

关于非线性弹性理论的变分原理

梁浩云

(中山大学)

提要 本文提出一类仅依赖于应力场的余能原理,说明在非线性弹性理论中类似于线性理论那样的仅以应力场为独立变量的纯粹的余能原理同样是存在的,同时还提出了一类仅以应变场为独立变量的原理,比较了它们与线性理论的余能原理的异同,并推导与上述原理对应的广义变分原理。最后提出同一变分原理有三种等价形式以整理各原理的关系,说明各变分原理不仅可从单一的虚功原理导出,而且都可以看作同一广义变分原理的各级不完全变分原理,给出上下端都封闭的关系图。

一、引言

在非线性弹性理论中,是否存在象线性理论那样的应力场是唯一独立变量的余能原理,众多的变分原理之间有什么联系,这是近年来引起广泛兴趣的问题之一。至今被提出的非线性弹性理论的余能原理可以概括为三大类:首先是基于 Kirchhoff 应力张量 $\mathbf{T}$ 的 Reissner 原理^[1-4]。它常被认为不是纯粹的余能原理,因为这里除应力张量外,位移向量 $\mathbf{u}$ 也是独立变量。其后是仅基于 Piola 应力张量 $\boldsymbol{\tau}$, 一度被宣称为真正的余能原理的 Levinson 原理^[5-11]。这一原理是否成立,依赖于 Piola 应力张量 $\boldsymbol{\tau}$ 和变形梯度 $\mathbf{F}$ 的关系 $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{F})$ 是否可逆,即相应的 Legendre 变换是否成立。文献[12]已表明反解 $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{F})$ 一般是不可能的。文献[2]也指出 $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\tau})$ 的单值性与标架无差异性的要求是矛盾的。文献[7]、[8]力图修正这一结果,但也只能证明“多值的逆”是可以存在的。总之,即使在各向同性的简单情形,也只有当 $\boldsymbol{\tau}^* \cdot \boldsymbol{\tau}$ 在物体的每一点有不同的主值(难以预先知道这一条件是否满足)时, Piola 应力张量和变形梯度的函数关系才是可逆的。文献[10]给出选择合适分支的条件,但是该函数的逆在整体意义下的多值性(对各向同性体至少有四个不同分支)也给实际应用带来附加困难。总是成立的是基于极分解的 Fraijs de Veubeke 原理^[9-11],但这里除 Piola 应力张量外,转动张量 $\mathbf{R}$ 也作为独立变量出现,又没有达到人们所期待的余能原理的纯粹性。

问题的症结在哪里?对此,文献[4]、[5]、[13]和[14]都已有所说明。困难在于应力场和位移场是耦合在一起的,余能泛函的表达式同时依赖于应力场和位移场(主要是位移梯度场)。因此以往讨论的焦点是 Piola 应力张量和变形梯度的关系是否可逆,以便将变形梯度表成应力张量的函数。我们知道变形梯度可经极分解而分解成转动场 $\mathbf{R}$ 和右伸长张量场 $\mathbf{U}$,后者可经本构关系与应力场联系起来。所以关键是转动场 $\mathbf{R}$ 能否与应力场建立联系。在线性理论中,由于小转动的假设认为 $\mathbf{R} \simeq \mathbf{I}$ (单位张量)消除了困难。而

本文于1983年1月20日收到,曾在1982年10月全国非线性力学学术会议上宣读。

Levinson 原理假定 $\tau = \tau(\mathbf{F})$ 关系可逆、Fraijs de Veubeke 原理引进 $\mathbf{R}$ 为独立变量以避免这个困难. 本文从寻求转动场与应力场的关系入手, 说明考虑到对应的协调条件, 转动场 $\mathbf{R}$ 即被 Kirchhoff 应力张量 $\mathbf{T}$ 或 Jaumann 应力张量 $\mathbf{s}$ 通过微分方程唯一决定到只差一整体刚性转动 $\hat{\mathbf{R}}$ (取作参数), 从而提出一类带参数的仅以应力场为独立变量的余能原理, 说明了在非线弹性理论中仅以应力场为变量的纯粹的余能原理同样是存在的. 同时我们还提出了一类仅以应变场为变量的变分原理. 并且比较了它们与线性理论的余能原理的异同. 接着把变量间的关系也当作约束条件, 应用 Lagrange 乘子法推导出与上述原理对应的广义变分原理. 最后通过提出同一变分原理的三种等价形式的概念整理出各变分原理的关系, 同时很自然地得到类似于 Fraijs de Veubeke 原理的以 $(\mathbf{R}, \mathbf{T})$ 或 $\mathbf{F}$ 为变量的变分原理和类似于 Reissner 原理的以 $(\mathbf{u}, \mathbf{s})$ 或 $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 为变量的变分原理. 文献 [13] 已证明非线性弹性理论的变分原理均可从单一的虚功原理中导出. 本文又将说明各变分原理都可以看作某广义变分原理的“各级不完全变分原理”^[14], 使它们在上下端都封闭的框架里构成一个有机的整体. 用 Lagrange 乘子法可以由不完全变分原理导出广义变分原理, 反之一步步地将一些关系式留作附加条件, 又可以从广义变分原理自然地得出各级不完全变分原理, 这不仅进一步说明了各变分原理的内在联系, 也可为根据需要提出新的原理提供另一条途径.

二、符号与基本关系

本文中各数学符号、基本关系式和物理意义, 以及其他参考文献详见文献 [13] 附录. 本文全部讨论限于:

- (i) 超弹性体 (Green 弹性体). 每单位参考构型体积有贮能函数 Σ 和第一、第二余能 $\Sigma^c, \tilde{\Sigma}^c$.
- (ii) 死载荷, 即不管当前构型 r 如何, 外力总取给定值.
- (iii) 采用 Lagrange 描述法, 所有出现的量已通过转移张量预先化成在参考构型 $\mathcal{R}$ 的一点张量.
- (iv) 非极材料.
- (v) 协调连续统: 协调条件处处满足, 各量充分光滑 (足够阶连续可微), 区域是单连通的.
- (vi) 为叙述简单起见, 省去体力, 也不讨论有跳跃的情况. 当然这一条是非本质的.

三、预备性命题

为了通过应力场表出余能泛函, 先引进一些简单的辅助关系. 首先, 由物质弹性的数学表达为应力应变的 1-1 对应导致

命题 3.1: 右伸长张量 $\mathbf{U}$ 、Almansi 应变张量 $\mathbf{E}$ 与应力张量的关系

$$\mathbf{U}(\mathbf{s}) = \frac{d\tilde{\Sigma}^c}{d\mathbf{s}}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{T}) = \frac{d\Sigma^c}{d\mathbf{T}} \quad (3.1)$$

是整体 1-1 可逆的, 且作为对 $\Sigma^c, \tilde{\Sigma}^c$ 的定义域的要求, 这样决定的 $\mathbf{U}$ 或 Green 应变张量 $\mathbf{c} = 2\mathbf{E} + \mathbf{I}$ 是对称正定的.

其次我们讨论 Kirchhoff 应力张量 $\mathbf{T}$ 和 Jaumann 应力张量 $\mathbf{s}$ 的关系, 有

命题 3.2: 给定对称的 $\mathbf{s}$ 和对称正定的 $\mathbf{U}$ ($\mathbf{U} = \frac{d\tilde{\Sigma}^e}{d\mathbf{s}} = \mathbf{U}(\mathbf{s})$), 由

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{T}) \quad (3.2)$$

唯一决定对称的 $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{s})$.

易通过求解在笛氏标架下对应的矩阵方程加以证明(略). 该命题表明给出 $\mathbf{s}$ 和 $\tilde{\Sigma}^e$ 就可以得到 $\mathbf{T}$, 反过来易见, 给出 $\mathbf{T}$ 和 $\tilde{\Sigma}^e$ (从而得到 $\mathbf{E}, \mathbf{U}$), 由 (3.2) 即得到 $\mathbf{s}$, 因此对超弹性体选择 $\mathbf{T}$ 或 $\mathbf{s}$ 作为变量是完全等价的. 下面再讨论 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{U}$ 的关系, 有

命题 3.3: 给定对称正定的 $\mathbf{U}$, 且满足对应的 Riemann-Christoffel 张量等于 0:

$$K_{PQ,N}^M(\mathbf{U}) = \Gamma_{PQ,N}^M - \Gamma_{PN,Q}^M + \Gamma_{PQ}^L \Gamma_{LN}^M - \Gamma_{PN}^L \Gamma_{LQ}^M = 0 \quad (3.3)$$

其中

$$\Gamma_{PQ}^M = \frac{1}{2} g^{MK} (c_{KP,Q} + c_{KQ,P} - c_{PQ,K}) \quad (3.4)$$

是第二类 Christoffel 符号, 则决定变形梯度 $\mathbf{F}$ 至只差一整体刚性转动.

关于该命题前人 (例如 E. 和 F. Cosserat) 已有类似叙述^[15], 注意到 (3.3) 是 $\mathbf{F}$ 所满足的微分方程

$$\frac{\partial F_A^i}{\partial x^M} = \Gamma_{AM}^N F_N^i \quad (3.5)$$

的可积条件 (这里 x^M 取笛氏坐标), 引用微分方程组解的存在唯一性定理即得到证明. 解是依赖于初值

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\mathbf{F}} \quad (3.6)$$

的. 但 $\mathbf{U}$ 已知, $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$, 实际上只要指定

$$\mathbf{R}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\mathbf{R}} \quad (3.7)$$

对应于两组初值 $\hat{\mathbf{R}}_1$ 和 $\hat{\mathbf{R}}_2$ 的解之间仅差 $\mathbf{R}_{12} = \hat{\mathbf{R}}_2^* \cdot \hat{\mathbf{R}}_1$, 这是一个整体刚性转动. 因此, 只要 $\mathbf{U}$ 满足 (3.3) 我们就可以借助参数 $\hat{\mathbf{R}}$ 通过 (3.5) 表出 $\mathbf{F}$. 对超弹性体, $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{s}$ 是 1-1 对应的, 对 $\mathbf{U}$ 的限制 (3.3) 相应地对 $\mathbf{s}$ 也施加了限制

$$\mathbf{K}[\mathbf{U}(\mathbf{s})] = \mathbf{K}(\mathbf{s}) = 0 \quad (3.8)$$

一旦该条件满足, 就可以用 $\mathbf{s}$ 表出 $\mathbf{F}$ 且在给定初值 $\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\mathbf{u}}$ 条件下表出 $\mathbf{u}$. 而 $\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{u}}$ 与 $\mathbf{x}$ 无关, 不参与变分, 它反映了参考系的选法. 实际上如果原来问题的提法是适定的, 则 $\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{u}}$ 已完全由定解条件所决定, 求解中只起中间参数的作用.

四、仅以应力场为独立变量的余能原理

由上看到如果取 $\mathbf{T}$ 为基本未知量, 以 $\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{u}}$ 为参数, 由命题 3.1 可以得到 $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{T})$, 由命题 3.3 可以决定 $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{T})$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{T})$, 于是可以回避直接反解应力张量和变形梯度关系 $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{F})$ 的困难, 仅用应力场 $\mathbf{T}$ 表出余能泛函, 得到

定理 4.1: 在满足

$$(i) \mathbf{K}(\mathbf{T}) = 0 \quad \text{在 } V \text{ 中} \quad (4.1)$$

$$(ii) \mathbf{F}(\mathbf{T}) \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = \dot{\mathbf{T}}_N \quad \text{在 } A_t \text{ 中} \quad (4.2)$$

的许可应力中, $\mathbf{T}$ 是真实应力场的充分必要条件是它使泛函

$$\begin{aligned} \Pi_4(\mathbf{T}) = & \int_V \{ \Sigma^c(\mathbf{T}) - \mathbf{T} : \mathbf{E} \} dV + \oint_A \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} dA \\ & - \int_{A_u} \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} dA \end{aligned} \quad (4.3)$$

取驻值. 其中 $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{u}$ 是在初值 $\dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{u}}$ 下通过

$$\mathbf{E} = \frac{d\Sigma^c}{d\mathbf{T}} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{F} = 2\mathbf{E} + \mathbf{I} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{u}\nabla \quad (4.6)$$

给出的 $\mathbf{T}$ 的函数.

证明: (4.1) 在条件 (4.4) 下等价于 (4.5) 和 (4.6), 故为消去约束条件讨论泛函

$$\begin{aligned} \Pi_4^* = & \int_V \{ \Sigma^c(\mathbf{T}) - \mathbf{T} : \mathbf{E} + \alpha : (\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{F} - 2\mathbf{E} - \mathbf{I}) + \beta : (\mathbf{F} - \mathbf{I} - \mathbf{u}\nabla) \} dV \\ & + \oint_A \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} dA - \int_{A_u} \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} dA + \\ & \int_{A_t} \xi \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} - \dot{\mathbf{T}}_N) dA \end{aligned} \quad (4.7)$$

由变分理论知泛函 Π_4 在条件 (4.1), (4.2) 下取驻值的问题等价于无条件泛函 Π_4^* 取驻值的问题(这里已假设 Σ^c 的定义域是可以延拓的). 在后一情况中 $\mathbf{T}, \mathbf{u}, \mathbf{F}, \alpha, \beta$ 和 ξ 都已是独立变量, $\mathbf{E} = \frac{d\Sigma^c}{d\mathbf{T}}$.

$$\begin{aligned} \delta \Pi_4^* = & \int_V \{ -(\mathbf{T} + 2\alpha) : \dot{\mathbf{E}} + (2\mathbf{F} \cdot \alpha + \beta) : \dot{\mathbf{F}} + (\beta \cdot \nabla) \cdot \dot{\mathbf{u}} \\ & + (\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{F} - 2\mathbf{E} - \mathbf{I}) : \dot{\alpha} + (\mathbf{F} - \mathbf{I} - \mathbf{u}\nabla) : \dot{\beta} \} dV \\ & + \int_{A_u} (\mathbf{u} - \dot{\mathbf{u}}) \cdot \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} dA + \int_{A_t} \xi \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} - \dot{\mathbf{T}}_N) dA \\ & + \oint_A \dot{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} - \beta \cdot \mathbf{N}) dA + \int_{A_t} (\mathbf{u} + \xi) \cdot \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} dA \end{aligned} \quad (4.8)$$

于是 $\delta \Pi_4^* = 0 \iff$

$$\mathbf{T} + 2\alpha = \mathbf{0} \quad \text{在 } V \text{ 中} \quad (4.9)$$

$$2\mathbf{F} \cdot \alpha + \beta = \mathbf{0} \quad \text{在 } V \text{ 中} \quad (4.10)$$

$$\beta \cdot \nabla = \mathbf{0} \quad \text{在 } V \text{ 中} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{F} - 2\mathbf{E} - \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad \text{在 } V \text{ 中} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{F} - \mathbf{I} - \mathbf{u}\nabla = \mathbf{0} \quad \text{在 } V \text{ 中} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{u}} \quad \text{在 } A_u \text{ 上} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = \dot{\mathbf{T}}_N \quad \text{在 } A_t \text{ 上} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{u} + \xi = \mathbf{0} \quad \text{在 } A_t \text{ 上} \quad (4.16)$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = \beta \cdot \mathbf{N} \quad \text{在 } A \text{ 上} \quad (4.17)$$

但由 (4.9) 得 $\alpha = -\frac{1}{2}T$ 代入 (4.10) 得 $\beta = F \cdot T$, 再代入 (4.11) 得到

$$(F \cdot T) \cdot \nabla = 0 \quad \text{在 } V \text{ 中} \quad (4.18)$$

而 (4.12)–(4.15) 加上 (4.4) 和 (4.18) 构成 T, F, u, E 为问题的解的全部关系式. 所以 $\delta \Pi_4^* = 0 \Leftrightarrow T$ (从而 F, E, u) 是真实解. 证毕.

如果取 s 为基本未知量, 又有

定理 4.2: 在满足

$$(i) \quad K(s) = 0 \quad \text{在 } V \text{ 中} \quad (4.19)$$

$$(ii) \quad F(s) \cdot T(s) \cdot N = \hat{T}_N \quad \text{在 } A_t \text{ 上} \quad (4.20)$$

的许可应力中, s 为真实应力场的充分必要条件是它使泛函

$$\begin{aligned} \Pi_4(s) = & \int_V \{ \tilde{\Sigma}^c(s) - s : U \} dV + \oint_A u \cdot F \cdot T \cdot N dA \\ & - \int_{A_s} \hat{u} \cdot F \cdot T \cdot N dA \end{aligned} \quad (4.21)$$

取驻值. 其中 U, F, u, T 是在初值 $\hat{R}, \hat{u}$ 下通过

$$U = \frac{d \tilde{\Sigma}^c}{ds} \quad (4.22)$$

$$(T \cdot U + U \cdot T) = 2s \quad (4.23)$$

$$U^2 = F^* \cdot F \quad (4.24)$$

$$F = I + u \nabla \quad (4.25)$$

给出的 s 的函数. (证明同上, 略)

这是两个仅以应力场为独立变量的余能原理. 当然为保证仅用应力场表出泛函, 已加上 (4.1) 或 (4.9) 的要求, 而且具体求解 u, F 是不容易的, 应用时会遇到一些困难, 但是至少已在理论上回答了在非线性弹性理论中仅以应力场为独立变量的纯粹的余能原理同样是存在的.

对超弹性体, 应力和应变是 1-1 对应的, 我们也可以给出仅以应变场为变量的变分原理, 例如取 U 为基本未知量有

定理 4.3: 在满足

$$(i) \quad K(U) = 0 \quad \text{在 } V \text{ 中} \quad (4.26)$$

$$(ii) \quad F(U) \cdot T(U) \cdot N = \hat{T}_N \quad \text{在 } A_t \text{ 上} \quad (4.27)$$

的许可的对称正定的应变场中, U 是真实应变场的充分必要条件是它使泛函

$$\Pi_5(U) = \int_V \Sigma(U) dV - \oint_A u \cdot F \cdot T \cdot N dA + \int_{A_u} \hat{u} \cdot F \cdot T \cdot N dA \quad (4.28)$$

取驻值, 其中 T, F, u 是在初值 $\hat{R}, \hat{u}$ 下通过

$$T \cdot U + U \cdot T = 2 \frac{d \Sigma}{dU} \quad (4.29)$$

$$F^* \cdot F = U^2 \quad (4.30)$$

$$F = I + u \nabla \quad (4.31)$$

给出的 U 的函数. (证明同上, 略)

五、与线性理论的余能原理的比较

定理 4.1, 4.2 与线性理论的余能原理还有所不同,前者以协调条件为约束条件,以力平衡方程 (4.18) 为变分所得的 Euler 方程;后者则以力平衡方程为约束条件,由变分得到几何关系(从而满足协调条件).我们提出线性理论中也应有类似于定理 4.1 的结果:

定理 5.1: 在满足

$$(i) \text{ 应力线性协调方程 } \epsilon: [\nabla \tilde{\mathbf{E}}(\tilde{\mathbf{T}}) \nabla]: \epsilon = 0, \text{ 在 } V \text{ 中,} \quad (5.1)$$

$$(ii) \text{ 应力边条件 } \tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{N} = \tilde{\mathbf{T}}_N \quad \text{在 } A_i \text{ 上,} \quad (5.2)$$

的许可应力中, $\tilde{\mathbf{T}}$ 是真实应力的充分必要条件是它使泛函

$$\Pi_{s1}(\tilde{\mathbf{T}}) = \int_V -\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}}(\tilde{\mathbf{T}}): \tilde{\mathbf{f}} dV + \oint \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{N} dA - \int_{A_v} \hat{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{N} dA \quad (5.3)$$

取驻值. 其中小变形应变张量 $\tilde{\mathbf{E}}$ 和应力张量 $\tilde{\mathbf{T}}$ 有线性本构关系:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \alpha: \tilde{\mathbf{T}} \quad (5.4)$$

α 是具有一定对称性(例如在笛氏坐标下 $\alpha_{ijkl} = \alpha_{klij} = \alpha_{jikl} = \alpha_{ijlk}$) 的四阶张量. (5.4) 的特例是广义虎克定律. $\mathbf{u}$ 是在初值 $\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{u}}$ 下由

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u}) \quad (5.5)$$

给出的 $\mathbf{E}$ 的函数. (证明同上,略)

两种余能原理各有所长,定理 5.1 虽繁一点,但仍有一定的特色. 因为在经典的余能原理中许可应力是依赖于外载荷的,只是静力上许可,它甚至可能无对应的位移场. 而定理 5.1 中的许可应力则总存在对应的位移场. 它更接近于真实情况,而且它与外载荷(体力)无关,如果采用下面的 Π_{s1} 等形式还与边条件也无关,这样就有可能建立一族仅依赖于材料的许可应力函数,以适应于近似求解各类不同的问题. 当然对线性理论说来,引进定理 5.1 的必要性可能不是很大的,可是对非线性理论,因经典的余能原理不能简单地加以推广,要得到纯粹的余能原理,只能采取定理 4.1, 4.2 的形式了.

六、广义变分原理

上面给出的定理都是有条件的,应用上有时未必方便,按照 [13]、[14] 和 [16] 的方法,采用 Lagrange 乘子法,可以把一般的有条件的变分化成无条件的变分, Lagrange 乘子的物理意义可以通过求变分的过程求得. 在非线性理论中,虽然 $\mathbf{T}, \mathbf{s}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 都被称为应力场,但它们的物理意义已很不相同,而且我们的目的是要把采用 $\mathbf{T}$ 的 Reissner 原理和采用 $\boldsymbol{\tau}$ 的 Levinson 原理、Fraijis de Veubeke 原理等等都统一起来,所以乐于把它们看作彼此独立的量,而将各变量之间的关系也看作一种约束条件,于是从泛函 Π_{s1} 通过推导(过程略)可得到

定理 6.1: 应力场 $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{T}$ (对称), 变形梯度场 $\mathbf{F}$ 和位移场 $\mathbf{u}$ 是问题的真实解的充分必要条件是它们使泛函

$$\Pi_{s1} = \int_V \left\{ \Sigma^e(\mathbf{T}) + (\mathbf{F} - \mathbf{I} - \mathbf{u} \nabla): \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{2} \mathbf{T}: (\mathbf{I} - \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{F}) \right\} dV$$

$$+ \int_{A_t} \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{T}}_N dA + \int_{A_u} (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{N} dA \quad (6.1)$$

取驻值. (这里已不附其它约束条件, 下同)

$$\begin{aligned} \text{证明: } \delta \Pi_{61} = & \int_V \left\{ \left(\frac{d\sum^c}{dT} + \frac{1}{2} \mathbf{I} - \frac{1}{2} \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{F} \right) : \dot{\mathbf{T}} + (\mathbf{F} - \mathbf{I} - \mathbf{u} \nabla) : \dot{\mathbf{z}} \right. \\ & + (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}) : \dot{\mathbf{F}} + (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \cdot \dot{\mathbf{u}} \left. \right\} dV + \int_{A_t} \dot{\mathbf{u}} \cdot (\dot{\mathbf{T}}_N - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{N}) dA \\ & + \int_{A_u} (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \dot{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{N} dA, \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\delta \Pi_{61} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$2 \frac{d\sum^c}{dT} + \mathbf{I} = \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{F} \quad \text{在 } V \text{ 中} \quad (6.3)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{u} \nabla \quad \text{在 } V \text{ 中} \quad (6.4)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{T} \quad \text{在 } V \text{ 中} \quad (6.5)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla = \mathbf{0} \quad \text{在 } V \text{ 中} \quad (6.6)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{N} = \dot{\mathbf{T}}_N \quad \text{在 } A_t \text{ 上} \quad (6.7)$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{在 } A_u \text{ 上} \quad (6.8)$$

而 (6.3)–(6.8) 正是 $\boldsymbol{\tau}$ 、 $\mathbf{T}$ 、 $\mathbf{F}$ 、 $\mathbf{u}$ 是问题的解所应满足的全部关系式. 证毕.

从泛函 Π_{42} 或 Π_{43} 出发又可得到

定理 6.2: 应力场 $\boldsymbol{\tau}$ 、 $\mathbf{s}$ (对称)、 $\mathbf{T}$ (对称), 变形梯度场 $\mathbf{F}$, 应变场 $\mathbf{u}$ (对称) 和位移场 $\mathbf{u}$ 是问题的解的充分必要条件是它们使泛函

$$\begin{aligned} \Pi_{62} = & \int_V \left\{ \sum^c(\mathbf{s}) - \mathbf{U} : \mathbf{s} + (\mathbf{F} - \mathbf{I} - \mathbf{u} \nabla) : \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{2} \mathbf{T} : (\mathbf{U}^2 - \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{F}) \right\} dV \\ & + \int_{A_t} \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{T}}_N dA + \int_{A_u} (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{N} dA \end{aligned} \quad (6.9)$$

取驻值.

定理 6.3: 应力场 $\boldsymbol{\tau}$ 、 $\mathbf{T}$ (对称), 变形梯度场 $\mathbf{F}$, 应变场 $\mathbf{U}$ (对称) 和位移场 $\mathbf{u}$ 是问题的解的充分必要条件是它们使泛函

$$\begin{aligned} \Pi_{63} = & \int_V \left\{ \sum(\mathbf{U}) - (\mathbf{F} - \mathbf{I} - \mathbf{u} \nabla) : \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{2} \mathbf{T} : (\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{F} - \mathbf{U}^2) \right\} dV \\ & - \int_{A_t} \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{T}}_N dA - \int_{A_u} (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{N} dA \end{aligned} \quad (6.10)$$

取驻值. (证明同上, 略)

如果仅将应力边条件通过 Lagrange 乘子加进泛函之中, 我们得到介于 Π_{41} , Π_{42} , Π_{43} 和 Π_{61} , Π_{62} , Π_{63} 之间的三个泛函:

$$\begin{aligned} \Pi_{64}(\mathbf{T}) = & \int_V \{ \sum^c(\mathbf{T}) - \mathbf{T} : \mathbf{E} \} dV + \int_{A_u} (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \\ & \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} dA + \int_{A_t} \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{T}}_N dA, \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\Pi_{65}(\mathbf{s}) = \int_V \{ \sum^c(\mathbf{s}) - \mathbf{s} : \mathbf{U} \} d\mathbf{U} + \int_{A_u} (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$$

$$\cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} dA + \int_{A_t} \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{T}}_N dA, \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{66}(\mathbf{U}) = & \int_V \Sigma(\mathbf{U}) dV - \int_{A_u} (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{T} \\ & \cdot \mathbf{N} dA - \int_{A_t} \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{T}}_N dA, \end{aligned} \quad (6.13)$$

其中 $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{u}$ 是在初值 $\mathbf{R}(\hat{\mathbf{x}}) = \dot{\mathbf{R}}, \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\mathbf{u}}$ 下由微分方程求得的. 这是仅以 $\mathbf{T}$ (或 $\mathbf{s}$, 或 $\mathbf{U}$) 为独立变量的泛函, 许可应力 (或应变) 不再受边条件的限制, 它们应用起来可能会比 Π_{41} 、 Π_{42} 和 Π_{43} 方便.

七、各变分原理的关系

1) 易用 Lagrange 乘子法验证广义 Fraijs de Veubeke 原理和广义 Reissner 原理分别是 Π_{62} 和 Π_{61} 的“不完全变分原理”.

2) 从 Π_{61} (或 Π_{41}) 以第二余能代第一余能即令

$$\Sigma^c(\mathbf{T}) - \mathbf{T} : \mathbf{E} = \tilde{\Sigma}^c(\mathbf{s}) - \mathbf{U} : \mathbf{s} \quad (7.1)$$

可得到 Π_{62} (或 Π_{42}), 反之亦然. 基于命题 3.2, 这样做总是可行的合理的. 同时, 基于命题 3.1, 还可以在 Π_{61} (或 Π_{41}) 中以势能密度 Σ 代 Σ^c 经整理得到 Π_{63} (或 Π_{43}). 因此我们有三种等价的泛函形式, Π_{61} 、 Π_{62} 和 Π_{63} (或 Π_{41} 、 Π_{42} 和 Π_{43}) 分别是同一变分原理的第一余能形式、第二余能形式和势能形式, 由命题 3.1 和 3.2 保证了它们的等价性. 从势能形式到余能形式的变换, 实质上是 Legendre 变换.

广义 Reissner 原理 (文献 [13] 中 $\Pi^*(\mathbf{u}, \mathbf{T})$) 的第二余能形式和势能形式是

$$\begin{aligned} \Pi_{71}(\mathbf{u}, \mathbf{s}) = & \int_V \left\{ \tilde{\Sigma}^c(\mathbf{s}) - \mathbf{U} : \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{T} : [\mathbf{U}^2 - (\mathbf{I} + \mathbf{u}\nabla) \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{u}\nabla)] \right\} dV \\ & + \int_{A_t} \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{T}}_N dA + \int_{A_u} (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{u}\nabla) \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} dA \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{72}(\mathbf{u}, \mathbf{E}) = & \int_V \left\{ \Sigma(\mathbf{E}) - \mathbf{E} : \mathbf{T} + \frac{1}{2} \mathbf{T} : [\mathbf{u}\nabla + \nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{u}\nabla)] \right\} dV \\ & - \int_{A_t} \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{T}}_N dA - \int_{A_u} (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{u}\nabla) \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} dA \end{aligned} \quad (7.3)$$

前者是关于 $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{s}$ 的泛函 ($\mathbf{U}$ 、 $\mathbf{T}$ 由 $\mathbf{U} = \frac{d\tilde{\Sigma}^c}{d\mathbf{s}}$, $\mathbf{U} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{U} = 2\mathbf{s}$ 给出), 后者即 [13]

中 (7.6) 式给出的系统广义总势能 $\Pi^*(\mathbf{u}, \mathbf{T})$. 广义 Fraijs de Veubeke 原理 $\Pi_2^*(\mathbf{u}, \mathbf{R}, \mathbf{r})$ 的第一余能形式和势能形式是

$$\begin{aligned} \Pi_{73}(\mathbf{u}, \mathbf{R}, \mathbf{T}) = & \int_V \{ \Sigma^c(\mathbf{T}) + \mathbf{T} : (\mathbf{E} + \mathbf{I}) - (\mathbf{I} + \mathbf{u}\nabla) : (\mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{T}) \} dV \\ & + \int_{A_t} \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{T}}_N dA + \int_{A_u} (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} dA \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{74}(\mathbf{u}, \mathbf{R}, \mathbf{U}) = & \int_V \{ \Sigma(\mathbf{U}) - \mathbf{T} : \mathbf{U}^2 + (\mathbf{I} + \mathbf{u}\nabla) : (\mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{T}) \} dV \\ & - \int_{A_t} \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{T}}_N dA - \int_{A_u} (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} dA \end{aligned} \quad (7.5)$$

而 Fraeijns de Veubeke 原理 Π_5^* 的第一余能和势能形式是

$$\begin{aligned} \Pi_5(\mathbf{R}, \mathbf{T}) = & \int_V \{ \Sigma^c(\mathbf{T}) + (\mathbf{E} + \mathbf{I}) : \mathbf{T} - \mathbf{I} : (\mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{T}) \} dV \\ & - \int_{A_u} \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} dA \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} \Pi_6(\mathbf{R}, \mathbf{U}) = & \int_V \{ \Sigma(\mathbf{U}) - \mathbf{T} : \mathbf{U}^2 + \mathbf{I} : (\mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{T}) \} dV \\ & + \int_{A_u} \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} dA \end{aligned} \quad (7.7)$$

后者是关于 $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{U}$ 即 $\mathbf{F}$ 的泛函, 它与文 [17] 中提出的所谓“以变形梯度为独立变量的余能形式的变分原理”只差一个负号. 至于 Reissner 原理 (文 [13] 中 Π^c) 的第二余能和势能形式是

$$\begin{aligned} \Pi_7(\mathbf{u}, \mathbf{s}) = & \int_V \left\{ \Sigma^c(\mathbf{s}) + \mathbf{T} : \mathbf{E} - \mathbf{U} : \mathbf{s} + \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{u} \nabla)] : \mathbf{T} \right\} dV \\ & - \int_{A_u} \dot{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{u} \nabla) \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} dA \end{aligned} \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned} \Pi_8(\mathbf{u}, \mathbf{E}) = & \int_V \left\{ \Sigma(\mathbf{E}) - \mathbf{T} : \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{T} : [(\nabla \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{u} \nabla)] \right\} dV \\ & + \int_{A_u} \dot{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{u} \nabla) \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} dA \end{aligned} \quad (7.9)$$

后者即文 [13] 中 (6.10) 式. 由于将三种等价形式看作同一变分原理, 这在导出关系图时将大为简化, 使各原理之间的关系更加明朗. 当然势能形式可取 $\mathbf{E}$ 或 $\mathbf{U}$ 或其它应变张量 (它们之间有等价定理^[13]) 作为变量, 第二余能形式也可以如同 Fraeijns de Veubeke 原理那样用 $(\mathbf{R}, \boldsymbol{\tau})$ 代替 $(\mathbf{R}, \mathbf{s})$, 这已是无关大局的了.

值得指出, 在 Π_{61} 中出现四组变量, 而在 Π_{62} 和 Π_{63} 中分别出现六组和五组变量, 当我们为了整理各原理的关系而把它们看作等价形式时, 我们都把它们看成四变量的, 因为由命题 3.1, 3.2, $\mathbf{T}$ 、 $\mathbf{s}$ 、 $\mathbf{U}$ 三组变量之中, 只要取出一组, 其它两组就可以完全确定为它的函数, 例如这时定理 6.2 的独立变量后取 $\boldsymbol{\tau}$ 、 $\mathbf{s}$ 、 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{u}$. 但是从另一观点看, 若定理 6.2 的六组变量都看成彼此独立的, 那么变量间的全部关系均可由变分的 Euler 方程给出, 所以又可以把它看作关于六组变量的更一般的变分原理. 在 Π_{71} 、 Π_{72} 以及后者的 Π_{73} 、 Π_{710} 、 Π_{712} 和 Π_{713} 中也有类似情况, 它们可比各自的等价形式多一组或两组变量, 这与线性理论中的情况相类似.

文献 [16] 曾提到线性理论中尚未见反映余应变能形式的应力应变关系、连续条件和平衡条件的变分原理. 在非线性理论中, 本文提出的 $\Pi_{71}(\mathbf{u}, \mathbf{s}, \mathbf{U})$ 和 $\Pi_7(\mathbf{u}, \mathbf{s}, \mathbf{U})$ 可能是这种类型的原理, 它们分别对应于 [16] 中表 6.1 之 11 和 6. 只是一旦线性化, 它们又退化为第一余能形式即通常的 Hellinger-Reissner 原理了.

3) 关系图

从 Π_{61} 、 Π_{62} 和 Π_{63} 出发把 $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$, $\mathbf{R}^* \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I}$ 当作附加条件, 可以得到

$$\Pi_9(\mathbf{R}, \mathbf{T}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) = \int_V \{ \Sigma^c(\mathbf{T}) + (\mathbf{R} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{I} - \mathbf{u} \nabla) : \boldsymbol{\tau} - \mathbf{T} : \mathbf{E} \} dV$$

$$+ \int_{A_t} \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{T}}_N dA + \int_{A_u} (\mathbf{u} - \dot{\mathbf{u}}) \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{N} dA \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{710}(\mathbf{R}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) = & \int_V \{ \dot{\Sigma}^c(\mathbf{s}) + (\mathbf{R} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{I} - \mathbf{u} \nabla) : \boldsymbol{\tau} - \mathbf{s} : \mathbf{U} \} dV \\ & + \int_{A_t} \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{T}}_N dA + \int_{A_u} (\mathbf{u} - \dot{\mathbf{u}}) \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{N} dA \end{aligned} \quad (7.11)$$

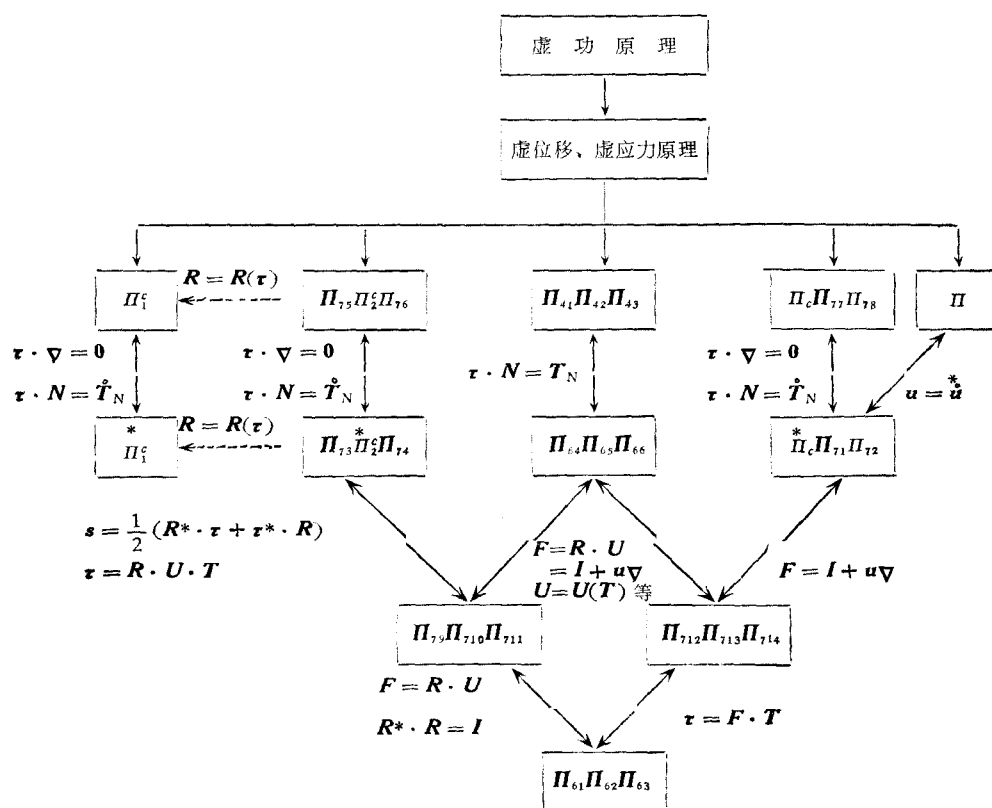
$$\begin{aligned} \Pi_{711}(\mathbf{R}, \mathbf{U}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) = & \int_V \{ \dot{\Sigma}(\mathbf{U}) - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{I} - \mathbf{u} \nabla) : \boldsymbol{\tau} \} dV \\ & - \int_{A_t} \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{T}}_N dA - \int_{A_u} (\mathbf{u} - \dot{\mathbf{u}}) \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{N} dA \end{aligned} \quad (7.12)$$

然后再令 $\mathbf{s} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\tau}^* \cdot \mathbf{R} + \mathbf{R}^* \cdot \boldsymbol{\tau})$, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{T}$ 即得到 Π_{73} 、 Π_2^* 和 Π_{74} . 同样从 Π_{61}

等出发仅把 $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ 作为附加条件得到

$$\begin{aligned} \Pi_{712}(\mathbf{T}, \mathbf{F}, \mathbf{u}) = & \int_V \left\{ \dot{\Sigma}^c(\mathbf{T}) - \frac{1}{2} \mathbf{T} : (\mathbf{I} + \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{F}) - (\mathbf{I} + \mathbf{u} \nabla) : (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}) \right\} dV \\ & + \int_{A_t} \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{T}}_N dA + \int_{A_u} (\mathbf{u} - \dot{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} dA, \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$\Pi_{713}(\mathbf{s}, \mathbf{F}, \mathbf{u}) = \int_V \left\{ \dot{\Sigma}^c(\mathbf{s}) + \frac{1}{2} \mathbf{T} : (\mathbf{U}^2 + \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{F}) - (\mathbf{I} + \mathbf{u} \nabla) : (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}) - \mathbf{U} : \mathbf{s} \right\} dV$$



$$+ \int_{A_t} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{T}}_N dA + \int_{A_u} (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} dA \quad (7.14)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{714}(\mathbf{U}, \mathbf{F}, \mathbf{u}) = & \int_V \left\{ \Sigma(\mathbf{U}) - \frac{1}{2} \mathbf{T} : (\mathbf{U}^2 + \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{F}) + (\mathbf{I} + \mathbf{u} \nabla) : (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}) \right\} dV \\ & - \int_{A_t} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{T}}_N dA - \int_{A_u} (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} dA. \end{aligned} \quad (7.15)$$

它们介于 Π_{61} 等和 Π^* 等之间 (或 Π_{61} 等和 Π_{64} 等之间), 当然还可以类似地找出种种介于中间状态的不完全变分原理并给予严格证明, 为简短计不一一列出了. 而 Π_{64} 等还可以看作从 Π_{79} 等出发加上相应的约束条件而获得的. 至于 Levinson 原理 Π_1^* (或广义 Levinson 原理 Π_1^*) 则可以看作是在假设 $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\tau})$ 即 $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\boldsymbol{\tau})$ 的条件下从 Fraijs de Veubeke 原理 (或广义 Fraijs de Veubeke 原理) 得到之特例.

于是可以给出上下端封闭的关系图 (以所用泛函代表对应的原理, 旁边标注的是过渡条件, 以 Π 表示的是本文新提出来的):

本文是在郭仲衡教授具体指导帮助下写成, 并且得到戴天民、肖树铁、章学诚、武际可等老师的关心和帮助, 在此谨表示衷心感谢.

参 考 文 献

- [1] Reissner, E., *J. Math. Phys.*, **32** (1953), 129—135.
- [2] Truesdell, C., Noll, W., *Non-linear Field Theories of Mechanics*, Handbuch der Physik Bd. III/3, Springer (1965).
- [3] Nemat-Nasser, S., *General Variational Principles in Nonlinear and Linear Elasticity with Applications*, Mechanics Today vol. 1, Pergamon (1972).
- [4] Washizu, K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, ed. II, Oxford (1975).
- [5] Levinson, M., *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.*, **87** (1965), 826—828.
- [6] Zubov, L. M., *Prikl. Mat. Meh.*, **34** (1970), 228—232.
- [7] Koiter, W. T., *SIAM, J. Appl. Math.*, **25** (1973), 424—434.
- [8] Koiter, W. T., *On the Complementary Energy Theorem in Nonlinear Elasticity Theory*, Trends in Appl. of pure Math. to Mech., ed. G. Fichera, Pitman, 1976.
- [9] Fraeij de Veubeke, B., *Int. J. Engng. Sci.*, **10** (1972), 745—763.
- [10] Ogden, R. W., *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **81** (1977), 313—324.
- [11] Ogden, R. W., *Int. J. Solids Struct.*, **14** (1978), 265—282.
- [12] Novozhilov, V. V., *Theory of Elasticity*, Pergamon, 1961.
- [13] 郭仲衡, 非线性弹性理论, 科学出版社 (1980).
- [14] 钱伟长, 变分法及有限元, 科学出版社 (1980).
- [15] Shield, R. T., *SIAM, J. Appl. Math.*, **25** (1973), 483—491.
- [16] 胡海昌, 弹性力学的变分原理及其应用, 科学出版社 (1981).
- [17] Lee, S. J., Shield, R. T., *ZAMP*, **31** (1980), 437—453, 454—471.

ON THE VARIATIONAL PRINCIPLES IN NONLINEAR THEORY OF ELASTICITY

Liang Haoyun

(Zhongshan University)

Abstract

In this paper principles of complementary energy are proposed to show that such pure principles of complementary energy which permit only the stress tensor to vary as the independent quantities exist in the nonlinear theory of elasticity as well as in linear theory. Principles taking strain tensor as the quantities subject to variation are also proposed. Then they are compared with the classical principle of complementary energy. Generalized principles connected with them are derived. Finally it is proposed that each principle has three equivalent forms to regulate the relation of all principles and it is shown that all principles not only may be derived from a single principle of virtual work, but also may be viewed as various gradational incomplete principles of the same generalized principle. a diagram which is closed above and below is given to illustrate the interrelationship.