

Oldroyd 速率型本构方程显式化的微分算符形式

陈一泓 许元泽 陈文芳

(中国科学院化学研究所)

(北京大学)

提要 本文建立了一种条件,在这种条件下,隐式的 Oldroyd 本构方程是等价于微分型本构方程。并且解释了这些条件的物理意义。最后给出了 Maxwell 型及 Oldroyd 型本构方程显式化的微分算符形式。

一、引言

我们知道,各向同性不可压缩粘弹性流体本构方程按方程的性质可以分为积分型,速率型和微分型。在速率型本构方程中,偏应力张量隐含于各运动学变量之中,而在积分型和微分型中,偏应力张量则是显含的。速率型和积分型能表示物料的应力松弛现象,而微分型则不能。这样,速率型和积分型描述粘弹性流体要优于微分型。但是,某些微分型也能表示物料的法向应力差效应和粘度对剪切速率的依赖性等现象。在解决粘弹性流动问题时,微分型在计算上是比较简便的,因此,在解决实际问题时有其重要性。在很多情形中,虽然初始地利用速率型(或积分型)本构方程,当以摄动法解出流动问题时,其结果与利用微分型往往是相同的^[1-3]。因此,研究这三种类型本构方程之间的关系是重要的。其中某些关系已由 Walters^[6], Huilgol^[7] 和 Bird 等^[8]讨论了。

本文主要利用二种不同的方法,即 Neumann 级数展开法和小参数摄动法,建立速率型和微分型本构方程之间的关系,推导出 Oldroyd 型本构方程显式化的微分算符形式,并给出这种微分算符形式在摄动意义下是收敛的条件。

我们考虑一不可压缩的广义 Oldroyd 流体,其本构方程可写为:

$$\mathbf{S} = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}$$

$$\mathbf{T} + \lambda \frac{\delta}{\delta t} \mathbf{T} + \zeta (\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}^{(1)*} + \mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{T}) + \mu [\text{tr} \mathbf{T}] \mathbf{A}^{(1)*} + \nu [\text{tr} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}^{(1)})] \mathbf{I}^* = \mathbf{f} \quad (1)$$

其中 λ, ζ, μ 和 ν 是具有时间因次的常数。 p 是压力, $\mathbf{I}$ 是单位张量, $\mathbf{S}$ 是应力张量, $\mathbf{T}$ 是偏应力张量。 $\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{T}$ 是 $\mathbf{T}$ 的广义 Oldroyd 导数,给出为^[9]:

本文于 1984 年 1 月 6 日收到,曾在 1983 年第二届亚洲流体力学会议上宣读。

1) 对于真实的体系, $\alpha = 0 - \frac{1}{2}$ 。当 $\alpha = -\frac{1}{2}$ 时, $\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{T}$ 称为 $\mathbf{T}$ 的下 Oldroyd 导数,记为 $\check{\mathbf{T}}$; 当 $\alpha = 0$ 时, $\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{T}$

称为 Jaumann 导数,记为 $\dot{\mathbf{T}}$; 当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时, $\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{T}$ 称为上 Oldroyd 导数,记为 $\hat{\mathbf{T}}$ 。

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{T} = \dot{\mathbf{T}} = \frac{D}{Dt} \mathbf{T} - (\mathbf{W} + a \mathbf{\overset{(1)}{A}}^*) \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot (-\mathbf{W} + a \mathbf{\overset{(1)}{A}}^*) \quad (2)$$

这里 $\frac{D}{Dt}(\cdot)$ 是物质导数算符, 它可表示为:

$$\frac{D}{Dt}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + (\mathbf{V} \cdot \nabla)(\cdot) \quad (3)$$

其中 $\mathbf{V}$ 是速度, ∇ 是梯度算符, $\mathbf{W}$ 是转动率张量. 常量 a 可以由微观流变学模型的分子滑移假定, 或由微观结构的非仿射形变得到^[9,10]. $\mathbf{\overset{(i)}{A}}^*(i=1, 2, \dots)$ 是 i 阶广义 Rivlin-Ericksen 张量¹⁾, 它们表示形变率及其高阶的变化率. $\mathbf{\overset{(i)}{A}}^*$ 有如下递推公式²⁾:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{\overset{(0)}{A}}^* &= \mathbf{I}^*, \quad \mathbf{I}^* = -\frac{1}{2a} \mathbf{I}, \quad (a \neq 0), \quad \mathbf{I}^* = \mathbf{I}, \quad (a = 0) \\ \mathbf{\overset{(i+1)}{A}}^* &= \frac{D}{Dt} \mathbf{\overset{(i)}{A}}^* - (\mathbf{W} + a \mathbf{\overset{(1)}{A}}^*) \cdot \mathbf{\overset{(i)}{A}}^* - \mathbf{\overset{(i)}{A}}^* \cdot (-\mathbf{W} + a \mathbf{\overset{(1)}{A}}^*), \\ &\quad (i = 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中 $\mathbf{I}$ 是单位张量, $\mathbf{\overset{(1)}{A}}^* = \mathbf{\overset{(1)}{A}}$, 而 $\mathbf{\overset{(1)}{A}}$ 是一阶 Rivlin-Ericksen 张量^[11]. $\mathbf{f}$ 是运动学变量 $\mathbf{\overset{(1)}{A}}^*, \mathbf{\overset{(2)}{A}}^*, \dots$ 的各向同性张量值函数.

二、显式化的微分算符形式

为了建立速率型和微分型本构方程之间的关系, 导出方程(1)的显式化的微分算符形式, 我们采用如下两种方法:

1. Neumann 级数展开法

我们引入一微分算符 $\mathbf{G}(\cdot)$, 其定义为:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\cdot) &= \lambda \mathbf{G}_a(\cdot) = \lambda \left\{ -\frac{\delta}{\delta t}(\cdot) - \zeta_a [(\cdot) \cdot \mathbf{\overset{(1)}{A}}^* + \mathbf{\overset{(1)}{A}}^* \cdot (\cdot)] \right. \\ &\quad \left. - \mu_a [\text{tr}(\cdot)] \mathbf{\overset{(1)}{A}}^* - \nu_a [\text{tr}((\cdot) \cdot \mathbf{\overset{(1)}{A}}^*)] \mathbf{I}^* \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

这里已假定 λ, ζ, μ 和 ν 是同阶数量级的小参量, 并写出 $\zeta = \zeta_a \lambda$, $\mu = \mu_a \lambda$, 和 $\nu = \nu_a \lambda$. 而且 ζ_a, μ_a 和 ν_a 的数量级为 1. 现在写出(1)式为:

$$\mathbf{T} = (\mathbf{I} - \lambda \mathbf{G}_a(\cdot))^{-1} \mathbf{f} \quad (6)$$

现在定义微分算符 $(\mathbf{G}_a(\cdot))^i = \mathbf{G}_a(\cdot) \mathbf{G}_a(\cdot) \cdots \mathbf{G}_a(\cdot)$ 的范数 $\|(\mathbf{G}_a(\cdot))^i\|$ 为:

1) 如果 $a = -\frac{1}{2}$, (4) 式成为 Rivlin-Ericksen 张量 $\mathbf{\overset{(i)}{A}}$ 的叠代公式^[11]; 如果 $a = \frac{1}{2}$, 则(4) 式成为 White

Metzner 张量 $\mathbf{\overset{(i)}{B}}$ 的叠代公式^[12].

2) 递推公式的另一形式:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{\overset{(0)}{A}}^* &= \mathbf{\overset{(0)}{A}} = \mathbf{I}^* = \mathbf{I} \\ \mathbf{\overset{(1)}{A}}^* &= 2a \mathbf{\overset{(1)}{A}}, \quad (a \neq 0), \quad \mathbf{\overset{(1)}{A}}^* = \mathbf{\overset{(1)}{A}}, \quad (a = 0), \\ \mathbf{\overset{(i+1)}{A}}^* &= \frac{D}{Dt} \mathbf{\overset{(i)}{A}}^* - (\mathbf{W} + a \mathbf{\overset{(1)}{A}}^*) \cdot \mathbf{\overset{(i)}{A}}^* - \mathbf{\overset{(i)}{A}}^* \cdot (-\mathbf{W} + a \mathbf{\overset{(1)}{A}}^*), \quad (i = 1, 2, \dots) \end{aligned} \right.$$

$$\|(\mathbf{G}_a(\cdot))^i\| = \{\text{tr}[(\mathbf{G}_a(\cdot))^i \mathbf{f}] \cdot ((\mathbf{G}_a(\cdot))^i \mathbf{f})^T\}^{1/2} / [\text{tr}(\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}^T)]^{1/2} \quad (7)$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots)$$

其中 $\text{tr}(\cdot)$ 是张量的迹算符, 在 $(\cdot)^T$ 中, 上标 T 表示张量的转置. 按照 Neumann 级数展开的方式^[13], (6)式可以展开为:

$$\mathbf{T} = \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda \mathbf{G}_a(\cdot))^i \mathbf{f} = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ -\lambda \frac{\partial}{\partial t} (\cdot) - \mu [\text{tr}(\cdot)] \mathbf{A}^* \right. \\ \left. - \zeta((\cdot) \cdot \mathbf{A}^* + \mathbf{A}^* \cdot (\cdot)) - \nu [\text{tr}((\cdot) \cdot \mathbf{A}^*)] \mathbf{I}^* \right\}^i \mathbf{f} \quad (8)$$

此式就是 Oldroyd 速率型本构方程显式化的微分算符形式. 为了使(8)式是绝对收敛的, 要求有

$$\|(\lambda \mathbf{G}_a(\cdot))^i \mathbf{f}\| / \|\mathbf{f}\| = \varepsilon^i \quad (i = 0, 1, \dots) \quad (9)$$

这里 ε 是小于 1 的常数. 在(9)式成立的前提下, (8)式在下列几种情况下将是绝对收敛的:

- (1) 流体是弱弹性的(即 λ 是小的)和流动是慢的(即 $\|(\mathbf{G}_a(\cdot))^i \mathbf{f}\|$ 是小的).
- (2) 流体是弱弹性的, 但是流动未必是慢的.
- (3) 流体未必是弱弹性的, 但是流动是慢的.

(8)式的特例主要有如下几种情形:

$$\mathbf{T} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\lambda \frac{\partial}{\partial t} (\cdot) \right)^i \mathbf{f} = (-\lambda)^i \mathbf{f} \quad (10)$$

$$\mathbf{T} = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ -\lambda \frac{\partial}{\partial t} (\cdot) - \mu [\text{tr}(\cdot)] \mathbf{A}^* \right\}^i \mathbf{f} \quad (11)$$

$$\mathbf{T} = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ -\lambda \frac{\partial}{\partial t} (\cdot) - \zeta((\cdot) \cdot \mathbf{A}^* + \mathbf{A}^* \cdot (\cdot)) \right\}^i \mathbf{f} \quad (12)$$

和

$$\mathbf{T} = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ -\lambda \frac{\partial}{\partial t} (\cdot) - \mu [\text{tr}(\cdot)] \mathbf{A}^* - \zeta[(\cdot) \cdot \mathbf{A}^* + \mathbf{A}^* \cdot (\cdot)] \right\}^i \mathbf{f} \quad (13)$$

2. 摄动法

现在取 λ 为摄动小参量, 将 $\mathbf{V}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{A}^*$ 和 $\mathbf{W}$ 展开为 λ 的幂级数, 我们有

$$\mathbf{V} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \mathbf{V}_{(i)}, \quad \mathbf{T} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \mathbf{T}_{(i)}, \quad \mathbf{f} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \mathbf{f}_{(i)} \quad (14)$$

$$\mathbf{A}^* = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \mathbf{A}_{(i)}^*, \quad \mathbf{W} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \mathbf{W}_{(i)} \quad (15)$$

将(14)和(15)式代入到(1)式中, 并使等式两端 λ 的同次幂的系数相等, 我们有

$$\mathbf{T}_{(0)} = \mathbf{f}_{(0)} \\ \mathbf{T}_{(k)} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{T}_{(k-1)} + \sum_{i=0}^{k-1} \left\{ \zeta_a(\mathbf{T}_{(k-1-i)} \cdot \mathbf{A}_{(i)}^* + \mathbf{A}_{(k-1-i)}^* \cdot \mathbf{T}_{(i)}) \right. \\ \left. + \mu_a [\text{tr} \mathbf{T}_{(k-1-i)}] \mathbf{A}_{(i)}^* + \nu_a [\text{tr}(\mathbf{T}_{(k-1-i)} \cdot \mathbf{A}_{(i)}^*)] \mathbf{T}_{(i)}^* \right\} = \mathbf{f}_{(k)} \quad (16)$$

利用(2)和(3)式,经过适当的整理和合并,则有

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T}_{(0)} &= \mathbf{f}_{(0)} \\ \mathbf{T}_{(k)} &= \sum_{i=0}^{k-1} (\mathbf{G}_a(\cdot))_{(i)} \mathbf{T}_{(k-1-i)} + \mathbf{f}_{(k)} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

这里 $(\mathbf{G}_a(\cdot))_{(k)}$ ($k=0, 1, 2, \dots$) 是微分算符 $\mathbf{G}_a(\cdot)$ 的 λ 幂级数展开式,即

$$\mathbf{G}_a(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (\mathbf{G}_a(\cdot))_{(k)} \quad (18)$$

$(\mathbf{G}_a(\cdot))_{(k)}$ 的具体形式可以表示如下:

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{G}_a(\cdot))_{(k)} &= \left\{ \begin{aligned} &\left(-\frac{\delta}{\delta t}(\cdot) \right)_{(k)} - \zeta_a((\cdot) \cdot \mathbf{A}_{(k)}^{(1)} + \mathbf{A}_{(k)}^{(1)} \cdot (\cdot)) \\ &- \mu_a[\text{tr}(\cdot)] \mathbf{A}_{(k)}^{(1)} - \nu_a[\text{tr}((\cdot) \cdot \mathbf{A}_{(k)}^{(1)})] \mathbf{I}^* \end{aligned} \right\} \\ &\quad (k=0, 1, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\delta}{\delta t}(\cdot) \right)_{(0)} &= \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + (\mathbf{V}_{(0)} \cdot \nabla)(\cdot) - (\mathbf{W}_{(0)} + a \mathbf{A}_{(0)}^{(1)}) \cdot (\cdot) \\ &\quad - (\cdot) \cdot (-\mathbf{W}_{(0)} + a \mathbf{A}_{(0)}^{(1)}) \\ \left(\frac{\delta}{\delta t}(\cdot) \right)_{(k)} &= (\mathbf{V}_{(k)} \cdot \nabla)(\cdot) - (\mathbf{W}_{(k)} + a \mathbf{A}_{(k)}^{(1)}) \cdot (\cdot) \\ &\quad - (\cdot) \cdot (-\mathbf{W}_{(k)} + a \mathbf{A}_{(k)}^{(1)}) \\ &\quad (k=1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

现在,从(17)式中逐次消去 $\mathbf{T}_{(k-1-i)}$ ($i=0, 1, \dots$), 得到 $\mathbf{T}_{(k)}$ 的显式化的算符形式:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T}_{(k)} &= \sum_{m=0}^k (\mathbf{G}_a(\cdot))_{(i_1)} (\mathbf{G}_a(\cdot))_{(i_2)} \cdots (\mathbf{G}_a(\cdot))_{(i_m)} \mathbf{f}_{(j)} \\ &\quad \left(\begin{aligned} &i_1 + i_2 + \cdots + i_m + j = k - m \\ &0 \leq i_1, i_2, \dots, i_m, j, \leq k \end{aligned} \right) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

应注意,(21)式是满足 $i_1 + i_2 + \cdots + i_m + j = k - m$ 条件的各种可能出现的项数之和. m 是决定每项中 $\mathbf{G}_a(\cdot)_{(i_m)}$ 的个数. (21)式的最初几级近似可表示如下:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T}_{(0)} &= \mathbf{f}_{(0)}, \\ \mathbf{T}_{(1)} &= (\mathbf{G}_a(\cdot))_{(0)} \mathbf{f}_{(0)} + \mathbf{f}_{(1)}, \\ \mathbf{T}_{(2)} &= (\mathbf{G}_a(\cdot))_{(0)} (\mathbf{G}_a(\cdot))_{(0)} \mathbf{f}_{(0)} + (\mathbf{G}_a(\cdot))_{(1)} \mathbf{f}_{(0)} + (\mathbf{G}_a(\cdot))_{(0)} \mathbf{f}_{(1)} + \mathbf{f}_{(2)}, \\ \mathbf{T}_{(3)} &= (\mathbf{G}_a(\cdot))_{(0)} (\mathbf{G}_a(\cdot))_{(0)} (\mathbf{G}_a(\cdot))_{(0)} \mathbf{f}_{(0)} + (\mathbf{G}_a(\cdot))_{(1)} (\mathbf{G}_a(\cdot))_{(0)} \mathbf{f}_{(0)} \\ &\quad + (\mathbf{G}_a(\cdot))_{(0)} (\mathbf{G}_a(\cdot))_{(1)} \mathbf{f}_{(0)} + (\mathbf{G}_a(\cdot))_{(0)} (\mathbf{G}_a(\cdot))_{(0)} \mathbf{f}_{(1)} \\ &\quad + (\mathbf{G}_a(\cdot))_{(1)} \mathbf{f}_{(1)} + (\mathbf{G}_a(\cdot))_{(2)} \mathbf{f}_{(0)} + (\mathbf{G}_a(\cdot))_{(0)} \mathbf{f}_{(2)} + \mathbf{f}_{(3)}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

(21)式可以称为 Oldroyd 本构方程显式化的摄动微分算符形式. 如果将(8)式按 λ 小参数展开为幂级数,经过适当的运算,也可以得到(21)式. 这说明以上两种方法是完全一致的.

由(8)式和(21)式可知,在弱弹性流体和慢的流动的意义下,隐式的速率型本构方程

转化为显式的微分型本构方程。它说明在研究非牛顿流体时,以速率型本构方程(1)式中的 Oldroyd 导数项的参数 λ 作为摄动参数,其结果等价于应用相应阶数的微分型本构方程。这样,在研究这类问题时不必利用复杂的隐式的速率型本构方程,仅仅利用相应阶数的微分型本构方程即可。我们还需注意,在测粘流动中, $\dot{\mathbf{A}}^{(n)} \equiv 0$, ($n \geq 3$)。因此,在研究弱弹性流体的测粘流动时,不必引用复杂的本构方程,仅仅应用广义二阶流体本构方程即可。

三、特殊情形

1. Maxwell 型本构方程显式化算符形式的特殊情形

对于 Maxwell 型本构方程显式化的算符形式(10)式,考虑如下几种特殊情形:

$$(1) \quad \mathbf{f} = \eta_0 \dot{\mathbf{A}}^{(1)*} \quad (23)$$

这里 η_0 是粘度,则有

$$\mathbf{T} = \eta_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k \dot{\mathbf{A}}^{(k+1)*} \quad (24)$$

这就是广义的 Maxwell 本构方程的微分形式。

$$(2) \quad \mathbf{f} = \eta_0 (\lambda'_1 \dot{\mathbf{A}}^{(1)*} + \lambda'_2 \dot{\mathbf{A}}^{(2)*}) \quad (25)$$

这里 λ'_1 和 λ'_2 是常数,则有

$$\mathbf{T} = \eta_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k (\lambda'_1 \dot{\mathbf{A}}^{(k+1)*} + \lambda'_2 \dot{\mathbf{A}}^{(k+2)*}) \quad (26)$$

这是广义 Jefferys 本构方程的微分形式。

$$(3) \quad \mathbf{f} = \eta_0 (\dot{\mathbf{A}}^{(1)*} + \lambda' \dot{\mathbf{A}}^{(2)*} + \zeta' \dot{\mathbf{A}}^{(1)*} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{(1)*}) \quad (27)$$

这里 ζ' 和 λ' 是常数,则有

$$\mathbf{T} = \eta_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k \left(\dot{\mathbf{A}}^{(k+1)*} + \lambda' \dot{\mathbf{A}}^{(k+2)*} + \zeta' \frac{\delta^{(k)}}{\delta t^{(k)}} (\dot{\mathbf{A}}^{(1)*} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{(1)*}) \right) \quad (28)$$

其中 $\frac{\delta^{(k)}}{\delta t^{(k)}} (\dot{\mathbf{A}}^{(1)*} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{(1)*})$ 表示对 $\dot{\mathbf{A}}^{(1)*} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{(1)*}$ 进行 k 次 $\frac{\delta}{\delta t}$ 运算。而 $\frac{\delta}{\delta t} (\dot{\mathbf{A}}^{(1)*} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{(1)*})$ 的表达式请参看(37)式。

2. Oldroyd 型本构方程显式化算符形式的特殊情形

对于 Oldroyd 型本构方程显式化的算符形式(8)式,考虑如下特殊情形:

$$\mathbf{f} = \eta_0 (\dot{\mathbf{A}}^{(1)*} + \lambda' \dot{\mathbf{A}}^{(2)*} + \zeta' \dot{\mathbf{A}}^{(1)*} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{(1)*} + \nu' [\text{tr}(\dot{\mathbf{A}}^{(1)*} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{(1)*})] \mathbf{I}^*) \quad (29)$$

这里 λ' , ζ' 和 ν' 是常数,而且与 λ 有同数量级,则(1)式成为 8 参数 Oldroyd 本构方程。利用上述方法,可以得到如下近似公式:

(1) 零级近似:

$$\mathbf{T} = \eta_0 \dot{\mathbf{A}}^{(1)*} = \eta_0 \dot{\mathbf{A}}^{(1)} \quad (30)$$

这是牛顿流体本构方程。

(2) 一级近似:

$$\mathbf{T} = \eta_0 \mathbf{\dot{A}}^* + \alpha_0 \mathbf{\dot{A}}^* \cdot \mathbf{\dot{A}}^* + \alpha_1 \mathbf{\ddot{A}}^* \quad (31)$$

这里 $\alpha_0 = \eta_0(\zeta' - 2\zeta)$, $\alpha_1 = \eta_0(\lambda' - \lambda)$

方程(31)式是二阶流体本构方程.

(3) 二级近似:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & \eta_0 \mathbf{\dot{A}}^* + \alpha_0 \mathbf{\dot{A}}^* \cdot \mathbf{\dot{A}}^* + \alpha_1 \mathbf{\ddot{A}}^* + \beta_0 [\text{tr} \mathbf{\dot{A}}^*] \mathbf{\dot{A}}^* \\ & + \beta_1 (\mathbf{\dot{A}}^* \cdot \mathbf{\ddot{A}}^* + \mathbf{\ddot{A}}^* \cdot \mathbf{\dot{A}}^*) + \beta_2 \mathbf{\ddot{A}}^* + \beta_3 [\text{tr}(\mathbf{\dot{A}}^* \cdot \mathbf{\ddot{A}}^*)] \mathbf{\dot{A}}^* \end{aligned} \quad (32)$$

这里 $\beta_0 = \eta_0 \mu (\lambda - \lambda')$, $\beta_1 = \eta_0 (3\lambda\zeta - \lambda\zeta' - \lambda'\zeta)$,

$$\beta_2 = \eta_0 \lambda (\lambda - \lambda'),$$

$$\begin{aligned} \beta_3 = & \eta_0 \left\{ (\nu - \nu') \left(\mu [\text{tr} \mathbf{I}^*] + \frac{\zeta}{a} + \lambda \right) + 2a\lambda(\zeta - \zeta') \right. \\ & \left. + (2\zeta - \zeta')(\mu + \zeta) \right\} \end{aligned}$$

(32)式是三阶流体本构方程. 推导(30),(31)和(32)式时,利用了如下关系式:

$$[\text{tr} \mathbf{\dot{A}}^*] = 0, \quad \frac{\delta}{\delta t} \mathbf{I}^* = \mathbf{\dot{A}}^*, \quad \mathbf{\dot{A}}^* \cdot \mathbf{I}^* = \mathbf{I}^* \cdot \mathbf{\dot{A}}^* = -\frac{1}{2a} \mathbf{\dot{A}}^*,$$

$$\frac{\delta}{\delta t} (\mathbf{\dot{A}}^* \cdot \mathbf{\dot{A}}^*) = \mathbf{\dot{A}}^* \cdot \mathbf{\ddot{A}}^* + \mathbf{\ddot{A}}^* \cdot \mathbf{\dot{A}}^* + 2a \mathbf{\dot{A}}^* \cdot \mathbf{\dot{A}}^* \cdot \mathbf{\dot{A}}^*,$$

$$\text{tr} \mathbf{\ddot{A}}^* = -2a \text{tr} [(\mathbf{\dot{A}}^*)^2],$$

$$\mathbf{\dot{A}}^* \cdot \mathbf{\dot{A}}^* \mathbf{\dot{A}}^* = \frac{1}{2} [\text{tr}(\mathbf{\dot{A}}^* \cdot \mathbf{\dot{A}}^*)] \mathbf{\dot{A}}^* - 2a (\det \mathbf{\dot{A}}^*) \mathbf{I}^*,$$

$$\frac{\delta}{\delta t} ([\text{tr}(\mathbf{\dot{A}}^* \cdot \mathbf{\dot{A}}^*)] \mathbf{I}^*) = \left(\frac{D}{Dt} [\text{tr}(\mathbf{\dot{A}}^* \cdot \mathbf{\dot{A}}^*)] \right) \mathbf{I}^* + [\text{tr}(\mathbf{\dot{A}}^* \cdot \mathbf{\dot{A}}^*)] \mathbf{\dot{A}}^*,$$

$$[\text{tr}(\mathbf{\dot{A}}^* \cdot \mathbf{\dot{A}}^* \cdot \mathbf{\dot{A}}^*)] = -2a (\det \mathbf{\dot{A}}^*) [\text{tr} \mathbf{I}^*]$$

由于这里我们仅仅考虑不可压缩流体,这样,在(31)和(32)式中没有给出 $\mathbf{T}$ 的各向同性部份,而将它们吸收在 $-p\mathbf{I}$ 项之中.

虽然由(8)式导出(30),(31)和(32)式应用了特定的 $\mathbf{f}$ (如(29)式所示),但是(8)式可应用于任意给定的 $\mathbf{f}$. 因此,(8)式比 8 参数 Oldroyd 流体具有更广泛性和实用性.

四、结 论

我们以显式化的微分算符形式建立了速率型与微分型本构方程之间的关系. 给出了这种关系对于摄动法是有意义的条件. 也给出了 Oldroyd 型本构方程显式化的摄动微分算符形式. 最后给出 Maxwell 型本构方程显式化算符形式及 Oldroyd 型本构方程显式化算符形式作为特例. 这些关系对于将摄动法用于非牛顿流体的流动问题的讨论将是有益的.

感谢钱人元教授对本工作的指导和支持.

参 考 文 献

- [1] Langlois, W. E. and Rivlin, R. S., Tech. Rep. No. DA4725/3, Division of Appl. Math., Brown Uni. (1959).
- [2] Kaloni, P. N., *J. Phys. Soc. Japan*, **20**, 1(1965), 132.
- [3] Thomas, R. H. and Walters, K., *Quat. J. Mech. Appl. Maths.*, **17**(1964), 39.
- [4] Giesekus, H., Proc. 4th Int. Congress Rheol., **1**(1963), 249.
- [5] Chan Man Fong, C. F., Ph. D. Thesis. Uni. Wales, Chap. 7(1965).
- [6] Walters, K., *ZAMP*, **21**(1970), 592.
- [7] Huilgol, R. R., *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **4** (1978), 269.
- [8] Bird, R. B., et. al., *Dynamics of Polymeric Fluids* **1**, Chap. 8, Wiley, New York (1977).
- [9] Johnson, M. W. and Segalman, D., *J. Non-Newton. Fluid Mech.* **2**, (1977), 255.
- [10] Hsu, Y. T., Dissertation, RWTH, Aachen (1981).
- [11] Rivlin, R. S. and Ericksen, J. L., *Rat. Mech. Anal.*, **4**, (1955), 323.
- [12] White, J. L. and Metzner, A. B., *J. Appl. Polym. Sci.*, **7**, (1963), 1867.
- [13] Oden, J. T., *Appl. Functional Analysis* Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs (1979).
- [14] 德冈辰雄, 理性连续体力学入门, 科学出版社 (1982).

ON THE EXPLICIT FORM OF THE DIFFERENTIAL OPERATOR FOR THE OLDROYD RATE TYPE CONSTITUTIVE EQUATION

Chen Yihong Xu Yuanze

(Institute of Chemistry, Academia Sinica)

C. F. Chan Man Fong

(Peking University)

Abstract

We have established the conditions under which the implicit Oldroyd type constitutive equation is equivalent to a differential type constitutive equation. Physical interpretations of these conditions are given. Finally some explicit form for Maxwell type and Oldroyd type constitutive equations are given as illustrations.