解的相差，在 $0 \leqslant S/S_b \leqslant 1$ 的整个区间内，也都具有相同的符号. 就相对误差的大小而言，u_{er}，$\ln\bar{N}_e$，$\bar{\phi}$，$u_{p\theta}$，$u_{n\theta}$ 及 $\ln\bar{N}_n$ 第一次迭代值与自洽解相差不多；但对 u_{nr} 而言，相对误差比较大，必须求出自洽解，才能得到比较精确的结果.

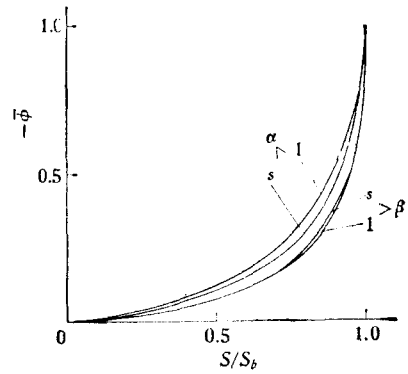

图　3

由于方程(1)—(7)具有两个奇点

$$u_{er} = 1,\ u_{nr} = \sqrt{\tau/(1+\tau)}$$

因此，仍然存在 Bohm 判据是否是有条件成立的问题. 此外，自洽解 ϕ 仍有 $u_{p\theta} \cong u_{n\theta}$，即离子气体转速与中性气体转速几乎相等. 只考虑带电粒子气体的运动而不考虑中性气体的运动是不恰当的.

三、结　论

对于中等低气压弧光放电与辉光放电的实际问题来说，文献[1]的数学提法具有一些不足之处，即进行计算所必须的一些参数，如 M，$\ln\bar{N}_e(0)$，我们不知道如何给出. 本文给定初始的放电参数(11)，补充两个积分关系(12)、(13)，与方程(1)—(7)，边界条件(9)、(10)组成完整的数学提法. 这样得到的解称为自洽解. 我们认为：

1. 由于计算结果表明，第一次迭代[1]与自洽解之间有较大偏差，因此，目前的工作是必要的.

2. 本文可用于实际问题.

参　考　文　献

[1] F. Xu, F. L. Tang, L. S. Chen, *Phys. Fluids* **25**(1982), 2278—2283.
[2] von Engel, A., Ionized Gases, Oxford University Press (1965).
[3] Persson, K. B., *Phys. Fluids*, **5**(1962), 1625—1632.
[4] Mosburg, Jr., E. R. Persson, K. B., *Phys. Fluids* **7**(1964), 1829—1833.
[5] Ewald, H. N. et al., *JAP*, **38**(1967), 2753—2761.
[6] Bohm, D., The Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic. Fields, A. Guthrie and R. K. Wakling Eds., McGraw Hill Book Comp. (1949), Chap. 3.
[7] Forrest, J. R. et al., *Brit. Jour. Appl. Phys.*, **7**(1966), 1061—1067.
[8] Franklin, R. N., Plasma Phenomena in Gas Discharges, Oxford University Press (1976).
[9] Wijnakker, M. M. B., Centrifugal Effects in a Weakly Ionized Rotating Gas, Thesis (1980).
[10] Villani, S., Uranium Enrichment, Springer Verlag (1979), 291—312.
[11] Hassan, H. A. et al., *Plasma Phys.*, **12**(1970), 727—736.

A SELF-CONSISTENT SOLUTION FOR NONLINEAR THEORY OF POSITIVE COLUMN IN A MAGNETIC FIELD

Xu Fu Tang Fulin Chen Leshan
(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

A theory of positive column in glow discharge and arc discharge under moderately low pressure in a magnetic field is presented in this paper. In Ref. [1], the discharge phenomena are investigated under the assumption that the neutral gas is in motion with a set of given intermediary parameters. It is still assumed hear that the neutral gas is in motion, however initial parameters are given, two integral equalities are derived, and relations between initial parameters and the intermediary ones are established. A complete mathematical formulation of this problem is presented and a solution is obtained numerically. Ref. [1] is equivalent to the first iteration. The results show that this kind of improvement is necessary.

www.cnki.net