

充液圆柱壳的自振特性

朱大同

(南京航务专科学校)

提要 文内含液圆柱壳的自由振动方程组以力矩理论为基础, 壳面位移用梁函数逼近, 壳内的流体力学方程用有限Hankel变换分段求解, 结果能满足全流场条件。用广义液动压力表示流体与结构的相互作用, 从而把充液圆柱壳的自由振动归结为广义代数特征值问题。为了比较方法的精度, 以两端简支、端头有刚性平面限制的圆柱壳为例, 计算了空壳和充液壳的频率, 初步讨论了各阶频率与周波数的关系, 最易激发周波数的变化规律。理论计算的频率值与实验结果一致。

一、前言

充液圆柱形薄壳对内部湍流或外部随机荷载的动力反应是核反应堆结构, 飞行器燃料壳、传输液体管道和地面贮液池等工程的重要课题, 近年来对它的理论和实验方面的研究受到日益重视^[1-3]。充液圆柱壳的自由振动是流体弹性力学的基本实用问题之一。已经证明, 表征壳体振动的弹性结构算子是对称正定的, 而与之相互作用的内部流体, 如果忽略粘性、压缩性和基态流场影响, 那么用Green函数为工具, 也容易证明流体力学部份的解是唯一的, 并且与弹性结构耦合, 形成对称的Fredholm积分算子。因此, 它可合理地利用普通直接变分近似处理, 将其归结为广义代数特征值问题。以往对流体力学方程用分离变量法等求解, 如果同时用梁函数逼近壳面位移, 则经常出现矛盾条件, 解答不是恰当的。本文充分注意到这类结构内部流场的有界性, 导出了满足全部边界条件的显式解。

二、充液圆柱壳的频率方程

长度 l 、半径 a 、壳厚 h 的满盛液体的圆柱形薄壳, 它的弹性振动方程按线性力矩理论, 可用下式表示^[6]:

$$\left. \begin{aligned} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w &= \frac{a^2}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w &= \frac{a^2}{c_0^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w &= -\frac{a^2}{c_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{a^2(1-\nu)}{Eh} \bar{p} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中微分算子有对称的形式

本文于1982年9月21日收到。

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\
 L_{22} &= \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \delta^2 \left[2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \\
 L_{33} &= 1 + \delta^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \\
 L_{12} &= L_{21} = \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} \\
 L_{13} &= L_{31} = -\nu \frac{\partial}{\partial \xi} \\
 L_{23} &= L_{32} = -\frac{\partial}{\partial \theta} + \delta^2 \left[(2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right] \\
 L_{11} &= \frac{l}{a} \xi = \frac{x}{a} \delta^2 = \frac{h^2}{12a^2} c_0^2 = \frac{E}{(1-\nu^2)\rho_s}
 \end{aligned}$$

其中 x 是轴向坐标, θ 为中心角. E 、 ν 和 ρ_s 是壳体材料的弹性模量、泊松比和密度. c_0 为壳材中声速. 因壳中液体无粘性, 表面允许滑移, 故沿壳面切向流体力消失, 仅有垂直壳面的液动压力 $\bar{P}$, 它由流体力学方程、壳面和端面边界条件确定. 式(1)的壳体振动方程也可用满足 Betti 互易定理和 Kirchhoff 唯一性定理的 Flügge、Donnell 和 Власов 方程代替.

设壳体作谐振动, 用梁函数逼近壳面位移^[6]其三个分量可表为:

$$\left. \begin{aligned}
 u &= \sum_m A_m \frac{L}{k_m} B'_m(\mu_m \xi) \cos n\theta e^{i\Omega t} \\
 v &= \sum_m D_m B_m(\mu_m \xi) \sin n\theta e^{i\Omega t} \\
 w &= \sum_m C_m B_m(\mu_m \xi) \cos n\theta e^{i\Omega t}
 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中 $B_m(\mu_m \xi)$ 是梁函数. $\mu_m = \frac{k_m}{L}$, k_m 是特征值. 它们由壳端支承条件确定. $B'_m(\mu_m \xi)$ 为梁函数对 ξ 的导数. Ω 是充液壳的自振频率.

式(2)代入式(1), 用 Галёркин 法, 得到充满液体圆柱壳自由振动的特征方程:

$$\begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

式中: $E_{11} = \mu_m^4 \alpha_{mj} + \frac{1-\nu}{2} n^2 \gamma_{mj} - \lambda^2 \gamma_{mj}$

$$E_{22} = \mu_m \left\{ \frac{1-\nu}{2} \beta_{mj} - n^2 \alpha_{mj} + \delta^2 [2(1-\nu) \beta_{mj} - n^2 \alpha_{mj}] + \lambda^2 \alpha_{mj} \right\}$$

$$E_{33} = \mu_m \left\{ \alpha_{mj} + \delta^2 [\mu_m^4 \alpha_{mj} - 2n^2 \beta_{mj} + n^4 \alpha_{mj}] - \lambda^2 \alpha_{mj} - \frac{a^2(1-\nu^2)}{Eh} (P_{dm} B_j) \right\}$$

$$\begin{aligned}
E_{12} &= -\frac{1+\nu}{2} \mu_m n \gamma_{mj}, & E_{13} &= \nu \mu_m \gamma_{mj} \\
E_{21} &= -\frac{1+\nu}{2} n \beta_{mj}, & E_{23} &= \mu_m \{ n \alpha_{mj} + \delta^2 [-(2-\nu) n \beta_{mj} + n^3 \alpha_{mj}] \} \\
E_{31} &= -\nu \beta_{mj}, & E_{32} &= \mu_m \{ -n \alpha_{mj} + \delta^2 [(2-\nu) n \beta_{mj} - n^3 \alpha_{mj}] \} \\
\alpha_{mj} &= \int_0^L B_m B_j d\xi, & \beta_{mj} &= \int_0^L B_m'' B_j d\xi, \\
\gamma_{mj} &= \int_0^L B_m' B_j' d\xi \\
\bar{P} &= P_d \cos n\theta e^{i\Omega t} = \sum_m C_m P_{dm} \cos n\theta e^{i\Omega t} \\
(P_{dm} \cdot B_j) &= \int_0^L F_{jm} B_j d\xi \\
\lambda^2 &= \frac{\Omega^2 Q^4}{c_0^2}, \quad m, j = 1, 2, 3, \dots
\end{aligned}$$

n 是周向波数.

式(3)是用梁函数逼近壳面位移的充液圆柱壳自由振动频率方程的一般形式. 对于不同的壳端支承条件, 选用与此相对应的梁函数式. 公式与空壳的频率方程主要差异在于式中包含广义液动压力 $(P_{dm} \cdot B_j)$, 这项不仅与壳两端支承条件, 液体在壳端面条件有关, 而更取决于壳面的运动特性. $(P_{dm} \cdot B_j)$ 一般是对称的, 只是在考虑基态流场影响时 $(P_{dm} \cdot B_j)$ 是非对称的, 这时有复的本征值. 由于低流速区域流速对壳频率的影响甚小, 可以忽略, 因此下节只讨论壳中静止液体在壳面扰动作用下的运动特性, 且液体充满壳体, 故而不存在重力影响.

三、壳面广义液动压力

设容器由长 l 的圆柱壳与同径刚性段 l_1 连接组成 (图 1). 顶、底为刚性平面. 容器内液体小扰动势流方程为:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi_i}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial \xi^2} &= 0 \\
(i &= 1, 2)
\end{aligned} \quad (4)$$

式中 ϕ_i 为液体流速势, 柱壳段 $i=1$, 刚性段 $i=2$. $L_1 = l_1/a$, $\rho = r/a$

壳内液动压力

$$\bar{P} = -\rho_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \quad (5)$$

式中 ρ_0 为液体密度.

柱面上的条件

$$\left. \frac{\partial \phi_1}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = a \frac{\partial w}{\partial t} \quad (0 < \xi < L) \quad (6)$$

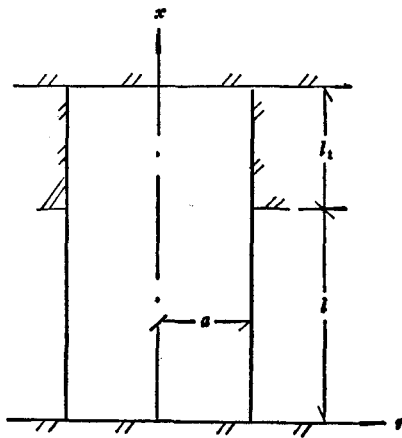


图 1

$$\left. \frac{\partial \phi_2}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = 0 \quad (L < \xi < L + L_1) \quad (7)$$

容器端面条件

$$\left. \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} \right|_{\xi=L+L_1} = 0 \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0 \quad (9)$$

柱壳与刚性段衔接处的连续条件:

$$\phi_1 = \phi_2, \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} = \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} \quad (\xi = L) \quad (10)$$

按分段法^[7]求解式(4)–(10). 设 $\phi_i = \varphi_i \cdot \cos n\theta \cdot e^{i\Omega t}$, 将 ϕ_i 代入式(4)–(10), 式(7)–(10)形式不变, 式(4)–(6)化为:

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2} \varphi_i + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \xi^2} = 0 \quad (11)$$

$$\bar{P} = \sum_m C_m P_{dm} \cos n\theta e^{i\Omega t} = -i\Omega \rho_0 \varphi_i \cos n\theta e^{i\Omega t} \quad (12)$$

壳面相容条件:

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = i\Omega a w \quad (13)$$

式中 $w = \sum_m C_m B_m(\mu_m \xi)$

柱壳段内令 $\varphi_1 = \psi + \frac{\rho^n}{n} i\Omega a w$, 代入式(11)和(13)得到:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2} \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = -\frac{\rho^n}{n} i\Omega a \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \quad (14)$$

壳面上有齐次条件

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = 0 \quad (15)$$

对 ψ 和 φ_2 分别用有限 Hankel 变换,

$$\{\bar{\psi}, \bar{\varphi}_2\}^T = \int_0^1 \rho \{\psi, \varphi_2\}^T J_n(S\rho) d\rho \quad (16)$$

式中 $J_n(S\rho)$ 是第一类 n 阶 Bessel 函数.

反演公式为

$$\{\psi, \varphi_2\}^T = \sum_s \frac{2J_n(S\rho)}{\left[1 - \frac{n^2}{S^2}\right] J_n^2(S)} \{\bar{\psi}, \bar{\varphi}_2\}^T \quad (17)$$

式中 S 是 $J_n'(S) = 0$ 的正根集.

式(14)变换后化为二阶常微分方程:

$$\frac{d^2 \bar{\psi}}{d\xi^2} - S^2 \bar{\psi} = -\frac{J_n(S)}{S^2} i\Omega a \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \quad (18)$$

式(18)的解易得,由齐次解和特解组成:

$$\bar{\varphi} = B e^{-s\xi} + C e^{s\xi} - iQa \frac{J_n(S)}{S^2} \sum_m C_m \frac{L^4}{k_m^4 - S^4 L^4} \times \{\mu_m^4 B_m(\mu_m \xi) + S^2 B_m''(\mu_m \xi)\} \quad (19)$$

由反演公式(17)求出原函数 ϕ , 于是柱壳段的势函数 φ_1 为:

$$\varphi_1 = \frac{\rho^n}{n} iQa \sum_m C_m B_m(\mu_m \xi) + \sum_s \frac{2J_n(S\rho)}{\left[1 - \frac{n^2}{S^2}\right] J_n^2(S)} \times \left\{ B e^{-s\xi} + C e^{s\xi} - iQa \sum_m C_m \frac{L^4}{k_m^4 - S^4 L^4} \cdot \frac{J_n(S)}{S^2} \times [\mu_m^4 B_m(\mu_m \xi) + S^2 B_m''(\mu_m \xi)] \right\} \quad (20)$$

同理,刚性段的 φ_2 为:

$$\varphi_2 = \sum_s \frac{2J_n(S\rho)}{\left[1 - \frac{n^2}{S^2}\right] J_n^2(S)} \{B_0 e^{-s\xi} + C_0 e^{s\xi}\} \quad (21)$$

式(20)和(21)中 B 、 C 、 B_0 和 C_0 四个常数可由二个端面条件以及刚性段与柱壳交接处二个连续条件建立的四个代数方程中求得,下面直接写出它们的结果:

$$C_0 = iQa \frac{J_n(S)}{S^2} \sum_m C_m \mathcal{A}(mS) \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(mS) = & \frac{e^{-2SL}}{S[e^{-2SL} - e^{2SL_1}]} \left\{ \text{ch } SL [SB_m(k_m) + B_m'(k_m)] \right. \\ & - [B_m'(0) + Se^{SL} B_m(k_m)] - \frac{L^4}{k_m^4 - S^4 L^4} \{ \mu_m^4 \text{ch } SL [SB_m(k_m) \\ & + B_m'(k_m)] - \mu_m^4 [B_m'(0) + Se^{SL} B_m(k_m)] + S^2 \text{ch } SL [SB_m''(k_m) \\ & + B_m'''(k_m)] - S^2 [B_m'''(0) + Se^{SL} B_m''(k_m)] \} \} \\ B_0 = & iQa \frac{J_n(S)}{S^2} \sum_m C_m \mathcal{F}(mS) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(mS) = & e^{2S(L+L_1)} \mathcal{A}(mS) \\ C = & iQa \frac{J_n(S)}{S^2} \sum_m C_m \mathcal{L}(mS) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(mS) = & \frac{L^4}{k_m^4 - S^4 L^4} \cdot \frac{e^{-SL}}{2S} \{ \mu_m^4 [SB_m(k_m) + B_m'(k_m)] + S^2 [SB_m''(k_m) \\ & + B_m'''(k_m)] \} - \frac{e^{-SL}}{2S} [SB_m(k_m) + B_m'(k_m)] + \mathcal{A}(mS) \\ B = & iQa \frac{J_n(S)}{S^2} \sum_m C_m \mathcal{B}(mS) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\mathcal{B}(mS) = \frac{L^4}{k_m^4 - S^4 L^4} \left\{ \frac{\mu_m^4 e^{-SL}}{2S} [SB_m(k_m) + B_m'(k_m)] + \frac{Se^{-SL}}{2} [SB_m''(k_m) \right.$$

$$+ B_m'''(k_m)] - \frac{1}{S} [\mu_m^4 B_m'(0) + S^2 B_m'''(0)] \Big\} + \frac{1}{S} B_m'(0) \\ - \frac{e^{-SL}}{2S} [SB_m(k_m) + B_m'(k_m)] + \mathcal{A}(mS)$$

将四个常数代入式(20)和(21)得 φ_1 、 φ_2 ，它们满足容器固壁条件，与壳面相容以及势函数在圆柱壳和刚性段交接处连续条件，解是适定的。

由 φ_1 、 φ_2 和式(12)，得到圆柱壳内和刚性段内任意点上的液动压力

柱壳段 $0 < \xi < L$

$$P_d = \sum_m C_m P_{dm} = \sum_m C_m a Q^2 \rho_0 \left\{ \frac{\rho^n}{n} B_m(\mu_m \xi) + \sum_s \frac{2J_n(S\rho)}{\left[1 - \frac{n^2}{S^2}\right] J_n(S) \cdot S^2} \right. \\ \cdot \left\{ \mathcal{B}(mS) e^{-S\xi} + \mathcal{L}(mS) e^{S\xi} - \frac{L^4}{k_m^4 - S^4 L^4} [\mu_m^4 B_m(\mu_m \xi) \right. \\ \left. + S^2 B_m''(\mu_m \xi)] \right\} \Big\} \quad (26)$$

刚性圆柱段 $L < \xi < L + L_1$

$$P_d = \sum_m C_m a Q^2 \rho_0 \sum_s \frac{2J_n(S\rho)}{\left[1 - \frac{n^2}{S^2}\right] J_n(S) \cdot S^2} \{ \mathcal{B}(mS) e^{-S\xi} + \mathcal{L}(mS) e^{S\xi} \} \quad (27)$$

式(26)中取 $\rho = 1$ ，得壳面液动压力，将其代入内积式 $(P_{dm} \cdot B_j)$ ，于是壳面广义液动压力化为：

$$(P_{dm} \cdot B_j) = a Q^2 \rho_0 \left\{ \frac{1}{n} \alpha_{mj} + \sum_s \frac{2}{\left[1 - \frac{n^2}{S^2}\right] S^2} \left\{ \mathcal{B}(mS) R(-S\mu_j) \right. \right. \\ \left. \left. + \mathcal{L}(mS) R(S\mu_j) - \frac{L^4}{k_m^4 - S^4 L^4} [\mu_m^4 \alpha_{mj} + S^2 \beta_{mj}] \right\} \right\} \quad (28)$$

式中 $R(x\mu_j) = \int_0^L e^{x\xi} B_j(\mu_j \xi) d\xi$ ， $\mu_j = \frac{k_j}{L}$ 。

式(28)是一端连接有圆柱形空腔的充液圆柱壳壳面广义液动压力。对于有半球形或半旋转椭球形顶盖的圆柱壳，顶盖内的流体只要在相应的球坐标或椭球坐标系内求解流体力学方程，然后与柱壳段的解衔接，就可得到满足全部流场条件的解。

四、数值结果和分析

本节对前面给出的公式做数值计算，为与国内现有的实验成果对比，我们分析两端简支，刚性段长度 $L_1 = 0$ 的圆柱壳。壳面位移函数中的梁函数可取为

$$B_m(\mu_m \xi) = \sin \frac{m\pi\xi}{L} \quad (29)$$

并且

$$\alpha_{mj} = \frac{L}{2} \delta_{mj} \quad \beta_{mj} = -\frac{m^2 \pi^2}{L^2} \alpha_{mj} \\ \gamma_{mj} = -\beta_{mj} \quad \mu_m = \frac{m\pi}{L}$$

δ_{mj} 为 kronecker 数.

式(3)化为

$$\begin{vmatrix} E_{11}^0 & E_{12}^0 & E_{13}^0 \\ E_{21}^0 & E_{22}^0 & E_{23}^0 \\ E_{31}^0 & E_{32}^0 & E_{33}^0 \end{vmatrix} = 0 \quad (30)$$

$$E_{11}^0 = \left(\mu_m^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 - \lambda^2 \right) \delta_{mj}$$

$$E_{22}^0 = \left(n^2 + \frac{1-\nu}{2} \mu_m^2 + \delta^2 [n^2 + 2(1-\nu)\mu_m^2] - \lambda^2 \right) \delta_{mj}$$

$$E_{33}^0 = [1 + \delta^2(\mu_m^4 + 2\mu_m^2 n^2 + n^4)] \delta_{mj} - \lambda^2 \left(\delta_{mj} + \frac{\bar{\rho}}{h} F_2 \right)$$

$$E_{12}^0 = E_{21}^0 = -\frac{1-\nu}{2} \mu_m n \delta_{mj}$$

$$E_{13}^0 = E_{31}^0 = \nu \mu_m \delta_{mj}$$

$$E_{23}^0 = E_{32}^0 = -[n + \delta^2(n^3 + (2-\nu)\mu_m^2 n)] \delta_{mj}$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_0}{\rho_s} \quad \bar{h} = \frac{h}{a}$$

$$F_2 = \frac{1}{n} \delta_{mj} + \sum_s \frac{2}{\left[1 - \frac{n^2}{S^2}\right] S^2 (S^2 L^2 + m^2 \pi^2)} \left\{ -m^2 \pi^2 \delta_{mj} \right. \\ \left. + \frac{2mj\pi^2 SL[(1 + e^{-2SL})(1 + (-1)^{m+j}) - 2e^{-SL}[(-1)^m + (-1)^j]]}{(1 - e^{-2SL})(S^2 L^2 + j^2 \pi^2)} \right\}$$

含液圆柱壳的自振频率为

$$f = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{\lambda}{2\pi a} \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho_s}} \quad (31)$$

分析表明,式(30)是一个对称正定阵. 式中与广义液动压力有关的项 F_2 含有主对角线以外的元素, $m \cdot j$ 一奇一偶时元素为零. 式(30)表示一个广义特征值问题, 其解法比空壳的普通代数特征值问题稍为复杂, 但已有成熟的算法可供使用.

计算参数选自文献[5]的实验装置, $a = 1.6$ 厘米, $l = 10$ 厘米, $h = 0.06$ 厘米, 密度比 $\bar{\rho} = \frac{1}{7.8}$, $\nu = 0.3$, $E = 2.1 \times 10^6$ 公斤/厘米². 为了比较壳内液体对壳体自振频率的影响, 同时算出空壳频率 f_0 . 计算的成果列于表 1、2 和图 2、3.

上列图表说明, 充满液体的圆柱壳比空壳的自振频率低, 这是附加质量的作用. 空壳与充液壳自振频率随周向波数的变化规律是一致的, $m = 1$ 时最易激发的周波数 $n = 2$. 轴向的波数增加, 最易激发的振动向高周波数迁移, 这说明空壳振动的能量极小原理, 在充液壳的自振分析中同样适用.

文献[5]的实验结果也列入图表. 理论计算与实验成果相比, 两者很好吻合.

图 4a 和图 4b 是充液圆柱壳振动的最易激发波数 n 与壳体刚度、相对长度的关系. 刚度减小最易激发振动的周波数高, 而壳体相对长度增加, 最易激发振动向低周波数迁

表 1 空壳的自振频率(Hz)

$m \backslash n$	1	2	3	4	5	6
1	7061	3161 (3428)*	4705 (4041)	8601	13792	20162
2	19006	9329	6895 (7255)	9426 (9016)	14319	20619
3	29588	16817	11193 (10034)	11423	15445	21478
4	37236	23864	16361	14547	17305	22824
5	42085	29831	21579	18367	19868	24696

* 括号内为实验数据^[2].

表 2 充液壳的自振频率(Hz)

$m \backslash n$	1	2	3	4	5	6
1	4437	2069 (2236)*	3316 (2890)	6413	10722	16181
2	11866	6181	4893 (4895)	7054 (6245)	11157	16571
3	18009	11212	8008 (7017)	8594 (8283)	12076	17300
4	21506	15966	11802	11014	13590	18437
5	26260	20040	15693	13999	15679	20019

* 同表1.

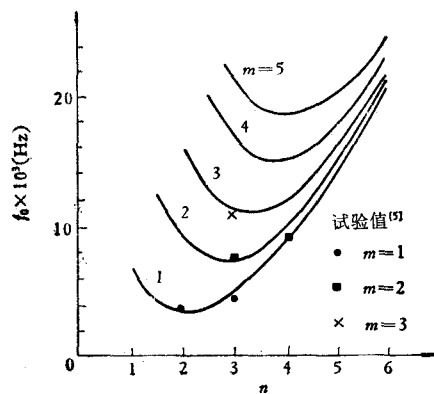


图 2 空壳频率与周波数关系

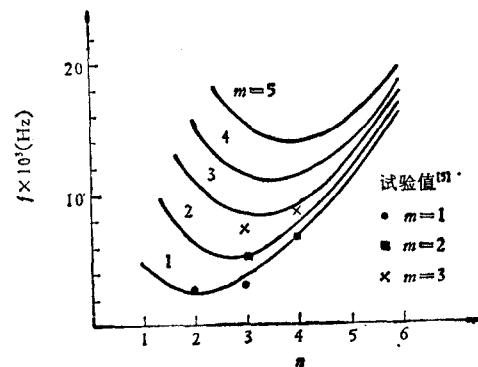


图 3 充液壳频率与周波数关系

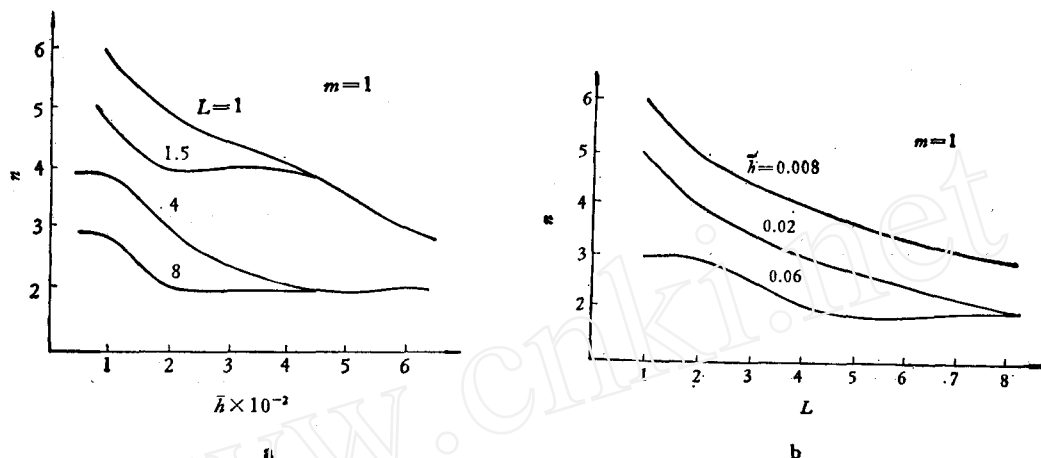


图 4

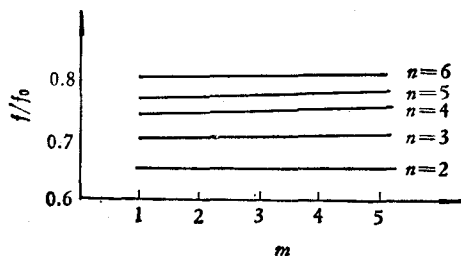


图 5

移,并不存在一个固定的最易激发振动的周波数。

此外,采用振型迭加计算动力反应时,不仅用最低频率,而且也要高阶频率的数值,为了方便常引入附加质量,这是与频率比有关的参数。图 5 绘出不同周波数时频率比与轴向振型的关系,频率比随 m 变化甚微,而随周向波数变化大。对计算的条件,似可对同一周波数取相同的附加质量数值。

五、结 语

充满壳内的液体明显降低壳体的自振频率,这对低频环境中运行的设备是不利的因素。振动最易激发波数的变化规律与空壳相似,随壳体刚度增加和壳体相对长度加大而减小,不存在一个固定的最易激发周波数。

文中求解流体力学方程的分段积分变换法有较好的适应性,可用于其他端部条件的圆柱壳体。对于部份充液壳,因液面线性或非线性晃动影响,使弹性壳与液体相互作用现象更为复杂,需做专门讨论。

参 考 文 献

- [1] 郑哲敏, 力学学报, **2**, 2(1958).
- [2] Stillman, W. E. *J. Sound and Vibration*, **30**, 4 (1973).
- [3] Au-Yang, M. K., *T ASME Series E J. A. M.*, **43**, 3 (1976).
- [4] Cummings, G. E. et al., *T ASME Series E. J.A.M.*, **46**, 4 (1979).
- [5] 姚伟达、张慧娟, 核反应堆结构中的力学问题(论文集), 原子能出版社 (1978).
- [6] Гольденвейзер, А. Л., 弹性薄壳理论(薛振东等译)第十, 十六章, 上海科技出版社 (1963).
- [7] 朱大同, 力学学报, 特刊 (1981).

ON THE FREE VIBRATION OF A CIRCULAR CYLINDRICAL SHELL FILLED WITH LIQUID

Zhu Datong

(Nanjing College of Hydronautic Engineering)

Abstract

This paper deals with the free vibration of a finite circular cylindrical shell filled with *in compressible*, inviscous liquid. The shell connects with a circular cylindrical cavity surrounded by a rigid wall. The dynamic equations of the shell are based upon an exact moment theory, the displacements of the shell are approached by means of the functions of beam. The fluid dynamic equations in both the shell and cavity are reduced by the finite Hankel transformation. It is proved that the solutions obtained satisfy all the boundary conditions. In the present analysis the interaction between liquid and the structure is represented by generalized fluid pressure, so that the problem of free vibration of an elastic cylindrical shell filled with liquid is reduced to solving a generalized algebra eigenvalue problem.

In order to compare the solution with experimental data, the free vibration of a simple supported circular cylindrical shell with rigid slabs on both ends is studied. The natural frequencies of the empty and filled liquid shells are calculated. The numerical results show the relation between frequency and circumferential wave number, and the most easily excitable mode. Results of theoretical calculation agree with the experimental data.