

变厚度薄板、壳广义杂交元

陈 万 吉

(大 连 工 学 院)

提要 本文基于胡海昌-鹭津久一郎广义杂交变分原理建立了一种三角形变厚度薄板、壳广义杂交元。给出提高杂交元实施效率的一种可能途径。这类单元与其他类型的杂交模型相比,精度高且能较好地避免矩阵求逆运算,具有较好的实用性。单元刚度矩阵常常给出显式,用于直接刚度法程序很方便。

本文还进一步指出,各种杂交模型都可以看成是一种广义直接刚度法。

一、前 言

杂交模型在发展有限元理论和提高单元性能方面都取得了较大的成功,尤其是在保证薄板、壳单元的协调要求及描述单元的刚体运动模式上,与基于假定单元函数的位移模型相比更为突出。

但是,目前杂交元的应用仍不够广泛,其原因在于,杂交变分所允许的变量多,选择比较自由,处理不好容易出现错误,更为重要的是形成单元刚度矩阵时需要矩阵求逆运算,造成计算量过大,也就是说,杂交元在实施上还有一定的不足之处。

以往对杂交元的研究多基于修正的余能原理,修正的势能原理或修正的 Reissner 原理,而对广义杂交元研究的甚少。

我们研究广义杂交元的目的在于,统一现有的各种杂交元和协调元,给出一个统一的广义直接刚度法。在此基础上充分发挥广义杂交元变量多,无约束的特点,提高杂交元的实施效率。

变厚度薄板、壳分析是工程中常见的又相当困难的问题。用已有的杂交元解决此类问题时,对于变厚度薄板单元,通常用单元的平均厚度代替变化的厚度。对于任意薄壳,通常用浅壳代替深壳。这些都相当于对单元几何描述做了简化,由此带来的误差是不可忽视的。用已有的杂交元消除这些误差必然要花费很大代价,因此,很少见到效率高的变厚度薄板、壳杂交单元。

这里,我们用胡海昌-鹭津久一郎杂交变分原理建立三角形变厚度薄板、壳单元,不但精度高而且计算效率也大大地被提高。

本文的工作表明,对胡海昌-鹭津久一郎变分原理的研究,不仅限于理论上,而且可用于提高有限元的实施效果。

本文于1982年11月4日收到。

二、广义直接刚度法

关于胡海昌-鹭津久一郎杂交变分原理及广义杂交模型可参见文[1]。本节是把广义杂交元做为一种广义直接刚度法统一各种杂交元和基于单元位移模式的直接刚度法。

建立广义杂交元需要在单元内假定:

$$\sigma = P\beta$$

$$\text{则 } T = R\beta, \epsilon = Na, \hat{u} = Fq_1^e, \tilde{u} = Lq^e$$

其中, $\sigma, \epsilon, T, \hat{u}, \tilde{u}$ 分别为单元的应力, 应变, 边界力, 单元内位移, 单元边界位移向量, P, N, R, F, L 为对应的插值函数矩阵, 其中, P 与 R 相关. σ 和 β 为单元内独立参数, q^e 为单元的节点参数, $q_1^e = \{q^e, q_1^e\}^T$, q_1^e 为单元内部自由度(是独立的拉格朗日乘子), 当无内部自由度时, $q_1^e = q^e$.

由此, 可根据胡海昌-鹭津久一郎杂交变分原理建立广义杂交元的单元刚度矩阵 K^e , 并且可以由此直接退化出各种杂交模型. 为了便于比较, 现列表 1 如下:

表 1

插值函数 与结果 模型	插 值 函 数				结 果	
	ϵ	σ	$\hat{u}$	$\tilde{u}$	单元离散应变 ϵ	单元刚度矩阵 $K^e q_1^e$
广义杂交元	Na	$P\beta$	Fq_1^e	Lq^e	$ND^{-T}(G-W)q_1^e$	$(G-W)^T D^{-1} H D^{-T} (G-W) q_1^e$
杂交应力元	$E^{-1} P\beta$	$P\beta$	Fq_1^e	Lq^e	$E^{-1} P H_1^{-1} G q^e$	$G^T H_1^{-1} G q^e$
杂交位移元	Na	$P\beta$	Fa	Lq^e	$N(D^T + W)^{-1} G q^e$	$G(D^T + W)^{-T} H (D^T + W)^{-1} G q^e$
广义杂交应力元	$E^{-1} P\beta$	$P\beta$	Fq_1^e	Lq^e	$E^{-1} P H_1^{-1} (G-W) q_1^e$	$(G-W)^T H_1^{-1} (G-W) q_1^e$
广义杂交应变元	Na	ENa	Fq_1^e	Lq^e	$N H^{-1} (G-W) q_1^e$	$(G-W)^T H^{-1} (G-W) q_1^e$

表中假定 α 和 β 的参数个数相同. 其中:

$$D = \iint_{V_e} N^T \rho dA, \quad H = \iint_{V_e} N^T E N dA$$

$$H_1 = \iint_{V_e} \rho^T E^{-1} P dA, \quad G = \oint_{\partial V_e} R^T L ds, \quad W = \iint_{V_e} P_1^T F dA$$

其中, V_e 为单元面积, ∂V_e 为单元边界, E 为弹性常数矩阵, P_1 是 P 经平衡方程的算子运算求得的函数矩阵, 显然, 当假定的单元应力 σ 满足齐次平衡方程时 $W = 0$.

很容易看出, 将表中的单元离散应变代入系统总势能可以得到与广义变分原理相同的结果. 因此, 我们可以将表中的单元离散应变记为 $\epsilon = Bq_1^e$, 这里的 B 相当于直接刚度法中的应变矩阵, 因此说, 杂交模型实际上是一种广义直接刚度法. 值得注意的是一种简化杂交元, (即在杂交位移模型中令 $\sigma = ENa$) 不属于此例.

直接刚度法是广义直接刚度法的特例. 广义直接刚度法是通过广义变分原理建立 B 矩阵, 而不是象直接刚度法那样, 由假定单元位移函数直接求得. 从形式上看广义直接刚度法相当于对 B 矩阵做了分解, N 是函数矩阵, 而 D, G, W 是数值矩阵, 这为完成积分运算

$$K^e = \iint_{V_e} B^T E B dA$$

将会带来方便.

在假定的 $\sigma, \epsilon, \hat{u}$ 和 $\tilde{u}$ 满足一定相称条件下, 假定的应变 ϵ , 在单元内可以有协调或平衡约束, 也可以完全无约束, 在单元间则无协调要求. 当假定的 ϵ 满足协调方程时, 就一定可以找到一个单元函数与之对应, 我们可以把这类杂交元称之为不协调元(对应一个不协调的单元函数). 如果对应一个协调的单元函数, 则得到协调元. 可见, 杂交位移模型必然对应一个单元函数. 当假定的单元应变不满足协调方程时, 就不一定能找到一个单元函数与之对应, 但是, 却是一种直接刚度法. 当假定的 σ 满足平衡方程时, 可使杂交元的列式得到一些简化, 除了杂交位移元外, 这种简化常常因为无法避免矩阵求逆运算增加计算工作量.

由表 1 中可以看出, 提高杂交元的计算效率在于避免对矩阵的求逆运算. 对于广义杂交元, 由于 P 和 N 的选择比较任意, 因此, 避免矩阵 D 的求逆运算很容易办到, 而对于其他各种类型的杂交元, 由于 P 和 N 的选择受到限制, 如平衡, 协调或应力、应变关系等, 往往造成很难避免求逆运算. 这一点, 在建立变厚度薄板、壳单元时尤为突出. 对于杂交位移模型, 如采取平衡应力场, 则 $W = 0$, 用于建立变厚度薄板单元很有效^[2], 但是建立薄壳单元, 由于选择平衡应力场很困难, 因此, 应用也不方便.

广义直接刚度法与目前流行的位移模型相比, 它一方面可以提高单元的精度, 一方面可以给出更有效的计算格式. 这一点将用下面的具体单元说明.

三、变厚度三角形薄板单元

每个角点选择一个挠度和二个转角为未知数的九参数等厚度三角形薄板单元, 应用比较方便, 其中杂交模型的精度及计算效率都比较理想, 研究这个单元的文章很多, 其中计算格式处理的比较好的可参见文献[3, 4].

为建立变厚度薄板单元, 在单元内假定, 内力为:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_1 & L_2 & L_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_1 & L_2 & L_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_9 \end{Bmatrix} = P\beta \quad (1)$$

应变为:

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_1 & L_2 & L_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_1 & L_2 & L_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_9 \end{Bmatrix} = Na \quad (2)$$

$L_i (i = 1, 2, 3)$ 为面积坐标. 边界位移 $\tilde{w}$ 为三次插值函数, 其法向导数 $\partial \tilde{w} / \partial n$ 为线性插值, 并用自然坐标表示, 在 1-2 边上.

$$\tilde{u} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \tilde{w}}{\partial n} \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial s} \\ \tilde{w} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & L_1 & 0 & 0 & L_2 & 0 \\ \frac{6}{L}L_1L_2 & 0 & L_1(L_1 - 2L_2) & -\frac{6}{L}L_1L_2 & 0 & -L_2(2L_1 - L_2) \\ L_1^2(L_1 + 3L_2) & 0 & -L_1^2L_2 & L_2^2(L_2 + 3L_1) & 0 & L_2^2L_1L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -l & -m & 0 \\ 0 & m & -l & 0 \\ 0 & 0 & -l & -m \\ 0 & m & -l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_{x1} \\ w_{y1} \\ w_2 \\ w_{x2} \\ w_{y2} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_1 \mathbf{q}^e \quad (3)$$

其中, L 为边长,

$$L_1 = 1 - \frac{s}{L}, \quad L_2 = \frac{s}{L},$$

s 是边长的坐标 ($0-L$), l, m 为 1-2 边的外法线方向余弦.

由(1)可求得单元的 1-2 边上的边界力 $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} M_n \\ M_{ns} \\ Q_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l^2 & m^2 & 2lm \\ -lm & lm & l^2 - m^2 \\ l \frac{\partial}{\partial x} & m \frac{\partial}{\partial y} & l \frac{\partial}{\partial y} + m \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$$

图 1

$$= \begin{bmatrix} l^2 L_1 & l^2 L_2 & l^2 L_3 & m^2 L_1 & m^2 L_2 & m^2 L_3 \\ -lm L_1 & -lm L_2 & -lm L_3 & lm L_1 & lm L_2 & lm L_3 \\ l \frac{b_1}{2\Delta} & l \frac{b_2}{2\Delta} & l \frac{b_3}{2\Delta} & m \frac{c_1}{2\Delta} & m \frac{c_2}{2\Delta} & m \frac{c_3}{2\Delta} \\ 2lm L_1 & 2lm L_2 & 2lm L_3 & (l^2 - m^2)L_1 & (l^2 - m^2)L_2 & (l^2 - m^2)L_3 \\ \frac{1}{2\Delta}(c_1 l + b_1 m) & \frac{1}{2\Delta}(c_2 l + b_2 m) & \frac{1}{2\Delta}(c_3 l + b_3 m) & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_1 \boldsymbol{\beta} \quad (4)$$

其中 $b_1 = y_2 - y_3$, $c_1 = x_3 - x_2$, b_2, b_3, c_2, c_3 由下标按 $\begin{matrix} 1 \\ 2 \rightarrow 3 \end{matrix}$ 轮换求得, $L_3 = 0$, Δ 为三角形面积.

由此可求得, $\mathbf{G}_1 = \int_{l_{12}} \mathbf{R}_1^T \mathbf{L}_1 ds$, 经下标 $\begin{matrix} 1 \\ 2 \rightarrow 3 \end{matrix}$ 轮换可求得 $\mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3$. 而

$$\mathbf{G} = \sum_i^3 \mathbf{G}_i.$$

$\mathbf{G}$ 可以推出显式, 其中 81 个系数可以用其中九项通过下标交换得到.

$$\mathbf{H} = \iint_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{E} \mathbf{N} dA$$

变厚度板的厚度可按线性插值:

$$h(x, y) = \sum_i^3 L_i h_i$$

其中, h_i 为单元节点厚度. $\mathbf{H}$ 的计算可以方便地用七点数值积分求得精确值.

由此得单元刚度矩阵为:

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{G}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{D}^{-T} \mathbf{G} \quad (5)$$

其中,

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & & \\ & \mathbf{A} & \\ & & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \frac{3}{\Delta} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ \text{对称} & 3 & -1 \\ & & 3 \end{bmatrix}.$$

如果用杂交应力元或广义杂交应力(应变)元则不可避免的要进行对 $\mathbf{H}_1$ 或 $\mathbf{H}$ 的求逆. 这时, 为了便于计算, 常常用单元的形心厚度代替板厚, 化为等厚度单元计算. 这样, 虽然可以避免求逆运算, 但是却降低了单元的精度.

四、变厚度三角形薄壳单元(深壳单元)

一个好的薄壳单元应当具有如下条件:

- 1) 能较好的拟合壳体曲面.
- 2) 基于较严格的壳体理论并使单元间协调能得到保证.
- 3) 具有描述刚体模式的能力.

此外, 还应当能适应各种边界形状, 节点参数尽可能少, 适用于直接刚度法程序等.

建立一个理想的薄壳单元并非容易, 现有的杂交模型仍有一些不足之处, 从前面变厚度薄板单元可以看出, 对于复杂的单元, 增加泛函中允许变量的数目, 可以使复杂的问题得到合理的处理. 建立薄壳单元有必要研究广义杂交元.

1. 任意薄壳单元 任意薄壳的应变 ϵ 的分量为:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\alpha &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_\alpha}, \\ \epsilon_\beta &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_\beta}, \\ \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right), \\ \kappa_\alpha &= -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_\alpha} \right) - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_\beta} \right), \\ \kappa_\beta &= -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_\beta} \right) - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_\alpha} \right), \\ 2\kappa_{\alpha\beta} &= -\frac{2}{AB} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{2}{R_\alpha} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} u \right) \\ & + \frac{2}{R_\beta} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} v \right) \end{aligned}$$

曲面面积元素为 $AB d\alpha d\beta$ 。其中, α, β 为壳体曲面主曲率坐标, 式中曲面拉梅系数 A, B 及曲面曲率 R_α, R_β 都可以是 α, β 的函数。

对于简单的变厚度三角形单元, 每个角点可选用三个方向位移和二角转角为未知数(十五个参数单元), 为了避免求逆运算可假设

$$\sigma = \frac{1}{AB} P\beta, \quad \epsilon = N\alpha$$

$$P = N \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & \\ & 0 & L_1 & L_2 & L_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & L_1 & L_2 & L_3 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_1 & L_2 & L_3 \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & \\ & 0 & A_1 & A_1 & A_1 & & & & \\ & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

$$A_1 = 3 \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ & 3 & -1 \\ \text{对称} & & 3 \end{bmatrix}$$

Δ 为用 α, β 坐标计算的单元面积,

$$\Delta = \frac{1}{2} (\alpha_{21}\beta_{31} - \beta_{21}\alpha_{31}).$$

H, G, W 矩阵通常很难求得显式, 可用数值积分完成。

$$H = \iint_{v_e} N^T E N A B d\alpha d\beta.$$

变厚度薄壳的单元厚度可用节点厚度线性插值。 G 和 W 矩阵的计算要涉及壳体的边界力的表达式及壳体平衡方程。也可以直接用拟协调元方法推出, 关于拟协调元与杂交元的关系可见文献[2], [5]。可以证明,

$$\iint_{v_e} \sigma^T \epsilon dA = (G - W)q,$$

这相当于拟协调元中对应变的离散。即,

$$\iint_{v_e} \frac{1}{AB} \epsilon_a A B d\alpha d\beta = \oint_{\partial v_e} \frac{1}{A} \tilde{u} n_a ds + \iint_{v_e} \left(\frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_\alpha} \right) d\alpha d\beta$$

$$\begin{aligned}
 & \dots\dots\dots \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \iint_{V_e} \frac{L_i}{AB} x_\alpha AB d\alpha d\beta = \oint_{\partial V_e} \left[-\frac{L_i}{A^2} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \alpha} n_\alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{L_i}{A} \right) \cdot \frac{1}{A} \tilde{w} n_\alpha \right. \\
 & \quad \left. - \frac{L_i}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \tilde{w} n_\beta + \frac{L_i}{A} \frac{\tilde{u}}{R_\alpha} n_\alpha \right] ds + \iint_{V_e} \left[-\frac{\partial}{\partial \alpha} \right. \\
 & \quad \times \left(\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{L_i}{A} \right) \right) \hat{w} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{L_i}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \hat{w} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{L_i}{A} \right) \frac{u}{R_\alpha} \\
 & \quad \left. + \frac{L_i}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{v}{R_\beta} \right] d\alpha d\beta \\
 & (i = 1, 2, 3) \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \dots\dots\dots
 \end{aligned} \tag{7}$$

其中 $\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \beta}$ 再代入 $\frac{\partial \tilde{w}}{\partial n}$, $\frac{\partial \tilde{w}}{\partial s}$ 表示. (8) 式中, $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ $\frac{\partial \tilde{w}}{\partial n}$ 为边界公共位移, u, v, w , $\hat{w}$ 为单元内无协调要求的单元函数.

对于 15 参数三角形单元, $\tilde{w}$ 用三次插值, $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ 用线性插值, $\hat{w}$ 用至少完备到二次函数插值(是不完备的三次函数), u, v, w 为线性插值. (7) 式的右边由数值积分完成, 其重积分对应平衡方程, 当 $\mathbf{P}$ 满足平衡条件时 $\mathbf{W} = 0$. 壳体平衡方程比较复杂, 选择满足平衡方程的 $\mathbf{P}$ 比较困难, 通常 $\mathbf{W}$ 不为零.

对于某些特殊形状的壳体, 如双曲扁壳, 圆柱壳, 球壳, 回转壳等, 计算 $(\mathbf{G} - \mathbf{W})$ 矩阵将会得到相当的简化, 甚至能推出显式. 下面给出扁壳和圆柱壳的例子.

2. 扁壳单元 文献[6]给出一种等厚双曲扁壳单元, 为了提高计算效率, 并统一计算格式, 下面按面积坐标推出变厚度薄双曲扁壳单元.

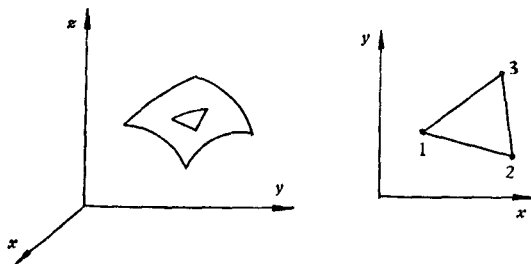


图 2

双曲扁壳的应变为:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
 \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
 \end{aligned}$$

和任意壳单元一样, 对于 15 参数单元可假定单元的内力和应变都为线性且用面积坐标表示, 得单元刚度阵:

$$\mathbf{K}^e = (\mathbf{G} - \mathbf{W})^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{G} - \mathbf{W}) \quad (8)$$

其中 $\mathbf{D}^{-1}$ 与前面任意壳相同, 只是这里的 Δ 是用 xy 坐标表示的三角形单元面积. $\mathbf{H}$ 矩阵的计算, 对于变厚度壳可用数值积分完成, 对于等厚度壳可以推出显式. $(\mathbf{G} - \mathbf{W})$ 矩阵为:

$$\mathbf{G} - \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_4 \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中 $\mathbf{C}_4$ 与薄板的一 $\mathbf{G}$ 相同, $\mathbf{C}_3 = \mathbf{0}$. 当

$\mathbf{q}^e = \{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3, w_{x1}, w_{x2}, w_{x3}, w_{y1}, w_{y2}, w_{y3}\}$ 时:

$$\mathbf{C}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_3 = \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \frac{1}{2} (x_{21}y_{31} - x_{31}y_{21})$$

该单元的计算效率很高, 精度也较高并能保证单元的刚体位移模式, 关于等厚度扁壳的计算结果可见文献[6].

3. 圆柱壳单元 文献[7]建立了矩形圆柱壳单元, 为了便于计算复杂边界形状的壳体现推导 15 参数三角形圆柱壳单元. 圆柱壳的应变分量为:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + w \right), \quad \varepsilon_\beta = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta}, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right)$$

$$\chi_\alpha = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right), \quad \chi_\beta = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right), \quad 2\chi_{\alpha\beta} = -\frac{2}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial u}{\partial \beta} \right)$$

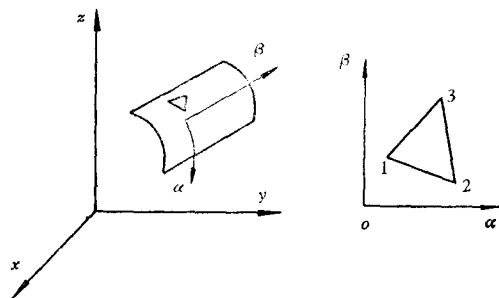


图 3

假定的单元应变与内力与任意壳一样, 则 $\mathbf{D}^{-1}$ 相同, 其中, Δ 为用 α, β 表示的单元面积.

$$\mathbf{H} = \iint_A \mathbf{N}^T \mathbf{E} \mathbf{N} R^2 d\alpha d\beta,$$

对变厚度壳体可用数值积分完成.

$$\mathbf{G} - \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_4 \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中, $\mathbf{C}_4$ 为薄板单元的 $\mathbf{G}$ 中的 x, y 换成 α, β , 并且再乘以 $-\frac{1}{R^2}$.

$$\mathbf{C}_1 = \frac{1}{2R} \begin{bmatrix} \beta_{23} & 0 & \beta_{31} & 0 & \beta_{12} & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & 0 & \alpha_{13} & 0 & \alpha_{21} \\ \alpha_{32} & \beta_{23} & \alpha_{13} & \beta_{31} & \alpha_{21} & \beta_{12} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_2 = \frac{\Delta}{3R} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_3^T = \frac{1}{6R^2} \begin{bmatrix} \beta_{23} & \beta_{23} & \beta_{23} & 0 & 0 & 0 & 2\alpha_{32} & 2\alpha_{32} & 2\alpha_{32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{31} & \beta_{31} & 0 & 0 & 0 & 2\alpha_{13} & 2\alpha_{13} & 2\alpha_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{12} & \beta_{12} & \beta_{12} & 0 & 0 & 0 & 2\alpha_{21} & 2\alpha_{21} & 2\alpha_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

五、数值计算

用一个简单的悬臂薄板结构说明变厚度薄板广义杂交元的效果。弹性常数 $E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\mu = 0.3$ 。计算结果表明, 变厚度广义杂交元与变厚度杂交应力元的精度相当, 保持了杂交元精度高的长处, 计算速度却得到提高。另一方面与等效厚度杂交应力元相比, 计算速度相当, 但却提高了精度, 因此, 广义杂交元用于变厚度薄板计算, 具有精度高, 计算速度快的优点。

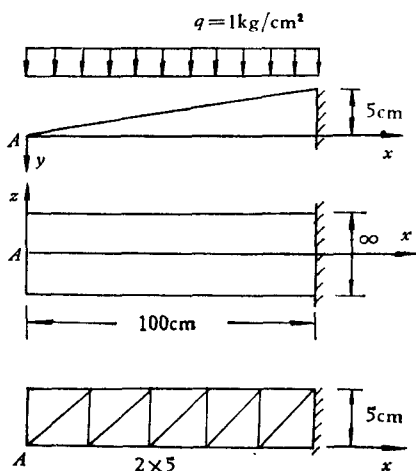


图 4

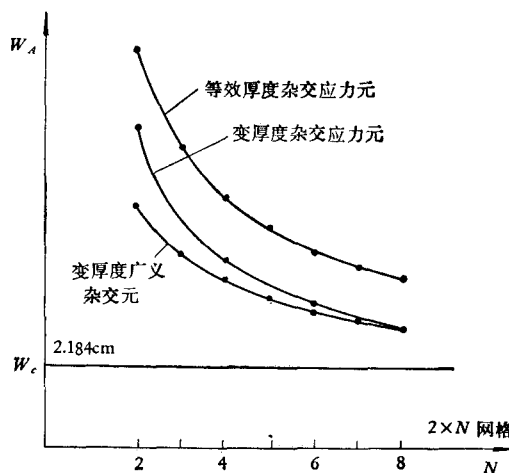


图 5

表 2 A 点挠度 (cm)

单元 w_A	网格						
		2×2	2×3	2×4	2×5	2×6	2×8
等效厚度杂交应力元		2.898	2.683	2.568	2.496	2.447	2.385
变厚度杂交应力元		2.728		2.428		2.320	2.271
变厚度广义杂交元		2.555	2.440	2.378	2.338	2.310	2.274
梁解析解		2.184					

参 考 文 献

- [1] 陈万吉, 广义杂交元, 力学学报, 6(1981).
 [2] 陈万吉, 杂交位移模型的实施及其与拟协调元的关系, 大连工学院学报, 4(1982).
 [3] 唐立民, 陈万吉, 刘迎曦, 有限元分析中的拟协调元, 大连工学院学报, 2(1980).
 [4] Batoz, J. L., Barthe, K. J. and Ho, L. W., A Study of Three-Node Triangular Plate Bending Elements, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 15(1980).
 [5] 陈万吉, 再论拟协调元方法与广义变分原理, 固体力学学报, 1(1983).
 [6] 吕和祥, 刘迎曦, 唐立民, 有限元法中的拟协调元及在构造双曲壳单元上的应用, 大连工学院学报, 1(1981).
 [7] 刘迎曦, 吕和祥, 唐立民, 拟协调圆柱壳单元, 大连工学院学报, 2(1981).

THE GENERALIZED HYBRID ELEMENT OF THIN PLATE AND SHELL WITH VARYING THICKNESS

Chen Wanji

(Research Institute of Engineering Mechanics, Dalian Institute of Technology)

Abstract

In this paper, a kind of generalized hybrid elements for triangular thin plate and shell with varying thickness is presented.

An approach to improve the efficiency of hybrid element for implementation is suggested.

Matrix inversion can be avoided, in comparison with conventional hybrid element, the method is more convenient in practical application. Even more, the stiffness matrix of the element is derived in explicit form, thus it is easier to use.

It is shown that every hybrid element can be regarded as a general direct stiffness method.