

单重和双重孔隙介质二相二维渗流的一个新的数值模拟方法

刘明新 陈钟祥

(石油勘探开发科学研究院)

提要 本文给出的方法克服了通常数值模拟方法中出现的数值弥散现象。在求解过程中,用有限元法求解流函数场和沿流线推进饱和度是交替进行的。由于采用流线做为变网格有限元法的网格线,不仅避免了频繁的二维插值,而且简化了划流线和改变网格的工作。

一、引言

在双重孔隙介质二相二维渗流问题的数值模拟方面,自70年代以来,已经有一些作者做了工作^[1-3]。这些工作基本上是在建立在通常的数值模拟方法的基础上的,用差分法或有限元法直接求解反映各相压力分布的偏微分方程组。当含水饱和度的分布具有强间断时,通常的数值模拟方法由于存在数值弥散现象而不能给出油水前缘的准确位置和形状。

对于单重孔隙介质情形,1962年 Higgins 和 Leighton 曾提出了克服数值弥散的流管算法^[4]。其后,陈钟祥^[5]和 Martin 等^[6]先后引入变流管的算法,在饱和度推进过程中不断重新确定流管的分布和形状。1964年,文献[7]中建立了某些理论关系并提出沿流线推进饱和度的电模拟方法,用流线代替流管,从而使饱和度的推进由更严格的理论公式确定。最近,文献[8]又据此作出了建立一类能克服数值弥散的数值模拟方法的尝试。

本文的目的,是在双重孔隙介质平面二相渗流方面给出一种能克服数值弥散的模拟方法。文中采用文献[9]中提出的双重孔隙介质中二相驱替的理论模型。该模型导出的饱和度推进方程具有同 Buckley-Leverett 方程类似的形式,只是多了一个依赖于水淹历史的吸渗项。当该吸渗项为零时,方程退化为单重孔隙介质情形。双重孔隙介质情形由于吸渗作用的出现,使无论流管算法还是流线算法都遇到困难。为了计算吸渗项及其对饱和度推进的影响,如果采用固定的有限元或差分网格,则必须在它们和变动的流线网之间进行频繁的二维插值计算。从而使程序复杂化并增加计算量。为了克服这一困难,本文引入变网格的有限元法求解流函数场。网格的变动是通过让流线始终做为有限元网格的网线来实现的。由于有限元网格与流线网已融为一体,上述做法不仅避免了二维插值而且使划流线和改变网格变得简单易行。

二、基本方程组

采用文献[9]中提出的裂缝-孔隙介质中不互溶不可压缩二相渗流的理论模型。在平

本文于1982年8月30日收到,曾在1983年10月第二届亚洲流体力学会议上宣读。

面情形,通过类似文献[9]的推导,问题归结为求解下面的微分方程组

$$\nabla \cdot (Kk\nabla P) = 0 \quad (2.1)$$

$$\mathbf{W} = -Kk\nabla P \quad (2.2)$$

$$f'(S_{wf})\nabla S_{wf} \cdot \mathbf{W} + \phi_f \frac{\partial S_{wf}}{\partial t} = q_w \quad (2.3)$$

$$\phi_m \frac{\partial S_{wm}}{\partial t} = -q_w \quad (2.4)$$

$$q_w(x, y, t) = R\lambda \left[\lambda \int_0^t S_{wf}(x, y, \tau) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau - S_{wf}(x, y, t) \right] \quad (2.5)$$

其中

$$k = \frac{k_{rw}}{\mu_w} + \frac{k_{ro}}{\mu_o}$$

$$f(S_{wf}) = \frac{\mu_o k_{rw}}{\mu_o k_{rw} + \mu_w k_{ro}}$$

未知量 $\mathbf{W}(x, y, t)$ 、 $P(x, y, t)$ 、 $S_{wf}(x, y, t)$ 、 $S_{wm}(x, y, t)$ 和 $q_w(x, y, t)$ 分别是渗流速度、压强、裂缝及岩块系统的含水饱和度和水的吸渗强度 (q_w 为负表示水从裂缝系统吸入岩块系统)。参量 $K(x, y)$ 、 $\phi_f(x, y)$ 和 $\phi_m(x, y)$ 分别是裂缝系统的渗透率、裂缝系统及岩块系统的孔隙度。 k_{rw} 、 k_{ro} 、 μ_w 和 μ_o 分别是水相及油相的相对渗透率和粘度。 R 、 λ 是与吸渗作用有关的参数。在单重孔隙介质情形, S_{wm} 、 ϕ_m 、 q_w 都不存在, (2.3) 式右端变为零, 即它化为熟知的 Buckley-Leverett 方程。

饱和度推进方程(2.3)可用特征线法求解, 其对应的特征线方程是

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{1}{\phi_f} f'(S_{wf}) \mathbf{W} \quad (2.6)$$

沿特征线有

$$\frac{dS_{wf}}{dt} = \frac{1}{\phi_f} q_w \quad (2.7)$$

从(2.6)式可见, 特征线运动方向与流线重合。为了划流线方便, 引入流函数方程以取代压力方程(2.1)。定义流函数 $u(x, y, t)$ 满足^[6]

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -Kk \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = Kk \frac{\partial P}{\partial x} \end{cases} \quad (2.8)$$

在该定义下, (2.1)式自动满足。与(2.2)比较, 知 ∇u 与 $\mathbf{W}$ 模相等、方向正交。从而流线即为 u 的等值线, 流速的模为

$$W = \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (2.9)$$

其中 η 指向与流线垂直且 u 增加的方向。将(2.8)代入恒等式

$$-\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} = 0,$$

即得流函数满足的偏微分方程

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{Kk} \nabla u \right) = 0 \quad (2.10)$$

方程(2.6)、(2.7)和(2.10)构成了我们要联立求解的方程组,其中 W 、 q_w 分别由(2.9)和(2.5)给出。一旦 q_w 被求出,直接积分即可得出(2.4)的解。

三、在流线上推进饱和度

饱和度 S_{wf} 的推进由常微分方程组(2.6)、(2.7)确定。它可以用解常微分方程组的通常数值方法求解。然而,不同的是,(2.6)的右端函数中含有未知的 $W(x, y, t)$, 它必须在求解了关于流函数 $u(x, y, t)$ 的方程(2.10)后,由(2.9)式算出。这样,在整个求解过程中,求解偏微分方程(2.10)和求解常微分方程组(2.6)、(2.7)是交替进行的。给定了 t_n 时刻的饱和度分布 $S_{wf}(x, y, t_n)$, 即确定了(2.10)中的参数 $k(S_{wf})$, 从而可求解(2.10)得到流函数场。据此可划出流线,并由(2.9)算出 $W(x, y, t_n)$ 。在一个很小的时间步长 $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ 内,视 $u(x, y, t)$ 为不变的,对方程(2.6)、(2.7)进行数值积分,即可得到 t_{n+1} 时刻的特征线位置及特征线上的饱和度。从而又确定了 t_{n+1} 时刻的饱和度分布 $S_{wf}(x, y, t_{n+1})$ 。于是,又可开始新的一步。

为了计算方便,引入曲线坐标 (ξ, u) 。其中 u 是流函数值,在流线上为常量, ξ 是在流线上的弧长。设 $\xi_i(u_j, t)$ 与 $S_i(u_j, t)$ 分别是第 i 根特征线在第 j 根流线上的位置的 ξ 坐标及其上的饱和度值,则在 (ξ, u) 坐标下,方程(2.6)、(2.7)具体化为

$$\frac{d\xi_i(u_j, t)}{dt} = \frac{1}{\phi_f} f'(S_i(u_j, t)) W(\xi_i, u_j, t) \quad (3.1)$$

$$\frac{dS_i(u_j, t)}{dt} = \frac{1}{\phi_f} q_w(\xi_i, u_j, t) \quad (3.2)$$

当采用二阶预估-校正方法求解常微分方程组(3.1)、(3.2),并用梯形积分公式计算积分(2.5)时,截断误差为 $O(\Delta t^2)$ 量级^[10]。在单重孔隙介质情形, $q_w(x, y, t) \equiv 0$, 由(3.2),在特征线上 S_{wf} 为常量,故只需求解(3.1)。

在双重孔隙介质二相驱替情形,当推进前缘具有饱和度的强间断时,由于此时前缘饱和度和度可能随时间而变化,所以需要加入一个确定前缘位置的方程。参考文献[5],对每根流线应有如下质量守恒关系成立

$$\begin{aligned} & \int_{t_n}^{t_{n+1}} A(\xi_F(t_n), \tau) W(\xi_F(t_n), \tau) f(S_{wf}(\xi_F(t_n), \tau)) d\tau \\ &= \int_{\xi_F(t_n)}^{\xi_F(t_{n+1})} A(\xi, t) \{ \phi_f [S_{wf}(\xi, t_{n+1}) - S_{wf}(\xi, t_n)] \\ & \quad + \phi_m [S_{wm}(\xi, t_{n+1}) - S_{wm}(\xi, t_n)] \} d\xi \end{aligned} \quad (3.3)$$

其中 ξ_F 是前缘位置的 ξ 坐标, A 是包围该流线的某一微元流管的横截面积。由于流速与流管横截面积成反比,故(3.3)式可化简为

$$\begin{aligned} & \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[S_{wf}(\xi_F(t_n), \tau)] d\tau \\ &= \int_{\xi_F(t_n)}^{\xi_F(t_{n+1})} \frac{1}{W(\xi, t)} \{ \phi_f [S_{wf}(\xi, t_{n+1}) - S_{wf}(\xi, t_n)] \\ & \quad + \phi_m [S_{wm}(\xi, t_{n+1}) - S_{wm}(\xi, t_n)] \} d\xi \end{aligned} \quad (3.4)$$

该式就是确定前缘位置的方程,具体应用时采用梯形积分公式进行数值计算.

四、流函数方程的有限元解法

对于给定的参数 $k(S_{wf}(x, y, t_n))$, 流函数方程(2.10)是典型的椭圆型偏微分方程. 考虑到有限元法比差分法网格剖分更灵活, 从而有利于减少边界特别是井壁附近的近似误差, 我们采用三角域上的线性插值函数的有限元法来求解(2.10). 采用较低次的插值函数可以直接导出最终的类似差分格式的有限元方程, 其系数中不包含数值积分, 从而使建立方程的计算量减少; 另外, 在同样的计算量下, 低次有限元的单元划分较细, 有利于克服 $k(S_{wf})$ 的不连续性造成的误差.

把求解区域 D 进行三角形单元剖分, 三角形的顶点是网格节点. 在每个单元内, 用线性插值函数逼近 $u(x, y, t_n)$

$$u(x, y, t_n) = L_i(x, y)u_i(t_n) + L_j(x, y)u_j(t_n) + L_k(x, y)u_k(t_n) \quad (4.1)$$

其中 $L_i(x, y)$ 是 x, y 的线性函数, 在 i 点取值为 1, 在 j, k 点取值为 0. L_j, L_k 亦类似. i, j, k 是三角形三个顶点的节点编号, i, j, k 为逆时针顺序. $u_i(t_n)$ 是 t_n 时刻 i 点的 u 值. 按照 Galerkin 概念, 取插值函数 $L_l(x, y)$ ($l = i, j, k$) 作为权函数, 可获得方程(2.10)的有限元形式

$$\begin{aligned} & \iint_D \frac{1}{Kk(S_{wf})} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial L_l}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial L_l}{\partial y} \right] dx dy \\ &= \oint_{\Gamma} \frac{1}{Kk(S_{wf})} \frac{\partial u}{\partial n} L_l d\Gamma \end{aligned} \quad (4.2)$$

其中 Γ 是 D 的边界, $\frac{\partial}{\partial n}$ 是边界上的法向导数. 由于在井壁边界上 $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, 而在流线边界上 u 为给定常量, 故(4.2)式中的边界积分项在离散化方程中不出现. 把表达式(4.1)代入(4.2)中, 并把其中的面积分局限于第 e 个三角形单元的区域 D_e 上时, 可得到单元刚度方程组

$$\sum_{m=i,j,k} K_{lm}(e) u_m(t_n) = 0 \quad l = i, j, k \quad (4.3)$$

其中

$$K_{lm}(e) = \frac{1}{4} \sigma(e) \mathbf{R}_l \cdot \mathbf{R}_m \quad (4.4)$$

$$\sigma(e) = \frac{1}{\Delta_e} \left(\frac{1}{Kk} \right)_e \quad (4.5)$$

Δ_e 是该单元的面积, $\left(\frac{1}{Kk} \right)_e$ 是三个顶点上 $\left(\frac{1}{Kk} \right)$ 值的平均, $\mathbf{R}_l$ 是 l 点所对边的边长矢量, 指向逆时针方向. 当把所有单元的单元刚度方程组中关于同一个节点的方程都相加起来, 即得到最终的有限元方程组.

三角剖分可这样形成. 首先, 按流线和初始等压线交织成的网格把求解区域剖分为四边形. 然后, 按图 1 的方式把每个四边形剖分为两个三角形. 为清楚起见, 图中把四边形画成矩形. 以 (i, j) 表示位于第 i 根初始等压线与第 j 根流线的交点的节点编号, 并以 j 每取遍全部流线 i 增加 1 的方式安排节点序号. 从图 1 可见, 含有节点 (i, j) , 即图

中第 4 号点的单元共有 6 个, 其中 $[i, j]$ 表示由节点 (i, j) 、 $(i, j+1)$ 和 $(i+1, j)$ 构成的单元, $[i, j]^*$ 表示由节点 $(i, j+1)$ 、 $(i+1, j+1)$ 和 $(i+1, j)$ 构成的单元. 把关于 (i, j) 点的各单元刚度方程迭加, 即得到关于 (i, j) 点的有限元方程的最终形式

$$\begin{aligned} Q_1(i, j)u_{i-1,j} + Q_2(i, j)u_{i-1,j+1} + Q_3(i, j)u_{i,j-1} \\ + Q_4(i, j)u_{i,j} + Q_5(i, j)u_{i,j+1} + Q_6(i, j)u_{i+1,j-1} \\ + Q_7(i, j)u_{i+1,j} = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

对于节点 (i, j) 位于边界的情形, 只需对落入边界外的单元置 $\sigma(e) = 0$, 则(4.6)式仍成立.

由于有限元方程组(4.6)具有对称、带状和对角占优的系数矩阵^[10], 所以当用直接消去法求解时, 只需对上三角部份带内元素施行运算. 这样, 对每个方程, 我们只需知道 Q_4 、 Q_5 、 Q_6 和 Q_7 这 4 个系数. 另外, 由系数的具体形式并利用对称性可证

$$\begin{aligned} Q_4(i, j) = -[Q_7(i-1, j) + Q_6(i-1, j+1) + Q_5(i, j-1) \\ + Q_5(i, j) + Q_6(i, j) + Q_7(i, j)] \end{aligned} \quad (4.7)$$

因此, 实际只需给出三个系数的表达式, 即

$$\left. \begin{aligned} Q_5(i, j) &= -\frac{1}{4} \{ \sigma[i-1, j]^* B(i-1, j+1) \cdot C(i-1, j) \\ &\quad + \sigma[i, j] B(i, j) \cdot C(i, j) \} \\ Q_6(i, j) &= -\frac{1}{4} \{ \sigma[i, j-1] A(i, j-1) \cdot B(i, j-1) \\ &\quad + \sigma[i, j-1]^* A(i+1, j-1) \cdot B(i, j) \} \\ Q_7(i, j) &= \frac{1}{4} \{ \sigma[i, j-1]^* C(i, j-1) \cdot A(i+1, j-1) \\ &\quad + \sigma[i, j] C(i, j) \cdot A(i, j) \} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

其中 $\sigma[i, j]$ 是 σ 在单元 $[i, j]$ 上的值. $A(i, j)$ 、 $B(i, j)$ 和 $C(i, j)$ 分别是由 (i, j) 点到 $(i, j+1)$ 点, 由 (i, j) 点到 $(i+1, j)$ 点和由 $(i, j+1)$ 点到 $(i+1, j)$ 点的矢径.

采用以上方法求解方程(2.10), 每建立一个节点的方程, 主要计算量只是按(4.8)式求出 3 个系数. 其建立方程和求解方程所需的计算量都同 7 点差分格式相当.

五、网格与流线的变动

方程(2.10)中的参量 $k(S_{wf})$ 与 S_{wf} 有关, 而 S_{wf} 的值是在流线上由方程(2.6)、(2.7)确定的; 另一方面, 方程(2.7)中的 q_w 值则依赖于固定点的 S_{wf} 值的历史. 因此, 如果采用固定网格的有限元法求解(2.10), 势必导致在固定的有限元网格与变动的流线网之间进行频繁的二维插值计算. 这种插值需要寻址等复杂运算, 将使程序复杂化并增加计算量. 为克服这个困难, 我们采用变网格的有限元法求解(2.10). 有限元网格线由初始等压线与流线交织成的四边形网格再对角剖分而成. 在求解过程中, 初始等压线始终

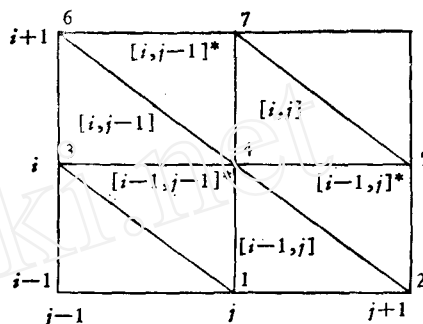


图 1

保持不动, 而流线则每经过相应的时间步后做一次改变. 由于流线已成为有限元网格的组成部份, 沿流线推进饱和度也就是沿有限元网格线推进饱和度, 因此避免了二维插值.

由于初始等压线保持不动, 因此, 流线的改变也可以看成是流线与初始等压线交点在该初始等压线上的移动. 此交点坐标 (x^*, y^*) 的新值由下式确定

$$\left. \begin{aligned} x^* &= x_a + \frac{u^* - u_a}{u_b - u_a} (x_b - x_a) \\ y^* &= y_a + \frac{u^* - u_a}{u_b - u_a} (y_b - y_a) \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

其中 u^* 是表征该流线的 u 值, a, b 是初始等压线上相邻的两个节点, 且 u^* 介于 u_a 与 u_b 之间, u_a, u_b 是求解 (2.10) 获得的节点 u 值. 由于流线与初始等压线的交点也即是有限元网格的节点, 因此 (5.1) 式同时确定了新流线和新的有限元网格. 从上面我们看到, 采用上述变网格方法, 不仅没有因确定网点坐标而增加额外的计算量, 而且使划流线变得相当简单. 新节点处的 q_w 值亦由类似 (5.1) 的公式确定. 特征线在新流线上的位置, 可化为求新流线与特征线的交点问题, 而用类似的办法求出. 新节点处的 W 值则是利用 (2.9) 式, 把微商用差商近似而求出.

初始时刻的流线分布可由一个预先给定的粗略的流线位置, 反复求解 (2.10) 并利用 (5.1), 使之修正为较精确的流线. 初始等压线可与初始流线同时形成. 流线上各节点的压强值由积分 (2.2) 式得到

$$P(\xi_{i+1}, u, t) = P(\xi_i, u, t) - \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \frac{W(\xi, u, t)}{K(\xi, u)k(S_{wf})} d\xi \quad (5.2)$$

其中 ξ_i, ξ_{i+1} 是流线上两相邻节点的 ξ 坐标. 反复利用 (5.2) 和类似 (5.1) 的公式, 即可把粗略的等压线修正为较精确的等压线.

六、算 例

我们就均质地层中的五点注采井网在保持注入量恒等的情形下作示例性计算. 引入如下定义的无量纲参数:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y}{L}, \quad \bar{z} = \frac{Qt}{L^2 h (\phi_f + \phi_m)}, \\ \bar{W} &= \frac{L h (\phi_f + \phi_m)}{Q} W, \quad \bar{\lambda} = \frac{L^2 h (\phi_f + \phi_m)}{Q} \lambda, \\ \bar{Q} &= \phi_f + \phi_m, \quad \bar{\mu}_w = \frac{\mu_w}{\mu_o}. \end{aligned}$$

其中 L 是井网单元的边长, h 是地层厚度, Q 是注入量. 对于单重孔隙介质情形, 在上述定义中应令 $\phi_m = 0$. 计算时, 取无量纲井半径 $\bar{r}_w = 0.005$, 取 $\phi_f = 0.01$, $\phi_m = 0.15$, $R = 0.1$, $\bar{\lambda} = 0.64$, $\bar{\mu}_w = 0.5$. 相对渗透率曲线取为 $k_{rw} = S_{wf}^2$, $k_{ro} = (1 - S_{wf})^2$. 有限元网格由 11 根流线, 21 根初始等压线构成. 油水前缘从注水井到达生产井约经过 40 个时间步长.

在单重孔隙介质情形, 若假定流函数场始终不变, 则可得出渗流速度的解析表达式,

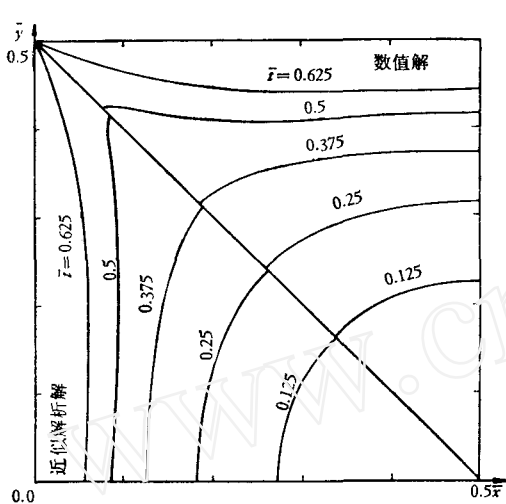


图 2

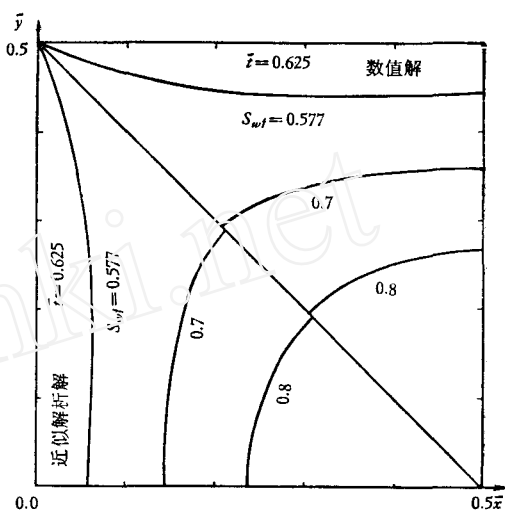


图 3

用很小的时间步长对(2.6)式积分,即可得出近似解析解.图2和图3给出了用本文提出的方法算得的解同上述近似解析解的对比.图2给出了前缘推进的对比.图3给出了生产井刚见水时地层中饱和度分布的对比.关于生产井见水的时间,近似解析解给出 $\bar{t}=0.533$,数值模拟解算得 $\bar{t}=0.528$,相对误差小于1%.图4给出了单重孔隙介质情形的计算结果.其对角线以上部份给出了前缘的推进,对角线以下部份给出了前缘到达生产井时的流线分布和饱和度分布.图5则给出了双重孔隙介质情形下相应的计算结果.

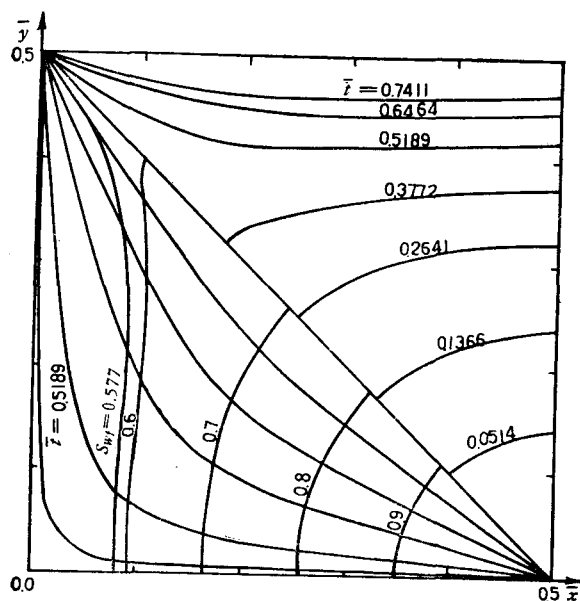


图 4

- [5] 陈钟祥, 用电网模型研究二相二维非定常渗流的一种近似方法, 力学学报, 1(1965) 60—62.
- [6] Martin, J. C. and Wegner, R. E., Numerical solution of multiphase, two-dimensional incompressible flow using stream-tube relationships, *Soc. Pet. Eng. J.* (Oct. 1979) 313—323.
- [7] 陈钟祥, 袁曾光, 关于二相渗流的多维问题, 力学学报, 1(1980) 12—17.
- [8] 陈钟祥, 袁益让, 王文洽, 关于求解二相渗流平面问题的一类新方法, 应用数学和力学, 4, 4(1983) 539—550.
- [9] 陈钟祥, 刘慈群, 双重孔隙介质中二相驱替理论, 力学学报, 2(1980) 109—119.
- [10] 李荣华, 冯果忱, 微分方程数值解, 人民教育出版社(1980).

A NEW NUMERICAL METHOD OF SIMULATING TWO-DIMENSIONAL TWO-PHASE FLOW THROUGH A MEDIUM WITH SINGLE- OR DOUBLE-POROSITY

Liu Mingxin Chen Zhongxiang

(*Scientific Research Institute of Petroleum Exploration and Development, Beijing*)

Abstract

The method proposed in this paper overcomes the effect of numerical dispersion, which is inherent in conventional numerical simulation method. In simulation, the procedure of finding the field of stream function by finite element method with varying mesh and that of tracing the advance of the saturation along the streamlines are carried out alternately. Since the streamlines are used as mesh lines, not only the complicated two-dimensional interpolation is avoided but also the procedure of drawing streamlines is simplified.