

理想刚塑性 Timoshenko 梁动力响应的分析解

金 泉 林

(机械工业部机电研究所)

提要 本文对刚塑性交界面的不同运动状态使用不同的间断条件,给出了受均布动载、两端固支的 Timoshenko 梁的分析解。该解适用于随时间任意变化的非负载荷。文末讨论了梁的转动惯量对其动力响应的影响。

一、引言

近年来已有不少人研究了剪切效应和转动惯量对梁的塑性动力响应的影响^[5-8], Jones^[2-4] 对此做了总结。但他们的研究仅限于初速问题,这相当于瞬时加载后就立即卸载,因此不适用于载荷随时间增长的情况。由于考虑了剪力和转动惯量的影响,正确使用间断条件是十分重要的。对此,文献[1]首先从理论上进行了讨论,指出当间断面的运动方向不同时应使用不同的间断条件。本文以均布载荷下固支的 Timoshenko 梁为例,对刚塑性交界面各种不同的运动状态,使用文献[1]中不同的间断条件分别求解,并给出了这些状态之间相互转化的条件。因此本文给出的解适用于随时间任意变化的非负载荷。

二、基本方程

考虑一长 l 两端固支(忽略轴向力)等截面的理想刚塑性梁承受均布动载 $q(t)$ (图1),其单位长度质量为 m ,转动惯量半径为 r 。作用在梁截面上的弯矩和剪力分别为 M

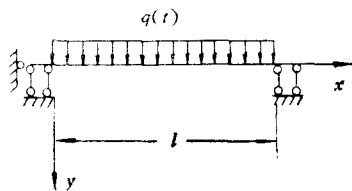


图 1

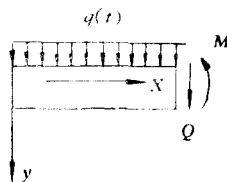


图 2

和 Q (其正方向如图2所示); 梁的挠度为 y ; 由弯曲变形使梁产生的倾角为 ϕ 。用 x 表示梁截面的横坐标,则梁的运动方程为:

$$Q' = m\ddot{y} - q, M' = Q - mr^2\ddot{\phi}. \quad (1)$$

其中字母上面的点号和右上角的撇号分别表示该量对时间 t 的偏导数和对 x 的偏导数。梁的总倾角 $y' = \phi + \gamma$, 式中 γ 为由于剪切变形所产生的转角,并规定 ϕ 和 γ 的正向转

本文于 1982 年 12 月 7 日收到。

动使 $y' > 0$.

引入无量纲量: $\bar{M} = M/M_0$, $\bar{Q} = Q/Q_0$, $\mu = ql^2/2M_0$, $\beta = Q_0 l/M_0$, $\alpha = \left(\frac{\tau}{l}\right)^2$,
 $\bar{y} = \frac{ml^2}{T^2 M_0} y$, $\bar{\phi} = \frac{ml^3}{T^2 M_0} \phi$, $\bar{k} = \frac{ml^4}{T^2 M_0} k$, $\bar{\tau} = \frac{ml^3}{T^2 M_0} \tau$, $\bar{x} = \frac{x}{l}$, $\bar{\zeta} = \frac{\Delta}{l}$, $\bar{t} = \frac{t}{T}$.
 其中 M_0 和 Q_0 分别是梁截面纯弯曲屈服的极限弯矩和纯剪切屈服的极限剪力, Δ 为刚塑性交界面的 x 坐标, $k = \phi'$ 为梁的弯曲曲率, T 为单位时间. 以下为了简便, 略去了 $\bar{M}$ 、 $\bar{Q}$ 、 $\bar{t}$ 、 $\bar{x}$ 、 $\bar{y}$ 、 $\bar{\phi}$ 、 $\bar{k}$ 和 $\bar{\tau}$ 上的一横, 它们将代表无量纲量. (1) 式改写成:

$$\beta Q' = \dot{y} - 2\mu, \quad M' = \beta Q - \alpha \ddot{\phi} \quad (2)$$

取正方形屈服面如图 3 所示. 对塑性区, 利用屈服条件及其相关的正交流动法则求解 (2) 式, 当应力点全处于屈服面的 AB 或 CD 边上时,

$$\dot{y} = C_1(t) \operatorname{sh} \frac{x}{\sqrt{\alpha}} + C_2(t) \operatorname{ch} \frac{x}{\sqrt{\alpha}} + 2\mu. \quad (3)$$

当应力点全处于屈服面的 AC 或 BD 边上时,

$$\dot{y} = 2\mu \quad (4)$$

对刚性区, 有

$$\dot{y} = C_3(t)x + C_4(t) \quad (5)$$

为确定式中的 C_1 、 C_2 、 C_3 和 C_4 需要梁的边界条件和如下的刚塑性交界面上的间断条件^[1]:

当刚塑性交界面的运动使塑性区扩大时,

$$[\dot{y}] = [\dot{\phi}] = 0 \text{ 和 } [Q] = [M] = 0. \quad (6)$$

当刚塑性交界面的运动使塑性区缩小时,

$$[\dot{y}] = [\dot{\phi}] = 0 \text{ 和 } [Q] = [M] = 0. \quad (7)$$

$[z] = z^+ - z^-$ 为某物理量 z 在刚塑性交界面上的间断值, z^+ 和 z^- 分别为该物理量在塑性区侧和刚性区侧的值(以下同). 在方屈服面假设下, 利用正交流动法则和文献 [1] 的 (16)、(32) 式, 当刚塑性交界面静止时, 若塑性区侧的应力点位于屈服面的 AB 或 CD 边上, 则有:

$$[\dot{y}] = 0 \text{ 和 } [Q] = [M] = 0. \quad (8)$$

若塑性区侧的应力点位于屈服面 AC 或 BD 边上, 则有:

$$[\dot{\phi}] = 0 \text{ 和 } [Q] = [M] = 0. \quad (9)$$

三、动力分析

假设方屈服面, 均布载荷下固支梁的刚塑性极限分析(考虑剪切效应)结果给出的初始机构相图, 如图 4(c) 所示. 当 $\mu \leq \beta$ 和 $0 \leq \mu \leq 8$ 时, 梁静止. 当 $0 \leq \beta \leq 8$ 和 $\mu|_{t=0} = \mu(0) > \beta$ 时, 梁将相对支座整体滑动, 其解容易求出且与 α 无关. 当 $\beta > 8$ 和 $\mu(0) > 8$ 时, 梁中间出现一塑性区, 其应力点在屈服面的 AB 边上(非角点), 此区与梁端点之间为刚性区. 当梁端点为塑性铰, 应力点在 CD 边上时, 若应力点在角点 C 和 D 上, 那末在端点处梁既转动又滑动, 否则梁只转动. 下面就来讨论这种 $\mu(0) > 8$ 和 $\beta > 8$ 的情况, 利用对称性, 下面的讨论仅对左半梁进行.

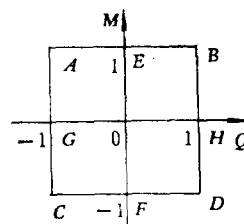


图 3

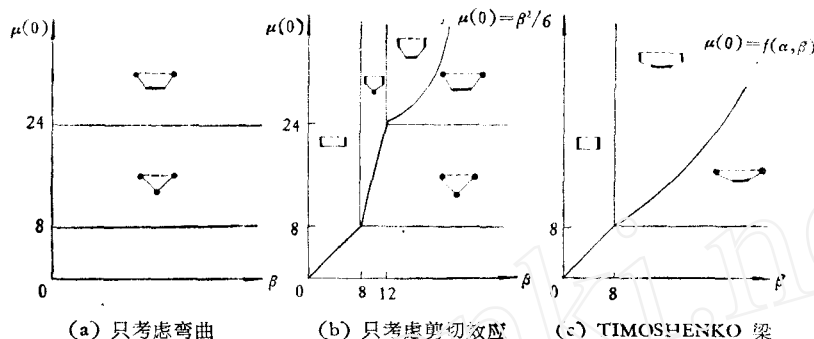


图 4 在三种不同考虑下梁的初始机构图

设 $y|_{t=0} = \dot{y}|_{t=0} = 0$, 边条件为: $M|_{x=0} = -1$, $Q|_{x=1/2} = 0$. 并且当 $\dot{y}_a = \dot{y}|_{x=0} > 0$ 时 $Q_a = Q|_{x=0} = 1$. 由 (2)、(3)、(5) 和边条件解得:

在刚性区 ($0 \leq x \leq \xi$):

$$\left. \begin{aligned} \dot{y} &= \dot{y}_a + \dot{\psi}_a x, \quad \ddot{y} = \ddot{y}_a + \ddot{\psi}_a x \\ \beta Q &= \beta Q_a - (2\mu - \dot{y}_a)x + \frac{1}{2}\ddot{\psi}_a x^2 \\ M &= -1 + (\beta - \alpha\ddot{\psi}_a)x - \frac{1}{2}(2\mu - \dot{y}_a)x^2 + \frac{1}{6}\ddot{\psi}_a x^3 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

在塑性区 ($\xi \leq x \leq \frac{1}{2}$):

$$\dot{y} = \ddot{C} \operatorname{ch} \frac{x-1/2}{\sqrt{\alpha}} + 2\mu, \quad \beta Q = \ddot{C} \sqrt{\alpha} \operatorname{sh} \frac{x-1/2}{\sqrt{\alpha}}, \quad M = 1 \quad (11)$$

其中 ψ_a 表示刚性区转角的无量纲值.

(1) 当 $\dot{y}_a = 0$ 和 $\dot{\xi} < 0$ 时, 将 (10) 和 (11) 式代入间断条件 (6) 联合求解可得:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{C} &= \frac{\sqrt{\alpha}}{B} 2\mu, \quad \ddot{\psi}_a = \frac{2\mu}{B} \operatorname{sh} \frac{\xi-1/2}{\sqrt{\alpha}}, \\ \beta Q_a &= \left[\left(\alpha + \frac{1}{2} \xi^2 \right) \operatorname{sh} \frac{\xi-1/2}{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\alpha} \xi \operatorname{ch} \frac{\xi-1/2}{\sqrt{\alpha}} \right] \cdot \frac{2\mu}{B}, \\ \xi^2 &= \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \xi \operatorname{sh} \frac{\xi-1/2}{\alpha} / B \right) \cdot \mu \right]^{-1}, \\ \dot{\xi} &= -\dot{\mu} / (\mu^2 \eta), \quad \ddot{\xi}|_{\xi=0} = -\ddot{\mu} / (\mu^2 \eta). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其中

$$B = \xi \operatorname{sh} \frac{\xi-1/2}{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\alpha} \operatorname{ch} \frac{\xi-1/2}{\sqrt{\alpha}},$$

$$\eta = \frac{\xi}{B^2} \left[\left(\alpha + \frac{1}{3} \xi^2 \right) \operatorname{ch}^2 \frac{\xi-1/2}{\sqrt{\alpha}} - \xi \sqrt{\alpha} \operatorname{sh} \frac{\xi-1/2}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{ch} \frac{\xi-1/2}{\sqrt{\alpha}} \right] > 0.$$

由 $\dot{\psi}_a|_{t=0} > 0$, $Q_a \leq 1$ 和 $\dot{\xi} < 0$ 可解得:

$$\mu(0) = \mu|_{t=0} > 8, \quad \mu \leq \mu_1, \quad \dot{\mu} > 0 \quad (13)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= 2(\beta\xi_1^3 - 3\xi_1^2 + 6\alpha)/[\xi_1^2(\xi_1^2 + 6\alpha)], \\ \operatorname{th} \frac{\xi_1 - 1/2}{\sqrt{\alpha}} &= 3\sqrt{\alpha}\xi_1(\beta\xi_1 - 4)/(\beta\xi_1^3 - 6\xi_1^2 - 12\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

显然 $\xi_1 \leq \xi$. 当 $\mu(0) \leq 8$ 时 $\dot{y} = 0$; 当 $\mu > \mu_1$ 时 $Q_a = 1$, $\dot{y}_a > 0$; 当 $\mu = 0$ 时 $\dot{\xi} = 0$.

(2) 当 $\dot{y}_a = 0$ 和 $\dot{\xi} > 0$ 时, 将 (10) 和 (11) 式代入间断条件 (7) 联合求解可得:

$$\left. \begin{aligned} \dot{C} &= \int_0^{\tau} \ddot{C} d\tau = \frac{\sqrt{\alpha}}{B} D, \quad \dot{\phi}_a = \frac{D}{B} \operatorname{sh} \frac{\xi - 1/2}{\sqrt{\alpha}} + v'(\xi) \\ \ddot{C} &= \frac{\sqrt{\alpha}}{B} 2\mu - \xi\xi E, \quad \ddot{\phi}_a = \frac{2\mu}{B} \operatorname{sh} \frac{\xi - 1/2}{\sqrt{\alpha}} - \xi \operatorname{ch} \frac{\xi - 1/2}{\sqrt{\alpha}} E, \\ \beta Q_a &= \left[\left(\alpha + \frac{1}{2} \xi^2 \right) \operatorname{sh} \frac{\xi - 1/2}{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\alpha} \xi \operatorname{ch} \frac{\xi - 1/2}{\sqrt{\alpha}} \right] \cdot \frac{2\mu}{B} \\ &\quad - \xi\xi \left(\sqrt{\alpha} \operatorname{sh} \frac{\xi - 1/2}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{2} \xi \operatorname{ch} \frac{\xi - 1/2}{\sqrt{\alpha}} \right) E, \\ \xi^2 &= \left[2\tau - \frac{1}{3} \xi_0^3 \dot{\phi}_0 - \int_{\xi_0}^{\xi} (v(\xi) - \alpha v''(\xi)) \xi d\xi \right] / \\ &\quad \left[\int_0^{\tau} \mu d\tau - \frac{1}{3} \xi \left(\frac{D}{B} \operatorname{sh} \frac{\xi - 1/2}{\sqrt{\alpha}} + v'(\xi) \right) \right], \\ \dot{\xi} &= \left[\int_0^{\tau} \mu d\tau - \mu\tau + \frac{1}{2} \mu f(\xi) \right] / \left[\left(\int_0^{\tau} \mu d\tau \right)^2 (\eta + \eta_1) \right] \\ \ddot{\xi} &= \left\{ -\dot{\mu} \left(\tau - \frac{1}{2} f(\xi) \right) + \dot{\xi} \left[2\mu \left(\frac{1}{4} f'(\xi) - (\eta + \eta_1) \int_0^{\tau} \mu d\tau \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \dot{\xi} (\eta'(\xi) + \eta_1'(\xi)) \cdot \left(\int_0^{\tau} \mu d\tau \right)^2 \right] \right\} / \left[\left(\int_0^{\tau} \mu d\tau \right)^2 (\eta + \eta_1) \right] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其中 $\tau = t - t_0$, t_0 为本状态的初始时刻.

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \xi|_{\tau=0}, \quad v = \dot{y}|_{\tau=0}, \quad \dot{\phi}_0 = \dot{\phi}_a|_{\tau=0}, \\ D &= \int_0^{\tau} 2\mu d\tau + v(\xi) - \xi v'(\xi), \quad E = \left[\operatorname{ch} \frac{\xi - 1/2}{\sqrt{\alpha}} \cdot D/B + \sqrt{\alpha} v''(\xi) \right] / B, \\ \eta_1 &= \xi \cdot \left[\frac{1}{3} \xi^2 \operatorname{ch} \frac{\xi - 1/2}{\sqrt{\alpha}} / B - \sqrt{\alpha} \right] \cdot \left[\operatorname{ch} \frac{\xi - 1/2}{\sqrt{\alpha}} (v(\xi) - \xi v'(\xi)) / B \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\alpha} v''(\xi) \right] / \left(\int_0^{\tau} 2\mu d\tau \right), \\ f(\xi) &= \frac{1}{3} \xi_0^3 \dot{\phi}_0 - \frac{1}{3} \xi^3 \left[v(\xi) \operatorname{sh} \frac{\xi - 1/2}{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\alpha} v'(\xi) \cdot \operatorname{ch} \frac{\xi - 1/2}{\sqrt{\alpha}} \right] / B \\ &\quad + \int_{\xi_0}^{\xi} (v(\xi) - \alpha v''(\xi)) \xi d\xi. \end{aligned}$$

注意到 $\dot{y}|_{\tau=0} = 0$ 用数学归纳法可以证明: 对任意的 t_0 都有 $v \geq 0$, $v' \geq 0$, $v'' \leq 0$ 和 $v'|_{\xi=\frac{1}{2}} = 0$, 因而 $\eta_1 > 0$, $f(\xi) \geq 0$. 利用 $\dot{\phi}_a|_{\xi=\frac{1}{2}} = \dot{\phi}_a|_{\xi=\frac{1}{2}} = 0$, 由 $\dot{\phi}_a|_{\tau=t_0} > 0$,

$\dot{\phi}_a \geq 0$, $\dot{\xi} > 0$ 可以得到:

$$\mu(0) > 8, \quad \bar{\mu}(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mu d\tau \geq \mu_2, \quad \bar{\mu}(\tau) > \mu_3 \quad (16)$$

其中 $\mu_2 = 8 - \frac{4}{\tau} \left[\frac{1}{3} \xi_0 \dot{\phi}_0 + \int_{\xi_0}^{\frac{1}{2}} (\nu(\xi) - \alpha \nu''(\xi)) \xi d\xi \right]$, $\mu_3 = \mu(\tau) \left(1 - \frac{1}{2} f(\xi) \right)$. 当 $\mu(0) \leq 8$ 时, $\dot{y} = 0$; 当 $\bar{\mu}(\tau) = \mu_2$ 时, 梁达到最大挠度; 当 $\bar{\mu}(\tau) = \mu_3$ 时, $\dot{\xi} = 0$. 若 $Q_a = 1$, 可解得 $\xi = \xi_0 = \xi_1$, 这与 $\dot{\xi} > 0$ 矛盾, 因此 $Q_a|_{\dot{\xi} > 0} < 1$, 并且有 $\dot{y}_a = 0$ 和 $\xi \geq \xi_1$.

(3) 当 $\dot{y}_a = 0$ 和 $\dot{\xi} = 0$ 时, 我们先证明当 $\dot{\xi} = 0$ 时有 $[\dot{\phi}] = 0$ 然后再讨论这种情况的解.

设 $t_1 \leq t \leq t_2$ 时 $\dot{\xi} = 0$ 和 $t < t_1$ 或 $t > t_2$ 时 $\dot{\xi} \neq 0$. 记 $\ddot{A} = 2\mu - \dot{y}_a$ 和 $\xi|_{t=t_1} = \xi_0$, 当 $t_1 \leq t \leq t_2$ 时将 (10) 和 (11) 代入间断条件 (8) 解出 $\ddot{C}$ 和 $\ddot{\phi}_a$ 后得到:

$$[\ddot{\phi}] \propto \left\{ \beta Q_a - 2 \left[\xi_0 + \left(\alpha - \frac{1}{2} \xi_0^2 \right) \text{sh} \frac{\xi_0 - 1/2}{\sqrt{\alpha}} / B_0 \right] / \left[\xi_0^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \xi_0 \text{sh} \frac{\xi_0 - 1/2}{\sqrt{\alpha}} / B_0 \right) \right] \right\} \quad (17)$$

其中 $B_0 = \xi_0 \text{sh} \frac{\xi_0 - 1/2}{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\alpha} \text{ch} \frac{\xi_0 - 1/2}{\sqrt{\alpha}}$

若 $t_2 > t_1$ 和 $\dot{y}_a = 0$ 有 $t_1 < t < t_2$ 时 $\dot{\xi} = 0$, 由 (12) 和 (15) 式有: $\dot{\mu}|_{\xi=0} = \lim_{\xi \rightarrow +0} \dot{\mu} = \lim_{\xi \rightarrow -0} \dot{\mu} = 0$, 即 $\mu = \mu|_{t=t_1} = \mu|_{t=t_2}$. 而由 (8) 解出的 βQ_a 仅是 μ 和 ξ_0 的函数, 故 $\beta Q_a = \beta Q_a|_{t=t_1} = \beta Q_a|_{t=t_2}$. 对 $t_2 > t$, $\dot{y}_a > 0$ 和 $t_2 = t_1$ 二种情况, 此式显然成立.

利用反证法可以证明若 $\dot{y}_a > 0$ 有 $\dot{\xi} = 0$. 因此当 $t < t_1$ 或 $t > t_2$ 时有 $\dot{y}_a = 0$, 其解可由 (12) 或 (15) 式表示. 当 $\dot{\xi} \rightarrow 0$ 时有

$$\beta Q_a \rightarrow 2\mu \left[\xi + \left(\alpha - \frac{1}{2} \xi^2 \right) \text{sh} \frac{\xi - 1/2}{\sqrt{\alpha}} / B \right],$$

$$\ddot{\phi}_a \rightarrow \frac{2\mu}{B} \text{sh} \frac{\xi - 1/2}{\sqrt{\alpha}},$$

注意到

$$[M] = 2 - (\beta Q_a - \alpha \ddot{\phi}_a) \xi + \mu \xi^2 - \frac{1}{6} \ddot{\phi}_a \xi^3 = 0,$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\xi^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \xi \text{sh} \frac{\xi - 1/2}{\sqrt{\alpha}} / B \right) \right] = \frac{1}{\mu},$$

因此:

$$\beta Q_a = \beta Q_a|_{t=t_1} = \lim_{\substack{\text{或 } t \rightarrow t_1-0 \\ \text{或 } t \rightarrow t_2+0}} \beta Q_a = \lim_{\xi \rightarrow 0} \beta Q_a = 2 \frac{\xi_0 + \left(\alpha - \frac{1}{2} \xi_0^2 \right) \text{sh} \frac{\xi_0 - 1/2}{\sqrt{\alpha}} / B_0}{\xi_0^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \xi_0 \text{sh} \frac{\xi_0 - 1/2}{\sqrt{\alpha}} / B_0 \right)} \quad (18)$$

将(18)代入(17)得到 $[\ddot{\psi}] = 0$. 从而证明了当 $\dot{\xi} = 0$ 时可采用间断条件(6). 因此, 当 $\dot{y}_a = 0$ 和 $\dot{\xi} = 0$ 时, 问题的解同(12)式, 且保持本状态的必要条件为: $\mu(0) > 8$, $\mu \leq \mu_1$, $\dot{\mu} = 0$.

(4) 当 $\dot{y}_a > 0$ 时, 有 $Q_a = 1$. 且如上所述有 $\dot{\xi} = 0$, 利用间断条件(6)可得:

$$\xi = \xi_1, \quad \ddot{C} = \frac{\sqrt{\alpha}}{B_1} 2\mu_1, \quad \ddot{\phi}_a = \frac{2\mu_1}{B_1} \frac{\xi_1 - 1/2}{\sqrt{\alpha}}, \quad \dot{y}_a = 2(\mu - \mu_1) \quad (19)$$

式中 $B_1 = \xi_1 \operatorname{sh} \frac{\xi_1 - 1/2}{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\alpha} \operatorname{ch} \frac{\xi_1 - 1/2}{\sqrt{\alpha}}$. 记 $\tau = t - t_3$, t_3 为本状态开始时刻. 由 $\dot{y}_a|_{\tau=0} > 0$, $\dot{y}_a|_{\tau=0} = 0$ 和 $\dot{y}_a|_{\tau>0} > 0$ 可得:

$$\mu|_{\tau=0} > \mu_1, \quad \bar{\mu}(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mu d\tau > \mu_1. \quad (20)$$

当 $\bar{\mu} = \mu_1$ 时 $\dot{y}_a = 0$, $\dot{y}_a \leq 0$. 前面已指出 $\dot{y}_a = 0$ 时有 $\xi \geq \xi_1$, 故此后转入 $\dot{y}_a = 0$ 和 $\dot{\xi} \geq 0$ 的状态.

上述所有讨论适用于均布初速问题, 只要令 $\mu(0) \rightarrow \infty$, $\mu|_{t>0} = 0$ 和 $\int_0^t 2\mu dt = \dot{y}|_{t=0}$ 即可.

四、结果与讨论

1. 由表 1 列出的计算结果可以看出: 当外载总冲量相同, 但加载方式不同时, 梁中点最大挠度是不同的. 图 5 表示出外载总冲量相同, 加载方式也相同的情况下, 梁中点最大

表 1 外载总冲量 (10 lb s)

载荷曲线							初速问题
最大载荷 (lb/in)	0.1×10^5	0.1×10^5	0.1×10^5	0.5×10^5	0.1×10^5	0.1×10^5	初速度为:
载荷作用时间 (s)	0.2×10^{-3}	0.2×10^{-3}	0.2×10^{-3}	0.2×10^{-3}	0.2×10^{-3}	0.2×10^{-3}	$0.2732(\text{in/s})$
中点最大挠度 (in)	1.44112	1.99078	2.04200	1.42183	2.95834	2.74981	1.61766

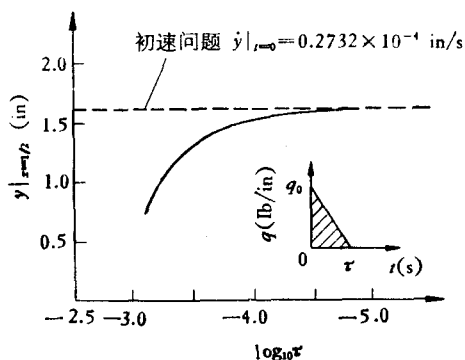


图 5 在总冲量相同加载方式相同时梁中点挠度与载荷作用时间的关系曲线

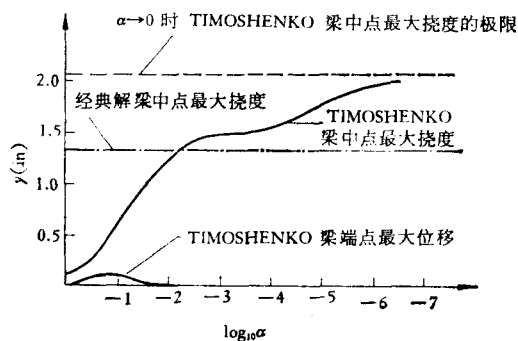


图 6 梁中点和梁端点最大挠度与 α 的关系曲线(梁的参数同图 12)

挠度随载荷作用时间的变化曲线,可见当载荷作用时间趋于零时,梁中点最大挠度趋于初速问题时的相应值。

2. 转动惯量和剪切效应对梁的运动机构有明显的影响,图 4 给出了在三种不同考虑下固支梁的初始机构相图用以说明这种影响。在图 4(c) 中仅有转动的机构和转动与滑动共存的机构的分界曲线 $\mu(0) = f(\alpha, \beta)$ 由下式给出(它们是通过把 (14) 式中的 μ_i 换成 $\mu(0)$ 而得到的),

$$\mu(0) = 2(\beta\xi_1^3 - 3\xi_1^2 + 6\alpha)/[\xi_1^3(\xi_1^2 + 6\alpha)]$$

$$\text{th} \frac{\xi_1 - 1/2}{\sqrt{\alpha}} = 3\sqrt{\alpha} \xi_1(\beta\xi_1 - 4)/(\beta\xi_1^3 - 6\xi_1^2 - 12\alpha)$$

3. 转动惯量对梁的最大挠度的影响。Jones 在文献 [6] 中给出的图 7 说明了在初速问题中转动惯量对梁的最大挠度的影响。本文考虑了载荷的情况,计算结果见图 6 和图 7。由图 6 可见,在一定载荷下,不改变梁的其它参数, α 值越大,其中点挠度越小。当 α 增大到某一数值时,梁端点发生剪切滑动。当 α 趋于零时,梁中点最大挠度趋于一个极限值,不过该值高于仅考虑弯曲效应的经典解所给出的中点最大挠度值。对这种现象可说明如下:

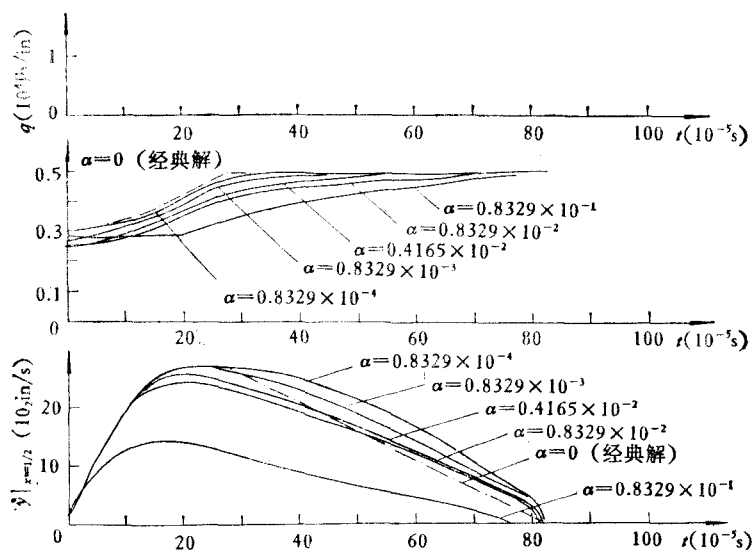


图 7 转动惯量不同时梁的刚塑性交界面位置 ξ 和梁中点速度随时间的变化曲线

梁参数: $M_0 = 0.191 \times 10^4 \text{ lb in}$; $Q_0 = 0.880 \times 10^4 \text{ lb}$; $m = 0.366 \times 10^{-3} \text{ lbs}^2/\text{in}$; $l = 5 \text{ in}$; $\beta = 0.231 \times 10^2$, (当 $\alpha = 0.8329 \times 10^{-3}$ 时,相当于 $\sigma_0 = 30.5 \times 10^3 \text{ lb/in}^2$, $\tau_0 = \sigma_0/\sqrt{3}$, $\rho = 0.732 \times 10^{-3} \text{ lbs}^2/\text{in}^3$, $h = 0.5 \text{ in}$, $b = 1 \text{ in}$ 的质量均匀分布的方截面梁。其中 σ_0 、 τ_0 、 ρ 分别为梁材料的单向拉伸屈服应力、剪切屈服应力、质量密度; h 、 b 为梁截面的高度和宽度)。

从图 7(b) 和 (c) 可以看出,当 α 很小时,本文给出的解、经典解给出的 ξ , 达到最大挠度的时间 t_l 和当 $t < t_l$ 时中点速度 $\dot{y}|_{x=l/2}$ 都很接近,这里 t_l 代表经典解给出的出现 $\xi = \frac{1}{2}$ 的时间。但当 $t > t_l$ 时,二种解给出的 $\dot{y}|_{x=l/2}$ 就相差较大。

本解给出 $\dot{y}|_{x=\frac{1}{2}} = \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{B} + 1\right) \int_0^{\tau} 2\mu dt$, ($t \geq t_s$), 令 $\alpha \rightarrow 0$, 得到

$$\dot{y}|_{x=\frac{1}{2}} = \int_0^{\tau} 2\mu dt. \quad (t \geq t_s).$$

经典解给出 $\dot{y}|_{x=\frac{1}{2}} = \int_0^{\tau} 2\mu dt - 24(t - t_s)$, ($t \geq t_s$) 这里 τ 为外载作用时间, 显然前者为匀速运动, 后者为匀减速运动. 分别积分上面二式得到二种解的中点最大挠度, 对本算例二者相差 36.3%.

本文是在王仁教授指导下完成的, 黄筑平老师也给了很多帮助, 作者表示衷心的感谢.

参 考 文 献

- [1] 黄筑平, “理想刚-塑性动力分析中的间断性质”, 力学学报, 5(1983).
- [2] Jones, N., *Shock Vib. Dis.* 7B (1975), 89—105.
- [3] Jones, N., *Shock Vib. Dis., Parti*, 10, 9(1978), 21—23; Part 2, 10, 10(1978), pp. 13—19.
- [4] Jones, N., *Inst. Phys. conf. ser.* No. 47: ch. 3.
- [5] Karunes, B. and Onat, E. T., *ASME. J. Appl. Mech.*, 27 (1960), 107—110.
- [6] Jones, N., *ASME. J. Appl. Mech.* 46, 2 (1979), 303—310.
- [7] Дикович, И. Л. Динамика упруго-пластических балок, (1960).
- [8] Symonds, P. S., *Engineering plasticity*, edited by J. Heyman and F. A. Leckie, C. U. P. (1968).

AN ANALYTICAL SOLUTION OF DYNAMIC RESPONSE FOR THE RIGID PERFECTLY PLASTIC TIMOSHENKO BEAM

Jin Qhanlin

(Research Institute of Mechanical and Electrical Technology Ministry of Machine-Building Industry)

Abstract

Previous studies on Timoshenko beam was only dealt with for impulsive velocity but not for increasing load. An analytical solution of dynamic response for the fixed-ended Timoshenko beam subjected to uniformly distributed dynamic load is given herein by use of the discontinuity conditions for moving rigid-plastic interface. The solution is valid for arbitrarily time-varying but non-reversing load. Finally the influence of rotatory inertia on the dynamic plastic response of beams is discussed.