

环流的数学模拟及其验证

陶建华
(天津大学)

提要 本文分析了明槽突然扩散流动中环流产生的机理, 得出了动量方程中非线性对流项和底部阻力项是模拟环流的必要条件. 用相应的数学模型计算了非恒定环流流速场, 其结果与用双面激光多普勒流速计所测量的流速场相比较, 符合良好.

一、概 述

环流的数学模拟在工程实践中有着重要意义. 例如防波堤附近、水工建筑物下游环流的形成将引起局部冲刷和淤积; 在研究污染物质扩散和热扩散的过程中, 需要确定环流的流速场; 河口海岸地区环流的存在对泥沙的输移、海岸变形和航运都有很大影响. 因此, 在工程设计中预报环流的形成和发展十分必要.

环流问题的研究过去多通过水力模型试验来进行. 近年来随着电子计算机的广泛应用和计算技术的发展, 用数值方法可以有效地计算许多复杂的水力现象. 对于浅水环流, 可以按二维近似水平流来处理. 六十至七十年代, 许多研究者提出了一些二维近似水平流的数学模型, 并把它们用于河口海岸问题的计算中. 此后, 又有不少文章专门讨论了环流问题. 讨论的中心问题是如何用二维近似水平流的模型来模拟环流现象. J. Kuipers 和 C. B. Vreugdenhil^[1] 提出了二次流的数学模型和有效应力概念. 他们认为对流项在模拟环流中有重要作用, 环流的形成或者是对流项在收缩和扩散水流中的作用或者为有效应力所引起. C. Flokstra^[2] 提出了如果不考虑有效应力, 理论上环流不能产生. M. B. Abbott^[3] 提出了环流的驱动是基于惯性力和底部阻力的相互作用, 低精度的格式由于截断误差可以引起“伪环流”.

本文从水流突然扩散的物理过程和涡量传递方程出发分析了环流的产生, 得出了非线性对流项和底部阻力项的存在是模拟环流的必要条件. 实测资料和相应的数学模型的结果相比较, 证实了上述结论, 并和文献[3]中论点一致.

二、二维近似水平流的基本方程

流体紊流的时均流动方程:

连续方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

动量方程

本文于1984年7月4日收到, 曾在1984年第二届全国计算流体力学会议上宣读.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \overline{u'_i u'_j} \right) \quad (2)$$

式中: u_i ——时均流速; p ——压强; ρ ——密度; ν ——流体运动粘滞系数; u'_i ——脉动流速。

对于长波,沿水深方向的速度、加速度可以忽略不计,令 $\rho = \text{常量}$ 。将上式沿水深方向积分。应用莱布尼兹法则并代入表面和底部边界条件,二维近似水平流的方程可以记作:

连续方程:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hU) + \frac{\partial}{\partial y} (hV) = 0 \quad (3)$$

动量方程沿 x 方向:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(Uh)}{\partial t} + \frac{\partial(U^2h)}{\partial x} + \frac{\partial(UVh)}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\tau_{bx}}{\rho} - \frac{\tau_{wx}}{\rho} \\ & \quad \langle 1 \rangle \quad \langle 2 \rangle \quad \langle 3 \rangle \quad \langle 4 \rangle \quad \langle 5 \rangle \quad \langle 6 \rangle \\ & - \int_z^{z+h} \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) dz \\ & \quad \langle 7 \rangle \\ & + \int_z^{z+h} \left(\frac{\partial(\bar{u}')^2}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}'v')}{\partial y} \right) dz \\ & \quad \langle 8 \rangle \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{z+h} (U - \bar{u})^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_z^{z+h} (U - \bar{u})(V - \bar{v}) dz = 0 \quad (4) \\ & \quad \langle 9 \rangle \end{aligned}$$

式中: h ——水深; z ——底高程; U, V ——沿水深平均流速在 x, y 方向分量,

$$U = \frac{1}{h} \int_0^h \bar{u} dz, \quad V = \frac{1}{h} \int_0^h \bar{v} dz;$$

\bar{u}, \bar{v} ——时均流速在 x, y 方向分量; τ_{bx}, τ_{wx} ——底部阻力及表面风应力,其中

$$\tau_{bx} = \frac{\sqrt{U^2 + V^2}}{c^2 h},$$

τ_{wx} 由经验公式确定。 c 是谢才系数。

(4) 式中 $\langle 7 \rangle \langle 8 \rangle \langle 9 \rangle$ 三项分别表示粘性应力项、紊动应力项(侧向)和由于沿水深流速分布不均匀所引起的积分应力项,合称有效应力。我们假设这四项积分后可以近似地表示为:

$$-E \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)$$

E 称为旋涡粘性系数,它包括运动粘性系数,紊动粘性系数和积分粘性系数。

以一维渠道为例,可以大致看出旋涡粘性系数中各项数量级的大小:当水深 $h = 10$ m,沿水深平均流速 $U = 1$ m/s,无因次谢才系数 $c/\sqrt{g} = 18$,则有效应力中旋涡粘性系数中各项为:运动粘性系数 $\nu = 10^{-6}$ m²/s;紊动粘性系数 $\nu_t = 0.06$ m²/s 以及积分粘

性系数 $\nu = 2.0\text{m}^2/\text{s}$ 。由此可见在浅水流动中沿水深流速分布不均匀引起的积分应力在有效应力中起主导作用。

最后动量方程可表示为如下形式:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} + U \frac{gq}{c^2 h} - E \nabla^2 U = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} + V \frac{gq}{c^2 h} - E \nabla^2 V = 0 \quad (6)$$

式中: $q = \sqrt{U^2 + V^2}$; c ——谢才系数。

三、环流的产生

对于充分发展紊流的突然扩散流动,在突然扩大区域将有大尺度漩涡(环流)出现。现以恒定紊流扩散流动为例来分析环流出现的原因。对于规则渠槽里的恒定无压流动,在一定阻力场条件下,流动趋于均匀流。如果槽内有一突然扩大,则在突然扩大前和下游相当远处仍为均匀流。在突然扩大处,由于水流的惯性,主流将脱离原边界光滑地转向,然后扩大到下游壁面。在图 2 中,主流第一个转弯处由于存在向心加速度,主流区的水面必然高于非主流区,但随着主流的扩散其水深逐渐增高,从而非主流区的水流不可能再向下游流动,出现了迳向回流,产生了环流。可见环流的形成,惯性力和阻力起了主导作用。而水流的惯性力由式(4)中对流项(2)(3)体现。由此可以认为对流项和阻力项在模拟环流中必须考虑。

下面来分析主流脱离边界的奇点怎样诱导出环流来。

对(5)式取 y 方向偏导数,(6)式取 x 方向偏导数然后相减可得涡量传递方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (U \omega) + \frac{\partial}{\partial y} (V \omega) + \frac{\partial}{\partial y} \left(U \frac{gq}{c^2 h} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left(V \frac{gq}{c^2 h} \right) - E \nabla^2 \omega = 0 \end{aligned}$$

或

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \omega) + \nabla \cdot \left(\hat{\mathbf{u}} \frac{gq}{c^2 h} \right) - E \nabla^2 \omega = 0 \quad (7)$$

式中: ω ——涡量, $\omega = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}$, \mathbf{u} ——速度向量, $\mathbf{u} = (U, V)$, $\hat{\mathbf{u}}$ ——与速度向量

垂直的向量, $\hat{\mathbf{u}} = (-V, U)$

如果只讨论恒定浅水环流,方程(7)中第一项可以略去。在最后一项有效应力中由于在一般情况下粘性应力和紊动应力不大;浅水流动中流速沿水深分布相对较均匀,积分应力也不大,故有效应力在计算中可以略去。式(7)可记作:

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{u} \omega + \hat{\mathbf{u}} \frac{gq}{c^2 h} \right) = 0 \quad (8)$$

如图 1, 在水流分离的 A 点附近取一无限小的正方形¹⁾, 流线(虚线)将流场分为主流区. 扩散前涡量 $\omega = 0$, 设扩散后在正方形的另一边 $\omega = \omega^*$, 主流区流速为 q , 非主流区流速为零, 将(8)式对面积 $abcd$ 积分

$$\iint_{\sigma} \nabla \cdot \left(\mathbf{u}\omega + \hat{\mathbf{u}} \frac{gq}{c^2 h} \right) d\sigma = 0 \quad (9)$$

按照格林定理上式可化为沿正方形周边的积分:

$$\oint \mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{u}\omega + \hat{\mathbf{u}} \frac{gq}{c^2 h} \right) ds = 0 \quad (10)$$

\mathbf{n} 为周界 s 的法向量, 积分式(10)最后可记作

$$q\omega^* \frac{\Delta x}{2} + (-q) \frac{gq}{c^2 h} \Delta y = 0$$

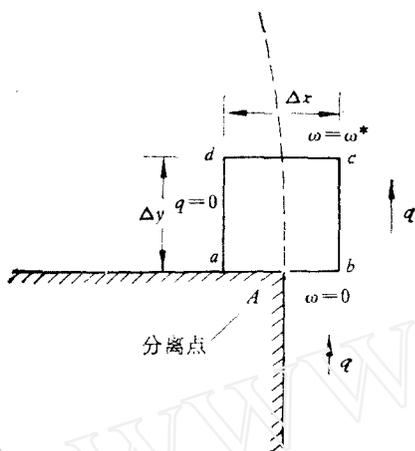


图 1

$$\text{当 } \Delta x = \Delta y, \omega^* = \frac{2gq}{c^2 h}$$

这就是扩散水流分离点所产生的涡量。由式(8)可知, 恒定的浅水环流主要是惯性力和阻力相互作用的结果。至于有效应力, 只要当水流不是处在强烈地紊动状态, 主要取决于沿水深流速分布均匀程度, 而在浅水环流中沿水深流速分布比较均匀。但是如果流动中出现表面水滚或破碎波, 则有效应力项将起相当大作用, 因为这时紊动强度和流速沿水深分布的不均匀性都是不可忽视的^[4], FloskTra^[2] 在他的理论分析中是将整个环流的外围视为一条封闭流线, 当沿封闭流线积分式(7)时, 导致了对流项积分为零, 从而得出了不考虑有效应力环流不能产生的结论。笔者认为在实际液体中, 稳定环流为一封闭流线所包围的假定不够合理。

四、数学模型及其验证

1. 数学模型

数学模型是建立在 Abbott(1968) 二维线性格式基础之上的, 这是一无耗散格式, 具有二阶精度, 有效应力、风应力被略去。采用分步法考虑非线性对流项, 第一步略去对流项考虑底部摩擦力解传播方程; 第二步解对流方程即考虑对流项。模型的详细描述见文献[5]。

对模型进行过二维恒定检验。模型被用来计算二维扩散槽中的恒定流动。水槽从 40cm 突然扩散至 80cm, 水深 10cm, 上下游边界相距 3.3m, 水位差 1mm。计算中初始流速假定为零, 计算进行 200 步时间步长后, 流速场趋于稳定, 并有稳定环流出现。见图 2。

由于这一差分格式是无耗散的二阶精度格式, 故由截断误差引起的“伪环流”的可能性很小。

2. 实验资料验证

1) 这一图案由 M. B. Abbott 首先提出。

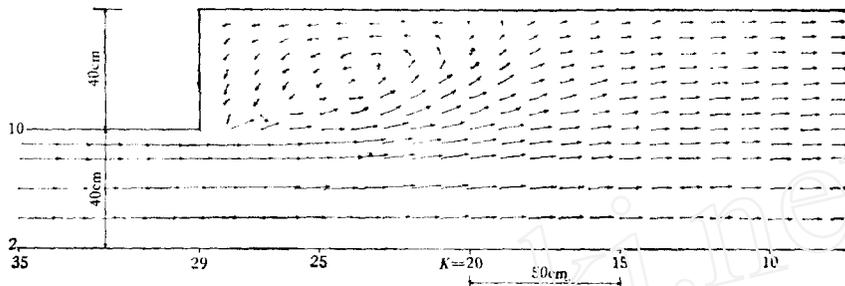


图 2

恒定流: 时间步数 $N = 200$; 初始水深 $H = 0.10\text{m}$; 上下游水面差 $H_{35} - H_8 = 1\text{mm}$

在上述同一水槽中, 入口流量按正弦变化, 计算结果和两组实测资料¹⁾进行了对比:

第一组 $Q_{\max} = 90^{-3}\text{m}^3/\text{s}$ 周期 $T_p = 60\text{s}$

第二组 $Q_{\max} = 160^{-3}\text{m}^3/\text{s}$ 周期 $T_p = 90\text{s}$

图 3 给出了第一组资料当 $t = 20\text{s}$ (时间步数 $N = 100$) 时, 计算与实测流速场的比较.

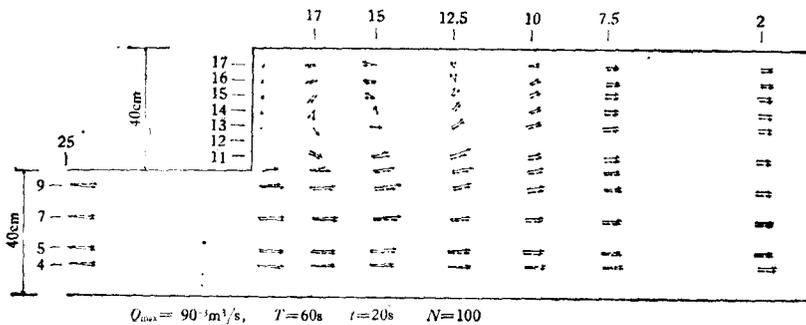


图 3

→ 测量流速 20cm/s; → 计算流速 20cm/s

流速 → 0.2m/s

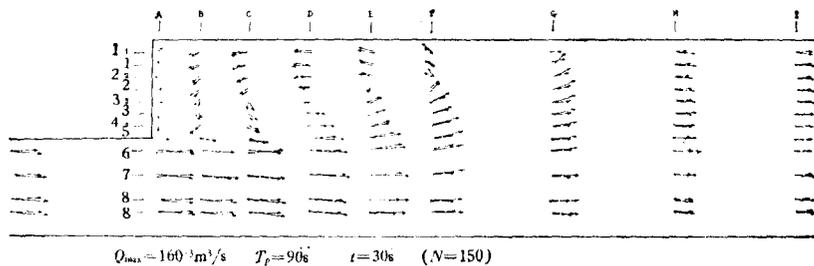


图 4

→ 测量流速 20cm/s → 计算流速 20cm/s

1) 资料来源: Laboratory of Fluid Mechanics Department of Civil Engineering Delft University of Technology.

图 4 给出了第二组资料当 $t = 30s$ (时间步数 $N = 150$) 时, 计算与实测流速场的比较。

计算和实测流速场的比较说明上述的数学模型在预报环流中有一定可靠性, 从而也说明了对流项和阻力项在模拟环流中是必要的。

本文曾得到 M. B. Abbott 和 J. Larsen 的有益建议。李瑞生同志参加了部分计算工作, 特此致谢。

参 考 文 献

- [1] Kuipers, J. and Vreugdenhil, C. B., Calculation of Two-dimensional Horizontal Flow, Delft Hydraulics Laboratory. Report S163 part I(1973).
- [2] FloskTra, C., The closure problem for depth-averaged two-dimensional flow, Delft Hydraulics Laboratory. Report No 196(1977).
- [3] Abbott, M. B. and Rasmussen, C. H., On the Numerical Modelling of Rapid Expansions and Contraction in Models that are Two-dimensional in Plan, 17th Congr. Inter. Assoe. Hydr. Res Vol. 2, 2(1977), 229--238.
- [4] 陶建华, 波浪在岸滩上爬高和破碎的数学模拟, (海洋学报), 6, 5 (1984).
- [5] 陶建华, 二维长波数学模型的研究, 第二届全国流体力学数值方法讨论会论文集 (1983).

MATHEMATICAL SIMULATION OF CIRCULATION AND ITS VERIFICATION

Tao Jianhua
(Tianjin University)

Abstract

In this paper, the mechanisms of circulation generation in an expansion channel was analysed. It is shown that the convective terms in the momentain equations are in generating circulation. Unsteady circulation velocity fields were calculated for a two dimensional model. A comparision of the results with the velocity fields measured by a two-channel larser-Dopplar velocimeter shows good agreement.