第16卷 第4期　　力 学 学 报　　Vol. 16, No. 4
1984 年 7 月　　ACTA MECHANICA SINICA　　July, 1984

沿纵向弯曲壁面湍流边界层的大涡模拟

苏铭德　　R. Friedrich
（清华大学）　　（慕尼黑工业大学）

提要　本文采用大涡模型，对统计定常二维的纵向弯曲壁面湍流边界层作数值模拟实验．网格选用 $64\times32\times32$，泊松方程求解用快速半直接法，计算结果和 Gillis 的实验作了比较，符合情况良好．

一、引　言

由于大型高速计算机的发展，最近十多年来，不少人试图用数值试验方法模拟湍流运动．方法之一是直接求解三维不定常 Navier-Stokes 方程[9]．由于计算机容量和速度以及方法本身的限制，目前主要计算简单边界问题，为大涡模拟提供数据，另一种是大涡模拟法，即用滤波方法把流场物理量分解为大尺度量和小尺度量，用模型建立它们之间的联系，用计算机求解关于大尺度量的方程，从而得到各种流场所需要的量．这一方法首先由 Deandorff[2] 用于渠道和星体边界层的流动，Stanford 大学 Reynolds, Ferziger, Moin[3,8] 等对各种简单流场用该方法进行了大量的数值计算工作，其中以 Moin[8] 的工作最为详细．德国学者 Schumann, Gröfzbach[6,11] 也做了大量的工作，但都只限于二维直渠道的流场分析．

本文采用 Schumann 的假定，把拟雷诺应力分解为局部各向同性和非均匀部份，其中前者采用修正的 Schumann 的小尺度模型，非均匀部份则采用 Bradshaw[4] 模型，用非周期条件，以统计模拟方法给出初始条件，用快速半直接法解泊松方程，对弯曲壁面湍流边界层进行了数值模拟，其结果与 Gillis[5] 实验吻合．

二、出发方程和平均物理量

假定流体不可压缩，满足 Navier-Stokes 方程及连续方程，它们为：

连续方程：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0 \tag{1}$$

Navier-Stokes 方程：

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}\equiv\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla\boldsymbol{V} \tag{2}$$

我们采用白噪音滤波器对各物理量进行滤波，所得的大尺度量就是平均物理量．我们把以后要用到的平均量列出如下：

关于时间间隔 Δt 的平均

本文于 1983 年 1 月 24 日收到．

$$[y] = \frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta t} y\,dt \tag{3}$$

当 $\Delta t \to \infty$ 所得的平均值为雷诺平均值，记作

$$\langle y \rangle = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta t} y\,dt \tag{4}$$

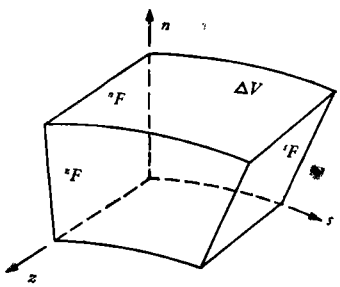

图 1

关于体积元的平均

$$^{\Delta V}\bar{y} = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} y\,dV \tag{5}$$

关于面元的平均记作

$$^{i}\bar{y} = \frac{1}{^{i}F}\int_{^{i}F} y\,d^{i}F \tag{6}$$

其中 ^{i}F 为法向平行于 i 方向的面元（见图 1）

任何一物理量可以表示为平均量与相应脉动量的和，即

$$y = [y] + [y]' = \langle y \rangle + y'' = {}^{\Delta V}\bar{y} + {}^{\Delta V}\bar{y}' = {}^{i}\bar{y} + {}^{i}y' \tag{7}$$

在不致引起误解的场合，一般写 $^{\Delta V}y'$ 和 $^{i}y'$ 为 y'.

在坐标线曲率不大及变化不剧烈时，物理量空间导数的平均可以表示为

$$\overline{\frac{1}{h_i}\frac{\partial y_i}{\partial s_i}}^{\Delta V} \approx \frac{1}{^{\Delta V}\bar{h}}\,\delta_i\,{}^{i}\bar{y} \tag{8}$$

$$\overline{\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial(h_2h_3y)}{\partial s_1}}^{\Delta V} \approx \frac{1}{^{\Delta V}\bar{h}_1\,^{\Delta V}\bar{h}_2\,^{\Delta V}\bar{h}_3}\,\delta_1({}^{1}\bar{y}\,{}^{1}\bar{h}_2\,{}^{1}\bar{h}_3) \tag{9}$$

其中 h 为拉梅系数 $\delta_i y = (y_{s_i+\frac{\Delta s_i}{2}} - y_{s_i-\frac{\Delta s_i}{2}})/\Delta s_i$

由定义可知，脉动量平均值为零，而非线性量平均时出现相关量，如

$$\langle v_i v_j \rangle = \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle + \langle v_i'' v_j'' \rangle$$

$$\overline{v_i v_j}^{\Delta V} = {}^{\Delta V}\bar{v}_i\,{}^{\Delta V}\bar{v}_j + \overline{v_i' v_j'}^{\Delta V}$$

$$\overline{v_i v_j}^{j} = {}^{i}\bar{v}_i\,{}^{i}\bar{v}_j + \overline{v_i' v_j'}^{j}$$

其中 $\langle v_i'' v_j'' \rangle$ 为雷诺应力，$\overline{v_i' v_j'}^{\Delta V}$，$\overline{v_i' v_j'}^{j}$ 分别为 $v_i' v_j'$ 在体积元和面元内的平均，它们是由于速度空间分布不均匀而引起的，称其为拟雷诺应力（或格子雷诺应力）与普通雷诺应力不同，它们是非对称张量.

三、基本方程的空间平均——大涡模拟方程的建立

用上述对空间体积元的平均法作用于连续方程和动力学，则得到平均后的方程. 这里列出自然座标下的平均方程，其中 s 沿壁面纵向，n 为壁面法向，z 为横向，(s, n, z) 构成右手系统.

平均连续方程

$$\frac{1}{^{\Delta V}\bar{h}}\,\delta_s\,{}^{s}\bar{V}_s + \frac{1}{^{\Delta V}\bar{h}}\,\delta_n({}^{n}\bar{h}\,{}^{n}\bar{v}_n) + \delta_z({}^{z}\bar{v}_z) = 0 \tag{10}$$

平均动力学方程

$$
\begin{aligned}
&{}^{V_s}\overline{\frac{\partial v_s}{\partial t}} + \frac{1}{{}^{V_s}\bar{h}}\delta_s({}^{s}\bar{v}_s{}^{s}\bar{v}_s) + \delta_n({}^{n}\bar{v}_s{}^{n}\bar{v}_n) + \delta_z({}^{z}\bar{v}_z{}^{z}\bar{v}_s) + \frac{1}{{}^{V_s}\bar{R}\,{}^{V_s}\bar{h}}\,{}^{V_s}\bar{v}_s{}^{V_s}\bar{v}_n \\
&= -\frac{1}{\rho\,{}^{V_s}\bar{h}}\delta_s{}^{s}\bar{p} + \nu\left\{\frac{2}{{}^{V_s}\bar{h}}\delta_s{}^{s}\overline{\left(\frac{1}{h}\frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{v_n}{hR}\right)}\right. \\
&\quad + \delta_n{}^{n}\overline{\left(\frac{1}{h}\frac{\partial v_n}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial n} + \frac{v_s}{hR}\right)} + \delta_z{}^{z}\overline{\left(\frac{1}{h}\frac{\partial v_z}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial z}\right)} \\
&\quad \left. + \frac{2}{{}^{V_s}\bar{R}\,{}^{V_s}\bar{h}}{}^{V_s}\overline{\left(\frac{1}{h}\frac{\partial v_n}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial n} - \frac{v_s}{hR}\right)}\right\} \\
&\quad - \frac{1}{{}^{V_s}\bar{h}}\delta_s{}^{s}\overline{v'_s v'_s} - \delta_n{}^{n}\overline{v'_s v'_n} - \delta_z{}^{z}\overline{v'_s v'_z} - \frac{2\,{}^{V_s}\overline{v'_s v'_n}}{{}^{V_s}\bar{h}\,{}^{V_s}\bar{R}}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
&{}^{V_n}\overline{\frac{\partial v_n}{\partial t}} + \frac{1}{{}^{V_s}\bar{h}}\delta_s({}^{s}\bar{v}_s\bar{v}_n) + \delta_n({}^{n}\bar{v}_n{}^{n}\bar{v}_n) + \delta_z({}^{z}\bar{v}_n{}^{z}\bar{v}_y) + \frac{{}^{V_n}\bar{v}_n{}^{V_n}\bar{v}_n - {}^{V_n}\bar{v}_s{}^{V_n}\bar{v}_s}{{}^{V_n}\bar{h}\,{}^{V_n}\bar{R}} \\
&= -\frac{1}{\rho}\delta_n{}^{n}\bar{p} + \nu\left\{\frac{1}{{}^{V_n}\bar{h}}\delta_s{}^{s}\overline{\left(\frac{1}{h}\frac{\partial v_n}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial n} - \frac{v_s}{hR}\right)} + 2\delta_n{}^{n}\overline{\frac{\partial v_n}{\partial n}}\right. \\
&\quad \left. + \delta_z{}^{z}\overline{\left(\frac{\partial v_z}{\partial n} + \frac{\partial v_n}{\partial z}\right)} + \frac{2}{{}^{V_n}\bar{h}\,{}^{V_n}\bar{R}}{}^{V_n}\overline{\left(\frac{\partial v_n}{\partial n} - \frac{v_n}{Rh} - \frac{1}{h}\frac{\partial v_s}{\partial s}\right)}\right\} \\
&\quad - \frac{1}{{}^{V_n}\bar{h}}\delta_s{}^{s}\overline{v'_s v'_n} - \delta_n{}^{n}\overline{v'_n v'_n} - \delta_z{}^{z}\overline{v'_n v'_z} - \frac{{}^{V_n}\overline{v'_n v'_n} - {}^{V_n}\overline{v'_s v'_s}}{{}^{V_n}\bar{h}\,{}^{V_n}\bar{R}}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
\begin{aligned}
&{}^{V_z}\overline{\frac{\partial v_z}{\partial t}} + \frac{1}{{}^{V_z}\bar{h}}\delta_s({}^{s}\bar{v}_s{}^{s}\bar{v}_z) + \delta_n({}^{n}\bar{v}_n{}^{n}\bar{v}_z) + \delta_z({}^{z}\bar{v}_z{}^{z}\bar{v}_z) + \frac{{}^{V_z}\bar{v}_z{}^{V_z}\bar{v}_n}{{}^{V_z}\bar{h}\,{}^{V_z}\bar{R}} \\
&= -\frac{1}{\rho}\delta_n{}^{n}\bar{p} + \nu\left\{\frac{1}{{}^{V_z}\bar{h}}\delta_s{}^{s}\overline{\left(\frac{1}{h}\frac{\partial v_z}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial z}\right)} + \delta_n{}^{n}\overline{\left(\frac{\partial v_z}{\partial n} + \frac{\partial v_n}{\partial z}\right)}\right. \\
&\quad \left. + 2\delta_z{}^{z}\overline{\frac{\partial v_z}{\partial z}} + \frac{1}{{}^{V_z}\bar{h}\,{}^{V_z}\bar{R}}{}^{V_z}\overline{\left(\frac{\partial v_n}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial n}\right)}\right\}\frac{1}{{}^{V_z}\bar{h}}\delta_s{}^{s}\overline{v'_s v'_z} - \delta_n{}^{n}\overline{v'_n v'_z} \\
&\quad - \delta_z{}^{z}\overline{v'_z v'_z} - \frac{{}^{V_z}\overline{v'_n v'_z}}{{}^{V_z}\bar{h}\,{}^{V_z}\bar{R}}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

其中 v_s, v_n, v_z 分别表示网格元 V 沿 s, n, z 方向移过 $\frac{1}{2}\Delta s$, $\frac{1}{2}\Delta n$, $\frac{1}{2}\Delta z$ 所得的交错网格元（见图 2）.

记

$$
\bar{y}^i = \left[y\left(x_i - \frac{\Delta x_i}{2}\right) + y\left(x_i + \frac{\Delta x_i}{2}\right)\right] \tag{14}
$$

计及

$$
\delta_i(ab) = \bar{a}^i\delta_i b + \bar{b}^i\delta_i a,\quad {}^{i}\overline{\bar{y}^{i}} \approx {}^{V}\bar{y}^{(i)} \tag{15}
$$

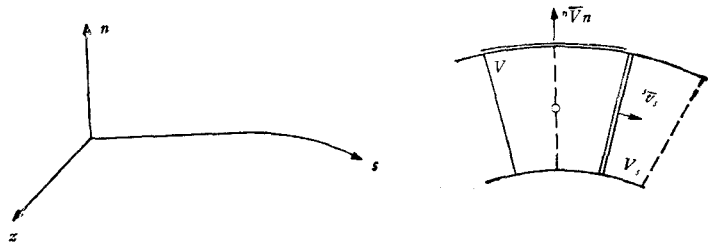

图 2

由上述 (10)—(13) 可导出平均脉动动能方程.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}\quad & \frac{\partial\,{}^V\overline{E'}}{\partial t} = -\frac{1}{{}^V\bar{h}}\delta_s({}^s\bar{v}_s{}^s\bar{E}') - \delta_n({}^n\bar{v}_n{}^n\bar{E}') - \delta_z({}^z\bar{v}_z{}^z\bar{E}') - \frac{1}{{}^V\bar{h}{}^V\bar{R}}({}^V\bar{v}_n{}^V\bar{E}') && \mathrm{II}\\
& -\Big\{{}^s\overline{v'_sv'_s}\frac{1}{{}^V\bar{h}}\delta_s{}^s\bar{v}_s + {}^n\overline{v'_sv'_n}\,\delta_n{}^n\bar{v}_s + {}^z\overline{v'_sv'_z}\,\delta_z{}^z\bar{v}_s \\
& + \frac{1}{{}^V\bar{h}}{}^s\overline{v'_sv'_n}\,\delta_s{}^s\bar{v}_n + {}^n\overline{v'_nv'_n}\,\delta_n{}^n\bar{v}_n + {}^z\overline{v'_nv'_z}\,\delta_z{}^z\bar{v}_n \\
& + \frac{1}{{}^V\bar{h}}{}^s\overline{v'_sv'_z}\,\delta_s{}^s\bar{v}_z + {}^n\overline{v'_nv'_z}\,\delta_n{}^n\bar{v}_z + {}^z\overline{v'_zv'_z}\,\delta_z{}^z\bar{v}_z \\
& - \frac{{}^V\bar{v}_s{}^n\overline{v_sv'_n} - {}^V\bar{v}_n{}^V\overline{v'_sv'_s}}{{}^V\bar{h}{}^V\bar{R}}\Big\} && \mathrm{III}\\
& -\Big\{\frac{1}{{}^V\bar{h}}\delta_s{}^s\overline{v'_sE'} + \delta_n{}^n\overline{v'_nE'} + \delta_z{}^z\overline{v'_zE'} + \frac{1}{{}^V\bar{h}{}^V\bar{R}}{}^V\overline{v'_nE'} \quad (A) \\
& + \frac{1}{\rho{}^V\bar{h}}\delta_s{}^s\overline{v'_sp'} + \frac{1}{\rho{}^V\bar{h}}\delta_n{}^n\overline{v'_np'} + \frac{1}{\rho}\delta_z{}^z\overline{v'_zp'}\Big\} \quad (B) \\
& + \nu\Big\{\frac{1}{{}^V\bar{h}}\delta_s{}^s\overline{\frac{1}{h}\frac{\partial E'}{\partial s}} + \frac{1}{{}^V\bar{h}}\delta_n{}^n\overline{h\frac{\partial E'}{\partial n}} + \delta_z{}^z\overline{\frac{\partial E'}{\partial z}}\Big\} \quad (C) \\
& + \nu\Big\{\frac{1}{{}^V\bar{h}}\delta_s\Big[\frac{1}{h}\frac{\partial\,{}^s\overline{v'_sv'_s}}{\partial s} + \frac{\partial\,{}^s\overline{v'_sv'_n}}{\partial n} + \frac{\partial\,{}^s\overline{v'_sv'_z}}{\partial z} + 2\frac{{}^s\overline{v'_sv'_n}}{{}^s\bar{h}{}^s\bar{R}}\Big]\Big\} \\
& + \frac{1}{{}^V\bar{h}}\delta_n\Big[\frac{\partial\,{}^n\overline{v'_sv'_n}}{\partial s} + {}^n\bar{h}\frac{\partial\,{}^n\overline{v'_nv'_n}}{\partial n} + {}^n\bar{h}\frac{\partial\,{}^n\overline{v'_nv'_z}}{\partial z} \\
& + \frac{{}^n\overline{v'_nv'_n} - {}^n\overline{v'_sv'_s}}{{}^n\bar{R}}\Big] + \delta_z\Big[\frac{1}{{}^z\bar{h}}\frac{\partial\,{}^z\overline{v'_sv'_z}}{\partial s} + \frac{\partial\,{}^z\overline{v'_nv'_z}}{\partial n} \\
& + \frac{\partial\,{}^z\overline{v'_zv'_z}}{\partial z} + \frac{{}^z\overline{v'_nv'_z}}{{}^z\bar{h}{}^z\bar{R}}\Big] \quad (D) && \mathrm{IV}\\
& - {}^V\bar{\varepsilon} && \mathrm{V}\\
& + \nu\Big\{2\Big(\frac{1}{{}^V\bar{h}}\delta_s{}^s\bar{v}_s + \frac{{}^V\bar{v}}{{}^V\bar{h}{}^V\bar{R}}\Big)^2 + 2(\delta_n{}^n\bar{v}_n)^2 + 2(\delta_z{}^z\bar{v}_z)^2 \\
& + \Big(\frac{1}{{}^V\bar{h}}\delta_s{}^s\bar{v}_n + \delta_n{}^n\bar{v}_s - \frac{{}^V\bar{v}_s}{{}^V\bar{h}{}^V\bar{R}}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{{}^V\bar{h}}\delta_s{}^s\bar{v}_z + \delta_z{}^z\bar{v}_s\Big)^2 && \mathrm{VI}
\end{aligned}
$$

$$+ (\delta_n{}^n\bar{v}_z + \delta_z{}^z\bar{v}_n)^2\Big\} \tag{16}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}(\overline{v_s'v_s'} + \overline{v_n'v_n'} + \overline{v_z'v_z'}) \\ \bar{E} &= \frac{1}{2}(\bar{v}_s\bar{v}_s + \bar{v}_n\bar{v}_n + \bar{v}_z\bar{v}_z) \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

各项的物理意义为：

I. 单元体平均脉动动能的时间变化率

II. 脉动动能的对流传输

III. 拟雷诺应力功

IV. 能量扩散项

V. 脉动耗散和平均场耗散的总和

VI. 平均场的耗散

方程(16)是导出的，非独立的，用于计算 E'. 方程(10)—(13)及(16)是要求解的大涡方程. 显然由于二阶速度相关量等的出现，方程不封闭，需要建立模型以确定它们与平均量的关系.

四、湍流模型

为建立关于拟雷诺应力 ${}^i\overline{v_i'v_j'}$ 的模型，需要讨论它的一般性质.

以 s 方向动力学方程为例，首先对它关于体积元平均，再对时间间隔平均，得

$$\left[\frac{\partial^V\bar{v}_s}{\partial t}\right] + \frac{1}{{}^V\bar{h}}\delta_s[{}^s\bar{v}_s][{}^s\bar{v}_s] + \cdots = -\frac{1}{\rho{}^V\bar{h}}\delta_s[{}^s\bar{p}] + \cdots\cdots$$

$$-\frac{1}{{}^V\bar{h}}\delta_s\left[[{}^s\overline{v_s'v_s'}] + [{}^s\bar{v}_s''{}^s\bar{v}_s'']\right] \tag{18}$$

对同一方程，先对它关于时间间隔平均，再关于体积元平均，则得

$$\frac{{}^V\overline{\partial[v_s]}}{\partial t} + \frac{1}{{}^V\bar{h}}\delta_s{}^s\overline{[v_s]}\,{}^s\overline{[v_s]} + \cdots = -\frac{1}{\rho{}^V\bar{h}}\delta_s[{}^s\bar{p}] + \cdots$$

$$-\frac{1}{{}^V\bar{h}}\delta_s\left[{}^s\overline{[v_s''v_s'']} + {}^s\overline{[v_s]'{}^s[v_s]'}\right] + \cdots\cdots \tag{19}$$

其中 ${}^s[y]'$ 表示 y 时均值对 ${}^sF$ 面作平均后，时均值本身和时均值面元平均之间的偏离. 因体积元和时间无关，故

$${}^V\overline{[y]} = [{}^V\bar{y}] \tag{20}$$

比较(18)，(19)式可知

$$[{}^i\overline{v_i'v_j'}] + [{}^i\bar{v}_i''{}^i\bar{v}_j''] = [{}^i\overline{v_i''v_j''}] + {}^i\overline{[v_i]'[v_j]'}$$

在 $\Delta t \to \infty$ 时 $[y] \to \langle y\rangle$，故上式得

$$\langle{}^i\overline{v_i'v_j'}\rangle + \langle{}^i\bar{v}_i''{}^i\bar{v}_j''\rangle = \langle{}^i\overline{v_i''v_j''}\rangle + {}^i\overline{\langle v_i\rangle'\langle v_j\rangle'} \tag{21}$$

由于 $\langle y\rangle$ 在空间的分布是光滑的，故 ${}^{j}\overline{\langle v_i\rangle'\langle v_j\rangle'}$ 应为二阶小量，可以忽略不计，故有

$$\langle {}^{j}\overline{v_i'v_j'}\rangle = \langle {}^{j}\overline{v_i'v_j'}\rangle + \langle {}^{j}\bar{v}_i{}^{j}\bar{v}_j\rangle - \langle {}^{j}\bar{v}_i\rangle\langle {}^{j}\bar{v}_j\rangle \tag{22}$$

这确立了雷诺应力、拟雷诺应力及大尺度量之间的关系．由上式可知：

当 ${}^{j}F \to 0$ 时，$\langle {}^{j}\overline{v_i'v_j'}\rangle \to 0$

当 ${}^{j}F \to \infty$ 时，$\langle {}^{j}\overline{v_i'v_j'}\rangle \to \langle {}^{j}\overline{v_i''v_j''}\rangle$

拟雷诺应力不对称，即 ${}^{j}\overline{v_i'v_j'} \neq {}^{i}\overline{v_j'v_i'}$

小尺度拟雷诺应力模型

根据 Schumann[11] 的建议，拟雷诺应力分成二部份

$$\underbrace{{}^{j}\overline{v_i'v_j'}}_{\text{非均匀部分}} = \underbrace{\langle {}^{j}\overline{v_i'v_j'}\rangle}_{\text{各向同性部份}} + \underbrace{({}^{j}\overline{v_i'v_j'})''}_{} \tag{23}$$

非均匀部份是由于时间统计平均速度不均匀所致，显然它应在壁面附近起主导作用，而离开壁面时作用迅速衰减，而局部各向同性部份在壁面附近为次要作用，而离壁面远处显示其主要作用．

局部各向同性部份为

$$-({}^{j}\overline{v_i'v_j'})'' = {}^{j}\nu''\left(\frac{\partial {}^{j}\bar{v}_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial {}^{j}\bar{v}_j''}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{3}\delta_{ij}{}^{j}\overline{v_l'v_l'} \tag{24}$$

其中 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$，以及

$$v_i'' = v_i - \langle v_i\rangle \tag{25}$$

$${}^{j}\nu = c_2{}^{j}l_\nu({}^{j}\bar{E}')^{\frac{1}{2}} \tag{26}$$

$${}^{j}l_\nu = \min(l_e, ({}^{j}F)^{1/2}) \tag{27}$$

$$l_e = \frac{\alpha}{0.51}\frac{(E'')^{3/2}}{\langle\varepsilon\rangle} \qquad \alpha = 0.4 \tag{28}$$

$$c_2 = \frac{\langle\varepsilon\rangle - \nu\langle(\delta_i{}^{j}\bar{v}_i'' + \delta_j{}^{j}\bar{v}_j'')\delta_j{}^{j}\bar{v}_i''\rangle}{\langle {}^{j}\bar{E}'\rangle^{\frac{1}{2}}l_\nu\langle\overline{(\delta_j{}^{j}\bar{v}_i'' + \delta_i{}^{j}\bar{v}_j'')^2}\,\delta_j{}^{j}\bar{v}_i''\rangle} \tag{29}$$

非均匀部分用 Bradshaw 假定：

$$-\langle {}^{n}\overline{v_s'v_n'}\rangle = \nu^p\left(\frac{\partial\langle v_s\rangle}{\partial n} - \frac{\langle v_s\rangle}{hR}\right) \tag{30}$$

$$\nu^p = L^2\left|\frac{\partial\langle v_s\rangle}{\partial n} - \frac{\langle v_s\rangle}{hR}\right| \tag{31}$$

$$L^2 = \min(l^2, 0.01(h\Delta s\Delta n\Delta z)^{2/3}) \tag{32}$$

$$l = l_1\left(1 - \beta\frac{\langle v_s\rangle/R}{(\partial\langle v_s\rangle/\partial n)_{lf}}\right) \tag{33}$$

$$l_1 = \min\{Kn(1 - \exp(-n^+/A^+), \lambda\delta\} \tag{34}$$

$$(\partial\langle v_s\rangle/m)_{lf} = \max\left\{0.3\frac{v_{s\infty}}{\delta}, \frac{\partial\langle v_s\rangle}{\partial n}\right\} \tag{35}$$

$$\lambda = 0.08,\ n^+ = nu_\tau/\nu,\ A^+ = 26.0$$

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}},\ \beta = \begin{cases} 6, & 凸面 \\ 4, & 凹面 \end{cases} \tag{36}$$

而 $\langle \overline{{}^s v_s' v_n'} \rangle \sim \odot$(因 Δn 比较小)，其他非均匀项均为零．关于其他相关量用如下模型：

(16) 式的 $(A+B)$ 项用 Lilly[7] 假定

$$(A+B) = \frac{1}{{}^V\bar{h}}\delta_s[(\nu + 0.3({}^V\bar{E}')^{1/2s} l_\nu)^s c_5 \delta_5 {}^V\bar{E}'] + \frac{1}{{}^V\bar{h}}\delta_n[(\nu + 0.3({}^V\bar{E}')^{1/2n} l_\nu) \cdot {}^n c_5 \delta_n({}^V\bar{E}'h)] + \delta_z[(\nu + 0.3({}^V\bar{E}')^{1/2z} l_\nu)^z c_5 \delta_z {}^V\bar{E}']$$

其中 ${}^i c_5 = {}^i\bar{E}'/{}^V\bar{E}'$.

$${}^V\bar{\varepsilon} = \frac{c_3({}^V\bar{E}')^{3/2}}{L} + 20.0\frac{\nu {}^V\bar{E}'}{L^2} + 2\nu[\delta_z({}^V\bar{E}')^{1/2}]^2 \tag{37}$$

其中 c_3, c_2, ${}^i c_5$ 计算见文献[11].

将上述模型代入大涡方程，即得关于平均量的封闭方程．需要注意的是必须小心地把各拟雷诺应力分成各向局部同性和非均匀二个部分．并且注意 $\overline{{}^n v_s' v_n'}^n \neq \overline{{}^s v_s' v_n'}^s$．我们还纠正了 Schumann 求解局部各向同性时的 ${}^V\bar{E}'$ 方程的作法，而采用区里的直接解关于 ${}^V\bar{E}'$ 的方程的作法．

五、定解条件及计算方法

为确定 (10)—(13) 及 (16) 式的解，需要附加定解的边界条件及初始条件

边界条件： 壁面速度 ${}^n\bar{v}_n = 0$，${}^z\bar{w}_z$ 在法向为线性分布，壁面给定摩擦速度为 $u_\tau(s)$，在每次计算若干步后修正．

外缘边界为 $v_s = U_E(s)$ 给定，$\left.\frac{\partial(v_n h)}{\partial n}\right|_{外缘} = -\frac{dU_E}{ds}$，并假定 $\frac{\partial v_z}{\partial n} = 0$.

进口给定 $v_s(t)$, $v_n(t)$, $v_z(t)$ 沿 n, z 方向分布．它是根据实验结果按统计模拟方法近似给出，使其平均速度，脉动量方差及能谱等于或接近实验值．

下游压力为 $\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{U_s^2}{R+n}$，$U_s$ 为出口平均速度沿 n 方向分布．另外 $\partial^2 v_s/\partial s^2 = 0$，$\partial^2 v_n/\partial s^2 = 0$ $\partial^2 v_z/\partial s^2 = 0$.

横向为周期条件

初始条件： 应当满足边界条件，连续性条件，尽可能地与真实流动相符合．

数值方法： 为了提高计算精度，采用交错网格．为保证计算稳定，(11)—(13) 式采用蛙跳式差分格式：

$$\frac{y_{i,j,k}^{n+1} - y_{i,j,k}^{n-1}}{2\Delta t} + K_a^n = D_a^{n-1} + F_a^{n-1} \tag{38}$$

其中

$$K_a^n = \frac{V_s + |V_s|}{2}\frac{y_{i,j,k}^n - y_{i-1,j,k}^n}{h\Delta s} + \frac{V_n + |V_n|}{2}\frac{y_{i,j,k}^n - y_{i,j-1,k}^n}{\Delta n} + \frac{V_z + |V_z|}{2}\frac{y_{i,j,k}^n - y_{i,j,k-1}^n}{\Delta z} + \frac{V_s - |V_s|}{2}\frac{y_{i+1,j,k}^n - y_{i,j,k}^n}{h\Delta s}$$

$$+\frac{V_n-|V_n|}{2}\frac{y^n_{i,j+1,k}-y^n_{i,j,k}}{\Delta n}+\frac{V_z-|V_z|}{2}\frac{y^n_{i,j,k+1}-y^n_{i,j,k}}{\Delta z} \tag{39.1}$$

$$D_a^{n-1}=\nu^*\left\{\frac{y^{n-1}_{i+1,j,k}-2y^{n-1}_{i,j,k}+y^{n-1}_{i-1,j,k}}{(h\Delta s)^2}+\frac{y^{n-1}_{i,j+1,k}-2y^{n-1}_{i,j,k}+y^{n-1}_{i,j-1,k}}{(\Delta n)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{y^{n-1}_{i,j,k+1}-2y^{n-1}_{i,j,k}+y^{n-1}_{i,j,k-1}}{(\Delta z)^2}-\frac{hy^{n-1}_{i,j+1,k}-hy^{n-1}_{i,j-1,k}}{hR\Delta n}\right\} \tag{39.2}$$

$$F_n^{n-1}=V_n\frac{y^{n-1}_{i,j,k}}{hR} \tag{39.3}$$

而(16)式采用 Euler 差分格式:

$$\frac{y^{n+1}_{i,j,k}-y^n_{i,j,k}}{\Delta t}+K_a^n=D_a^n+F_a^n \tag{40}$$

上述差分格式稳定条件为

$$\Delta t\leqslant\frac{\alpha}{\frac{|V_s|_{\max}}{h\Delta s}+\frac{|V_n|_{\max}}{\Delta n}+\frac{|V_z|_{\max}}{\Delta z}+4\nu^*\left[\frac{1}{(h\Delta s)^2}+\frac{1}{(\Delta n)^2}+\frac{1}{(\Delta z)^2}\right]} \tag{41}$$

计算实验得 $\alpha=0.3$

为了计算压力，把压力分成 $p=p_E+p_1$，其中 p_E 为外缘压力. 计算速度时先不计 p_1，得

$$\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{V}}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\nabla p_E+\text{对流项}+\text{粘性项} \tag{42.1}$$

原方程为

$$\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\nabla p_E-\frac{1}{\rho}\nabla p_1+\text{对流项}+\text{粘性项} \tag{42.2}$$

相减为

$$\frac{\partial(\boldsymbol{V}-\tilde{\boldsymbol{V}})}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\nabla p_1 \tag{43}$$

计及连续方程可得

$$\frac{\partial(\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{V}})}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\Delta p_1 \tag{44}$$

这就是关于压力的泊松方程,边界条件为:

进口: $\partial p_1/\partial s=0$

出口: 由于出口 v_s 给定了(由 v_s^{n-1}, v_s^{n-2} 推知),故 $\partial p_1/\partial s=0$

外缘: $p_1=0$

壁面: $\partial p_1/\partial n=0$

泊松方程(44)用半直接法求解.

六、算例和结果分析

方程(11)—(13),(16),(44)求解由程序 TURCU 实现,该程序用 FORTRAN IV 写成,由四个部份组成,初值给出,几何参数计算,四个差分方程及泊松方程求解,数据分析和作图,为了说明模型选用、计算方法及程序的正确性,计算结果与实验作了比较.

目前已有不少人从事弯曲壁面边界层的测量，最主要有 So 和 Mellor, Gillis[5], Rumaprian[10] 的工作，其中 Gillis 工作比较完善，我们以它作为计算比较对象，实验设备如图 3。

实验条件： 介质为空气，温度 20℃，$\nu = 1.373 \times 10^{-1}\text{cm}^2/\text{s}$，进口来流速度 $U = 1600\text{cm}/s$ 壁面曲率半径 45cm 雷诺数 $\left(\frac{UR}{\nu}\right) 5.2 \times 10^5$

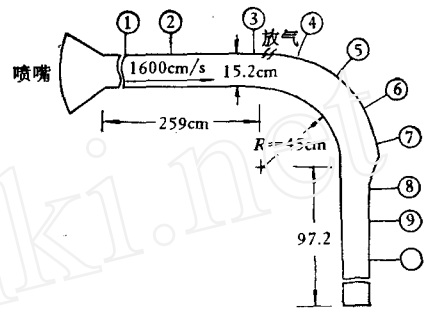

图 3　Gillis 实验装置草图

计算用流场总长 $s = 100\,\text{cm}$，法向厚度 10cm ($\sim 3\delta$)，横向宽度 20cm，选用网格 $64 \times 32 \times 32$ (纵向 64，其他 32×32) $\Delta s : \Delta n : \Delta z = 4.4 : 1.0 : 2.0$，$\Delta t = 0.00608$. 计算 1000 步，总的物理时间 0.34 秒，在 CYBER-175 上计算 20 小时，每节点每变量每时间步长为 0.3ms.

在 1000 次计算后所得流场和实验比较如下：

图 4 为平均速度的比较，吻合较好. 图 5 则用对数坐标，速度分布和对数律符合也较好，故壁面切应力值大体正确.

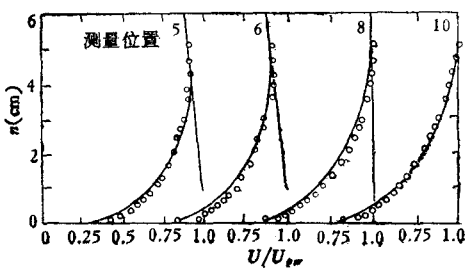

图 4　平均速度剖面

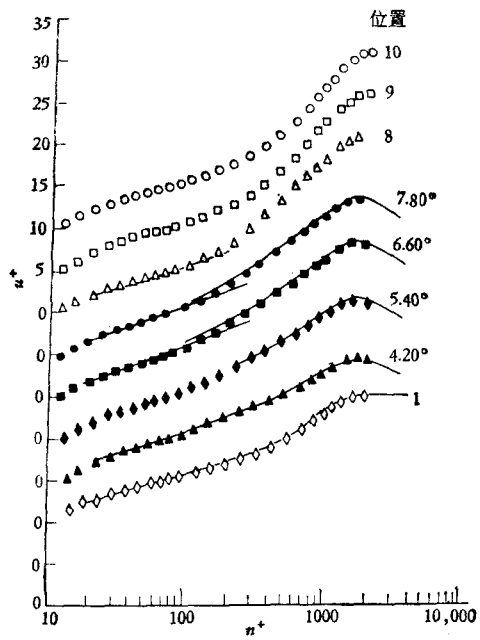

图 5　平均速度剖面(对数坐标)

图 6 给出了雷诺应力的计算和实验作比较，看得出，非常近壁处的数值趋势是大致符合的，差别的原因在于壁面附近网格尺度相对于边界层内层尺度 ν/u_τ 太厚了.

图 7，图 8 给出了脉动压力，脉动动能的等高线. 由于计算机软件限制，未能如设备所示的情况那样以弯曲壁面上的流场显示出来，只能画成直的. 图中可以看出凸面有使湍流强度下降趋势.

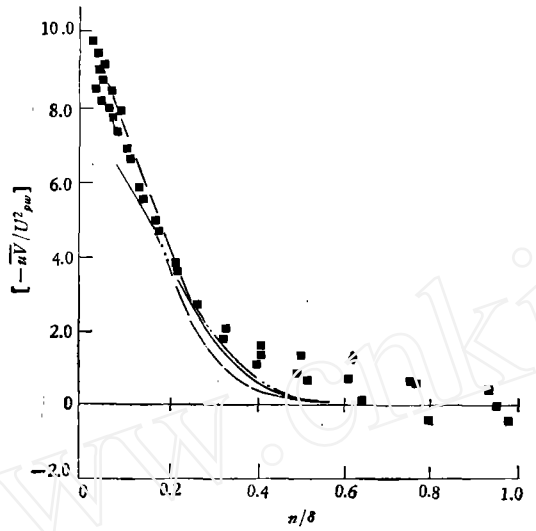

图 6 雷诺应力计算和实验值比较

计算	实验
——	■ $STA.$ 5. 40°
—·—·—	♦ STA 6.60°
— — —	● $STA.$ 7.80°

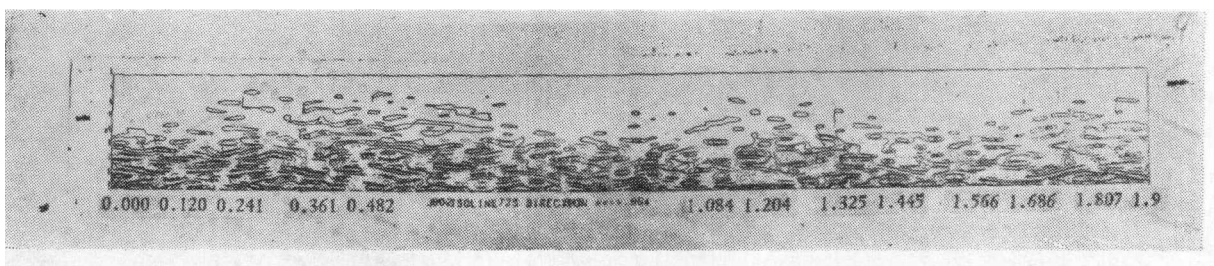

图 7 脉动压力

图 9 显示了 u'/U 沿法向分布，可以看出计算和实验结果大致相符，图 10 为脉动速度能谱和实验[5]相比较，大致趋势相同.

七、结 论

大涡模拟是近十几年来发展的研究湍流的一个重要手段. 本计算表明，该方法同样可以用于一些具有复杂几何形状的流场，除了统计平均结果可以达到和实验吻合外，在研究脉动速度、能谱分析、流动图案方面都可以作为一个有力的手段. 随着计算机的发展，可进一步缩小时空方向尺度，从而直接数值模拟更小尺度的湍流运动.

为了更有效的用于湍流场的研究，本工作拟在以下几方面作进一步的改进：垂直方向用变网距网格，使壁面网格淹没在边界底层内，在这一方向上同时采用隐式格式，改进进口条件的给法.

本工作得到洪堡基金会的资助，在此表示感谢.

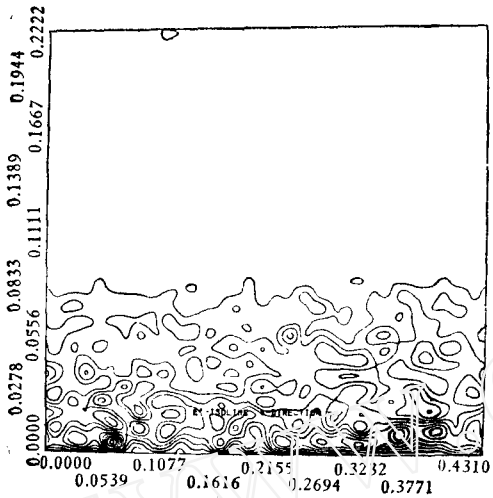

图 8　脉动动能

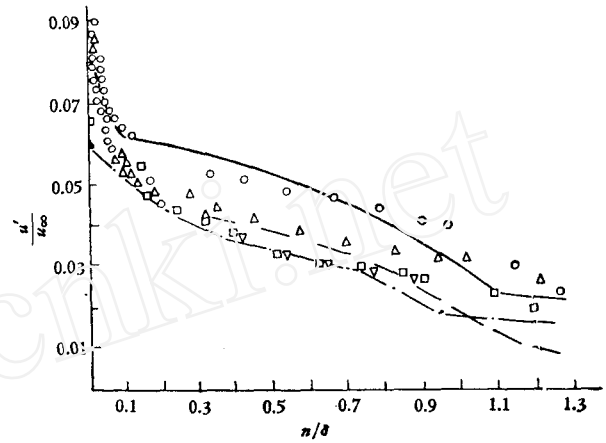

图 9　u'/U_∞

—○ *Sta.* 4(20*DEG*)　——— △ *Sta.* 5(40*DEG*)
—·—·—□ *Sta.* 6 (60*DEG*)
▽ *Sta.* 7 (80*DEG*)

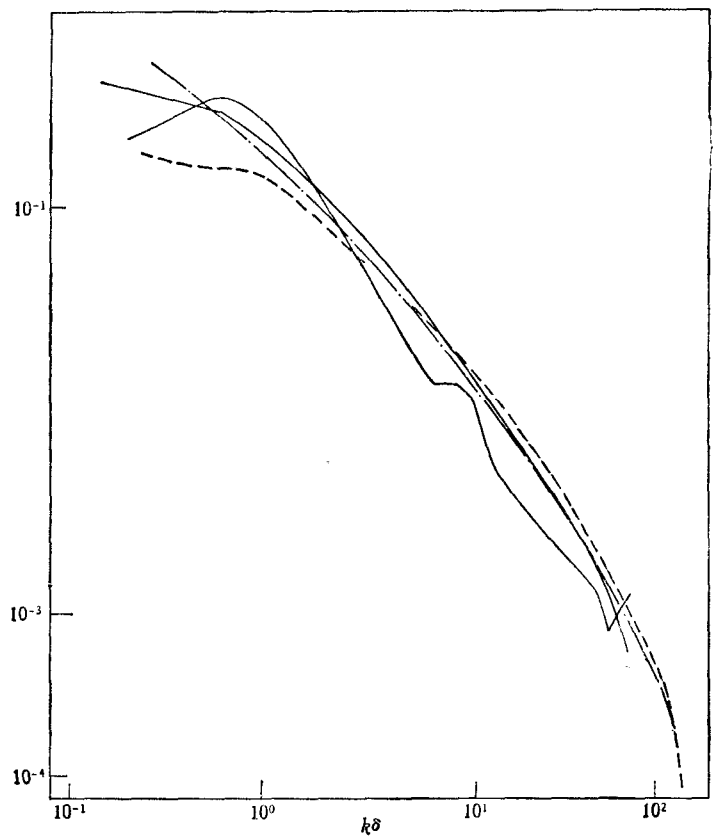

图 10　能谱分布

——平板 $\eta=0.14$　– – –凸壁 $\eta=0.1$　–·–凹壁 $\eta=0.1$　——本文计算 $\eta=0.1$

参 考 文 献

[1] Bradshaw, P., *JFM*, 36 (1969), 177—191.
[2] Deandorff, J. W., *JFM*, 41 (1970), 453—480.
[3] Ferziger, J. H., Report NOTF-16, (1981).
[4] Friedrich, R., Su, M. D., Lecture note in Physics, 170 (1982), 196—202.
[5] Gillis, J. C., Johnston, J. P., Kays, W. M., Moffat, R. J., Report No. HMT-31 (1980).
[6] Gröfzbach, G., KFK 2426 (1977), Karlsruhe.
[7] Lilly, D. K., NCAR Manuscit No. 123 (Jan 1966).
[8] Moin, P., Kim, J., *JFM*, 109 (1982).
[9] Orzsag, S. A., *JFM*, 49 (1971), 75—112.
[10] Rumaprian, B. R., Shiva. Prasad, B. G., Report 76, Bangalore 560012.
[11] Schumann, U., *KFK* 1825 (1973) Karlsruhe.

LARGE EDDY SIMULATION OF A TURBULENT WALL-BOUNDED SHEAR LAYER WITH LONGITUDINAL CURVATURE

Su Mingde R. Friedrich

Abstract

The statistically steady and two-dimensional turbulent flow over a longitudinally curved convex wall for an incompressible fluid is investigated using the large eddy simulation method. Preliminary results are presented for a 64×32×32 grid. The Poisson's equation for pressure is solved by means of a semi-direct method. The comparison with experimental data of Gillis et al. shows fairly good agreement.