

时间推进有限面积流线迭代法及其在 平面叶栅跨音速绕流中的应用

沈孟育

(清华大学)

陈细佛

(武汉海军工程学院)

提要 本方法可视为时间推进有限面积法和流线迭代法的一种结合。在本方法中,网格是由一族流线及一族固定的节距线所形成的。流线的位置预先并不知道,在计算过程中需要逐步加以修正。采用流线作为一族网格线可使网格线的分布更为合理,并使差分格式大大简化。

支配方程

对于无粘可压缩完全气体的平面、绝热定常流动,支配方程如下^[1]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_A \rho dA - \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_A \rho u dA - \oint_S [(p + \rho u^2)\mathbf{i} + \rho uv\mathbf{j}] \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_A \rho v dA - \oint_S [\rho uv\mathbf{i} + (p + \rho v^2)\mathbf{j}] \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (3)$$

$$\frac{c_p}{R} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) = h_0 = \text{const} \quad (4)$$

边界条件

在图1中示出了一个典型叶栅流动问题的求解域及其边界。应该指出,周期性区域的边界 \widehat{AB} , \widehat{HG} 和 \widehat{CD} , \widehat{FE} 都是流线,它们的位置事先并不知道,而是计算的结果。

应用特征分析可得关于边界条件的如下结论^[2]:

1. 在进口边界 \overline{AH} 上,若进口轴向 M_a 数小于1,则必须规定三个条件。在我们的计算中, p_0 、 T_0 、 β_1 是给定的。

2. 在出口边界 \overline{DE} 上,若出口轴向速度是亚音的,则只须规定一个条件,例如可给定 p_2 。

本文于1982年12月20日收到,曾在第二届亚洲流体力学会议上宣读。

3. 在叶片表面上, 局部表面倾角是规定的. 对于不可穿透壁面而言, 必要和充分的条件是垂直于壁面的速度为零.

4. 在周期性边界 \widehat{AB} , \widehat{HG} 和 \widehat{CD} , \widehat{FE} 上, 必须规定周期性条件. 流动的周期性意味着在诸如 N 和 N' , M 和 M' 等的相应点处流动参数是相等的.

求解域的离散化

用流线和节距线将图 1 中的求解域离散化. 如上面提到的那样, 一族网格线——节距线是固定的, 但另一族网格线在计算过程中必须逐步调整以保证这些拟流线逐渐地收敛于真实的流线.

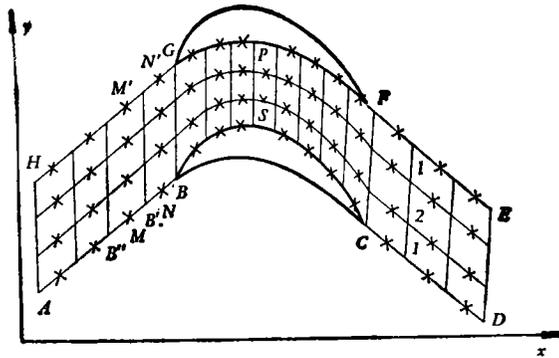


图 1 求解域, 网格线和计算点

1. 叶片通道外周期性区域中第一条拟流线 \widehat{AB} 和 \widehat{CD} 位置的调整

从前缘 B 出发, 利用刚算出的计算点 N 处的 (v/u) 值, 我们可以定出 B' 点, 并用同样方法可逐步地定出 B'' 点, …… 这样我们得到了第一条拟流线 \widehat{AB} 的新位置. \widehat{CD} 的新位置也可用相同的方法得到.

周期性区域边界 \widehat{HG} 和 \widehat{FE} 也是拟流线. 它们分别平行于拟流线 \widehat{AB} 和 \widehat{CD} , 其间的 y 向距离等于栅距.

2. 其余拟流线位置的调整

首先计算出通过各个截面的流量 $G(I)$. 当流场比较接近于稳定状态时, 各个不同截面上的流量基本上差不多. 设第 I 截面处第一条拟流线上的格点为 H_1 , 其 y 向坐标为 y_1 , 轴向密流为 $\rho_1 u_1$, 而调整后的 y 向坐标为 y'_1 ; 第二条拟流线上的格点为 H_2 , 其 y 向坐标为 y_2 , 轴向密流为 $\rho_2 u_2$; 则调整后的第二条拟流线上格点 H'_2 的纵坐标 y'_2 可按式确定:

$$\tilde{y}_2 = y'_1 + \frac{2G(I)}{(K-1)(\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2)} \quad (5)$$

$$y'_2 = y_2 + \Omega(\tilde{y}_2 - y_2) \quad (6)$$

其中, K 为拟流线的总数, Ω 为松弛因子.

差分格式

1. 基本格式

基本格式 I——J. D. Denton 格式为:

$$\begin{aligned} \rho_{i,j}^{(n+1)} = & \rho_{i,j}^{(n)} + \frac{\Delta t}{\Delta A_{i,j}} \left[-(\rho u)_{i,j}^{(n)} (y_{i+\frac{1}{2},j+1} - y_{i+\frac{1}{2},j-1}) + (\rho u)_{i-1,j}^{(n)} (y_{i-\frac{1}{2},j+1} - y_{i-\frac{1}{2},j-1}) \right. \\ & + (\rho u)_{i,j+1}^{(n)} (y_{i+\frac{1}{2},j+1} - y_{i-\frac{1}{2},j+1}) - (\rho v)_{i,j+1}^{(n)} (x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}) \\ & \left. - (\rho u)_{i,j-1}^{(n)} (y_{i+\frac{1}{2},j-1} - y_{i-\frac{1}{2},j-1}) + (\rho v)_{i,j-1}^{(n)} (x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}) \right] \quad (7) \end{aligned}$$

$$p_{i,j}^{(n+1)} = \frac{R}{c_p} \rho_{i,j}^{(n+1)} \left[h_0 - \frac{1}{2} (u^2 + v^2)_{i,j}^{(n)} \right] \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (\rho u)_{i,j}^{(n+1)} = & (\rho u)_{i,j}^{(n)} + \frac{\Delta t}{\Delta A_{i,j}} \left\{ -[p_{i+1,j}^{(n+1)} + (\rho u^2)_{i,j}^{(n)}] (y_{i+\frac{1}{2},j+1} - y_{i+\frac{1}{2},j-1}) + [p_{i,j}^{(n+1)} \right. \\ & + (\rho u^2)_{i-1,j}^{(n)}] (y_{i-\frac{1}{2},j+1} - y_{i-\frac{1}{2},j-1}) + [p_{i,j+1}^{(n+1)} + (\rho u^2)_{i,j+1}^{(n)}] (y_{i+\frac{1}{2},j+1} \\ & - y_{i-\frac{1}{2},j+1}) - (\rho uv)_{i,j+1}^{(n)} (x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}) - [p_{i,j-1}^{(n+1)} + (\rho u^2)_{i,j-1}^{(n)}] (y_{i+\frac{1}{2},j-1} \\ & \left. - y_{i-\frac{1}{2},j-1}) + (\rho uv)_{i,j-1}^{(n)} (x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}) \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\rho v)_{i,j}^{(n+1)} = & (\rho v)_{i,j}^{(n)} + \frac{\Delta t}{\Delta A_{i,j}} \left\{ -(\rho uv)_{i,j}^{(n)} (y_{i+\frac{1}{2},j+1} - y_{i+\frac{1}{2},j-1}) + (\rho uv)_{i-1,j}^{(n)} (y_{i-\frac{1}{2},j+1} \right. \\ & - y_{i-\frac{1}{2},j-1}) + (\rho uv)_{i,j+1}^{(n)} (y_{i+\frac{1}{2},j+1} - y_{i-\frac{1}{2},j+1}) - [p_{i,j+1}^{(n+1)} \\ & + (\rho v^2)_{i,j+1}^{(n)}] (x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}) - (\rho uv)_{i,j-1}^{(n)} (y_{i+\frac{1}{2},j-1} - y_{i-\frac{1}{2},j-1}) \\ & \left. + [p_{i,j-1}^{(n+1)} + (\rho v^2)_{i,j-1}^{(n)}] (x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}) \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

由于通过流线的质量和动量通量都为零,所以若将流线作为一族网格线,可使差分格式大大简化。我们把采用流线网格线后得到的新格式称为基本格式 II。其具体表达式如下:

$$\begin{aligned} \rho_{i,j}^{(n+1)} = & (\rho)_{i,j}^{(n)} + \frac{\Delta t}{\Delta A_{i,j}} \left[-(\rho u)_{i,j}^{(n)} (y_{i+\frac{1}{2},j+1} - y_{i+\frac{1}{2},j-1}) \right. \\ & \left. + (\rho u)_{i-1,j}^{(n)} (y_{i-\frac{1}{2},j+1} - y_{i-\frac{1}{2},j-1}) \right] \quad (11) \end{aligned}$$

$$p_{i,j}^{(n+1)} = \frac{R}{c_p} \rho_{i,j}^{(n+1)} \left[h_0 - \frac{1}{2} (u^2 + v^2)_{i,j}^{(n)} \right] \quad (12)$$

$$\begin{aligned} (\rho u)_{i,j}^{(n+1)} = & (\rho u)_{i,j}^{(n)} + \frac{\Delta t}{\Delta A_{i,j}} \left\{ -[p_{i+1,j}^{(n+1)} + (\rho u^2)_{i,j}^{(n)}] (y_{i+\frac{1}{2},j+1} - y_{i+\frac{1}{2},j-1}) \right. \\ & + [p_{i,j}^{(n+1)} + (\rho u^2)_{i-1,j}^{(n)}] (y_{i-\frac{1}{2},j+1} - y_{i-\frac{1}{2},j-1}) + p_{i,j+1}^{(n+1)} (y_{i+\frac{1}{2},j+1} \\ & - y_{i-\frac{1}{2},j+1}) - p_{i,j-1}^{(n+1)} (y_{i+\frac{1}{2},j-1} - y_{i-\frac{1}{2},j-1}) \left. \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

$$v_{i,j}^{(n+1)} = u_{i,j}^{(n+1)} (y_{i+\frac{1}{2},j} - y_{i-\frac{1}{2},j}) / (x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}) \quad (14)$$

可以看出,同基本格式 I 相比较,基本格式 II 可将每一时间步每一计算点上所需计算时间约减少到 1/2。

2. 修正格式

上述基本格式 I 和 II 的精度为一阶。为了提高基本格式 I 和 II 的精度,应用了文献 [2] 中提出的修正格式。

3. 边界计算点上流动参数的确定方法也和文献[2]中的相同.

初始流场的规定和逐步加密网格技术的应用

用来规定初始流场的方法如下: 假定压力沿 y 方向是均匀的, 而沿轴向则呈线性变化. 在均熵假设下, 从压力场就能容易地算出密度场. 然后按能量方程计算出 $|V|$. 最后, 从刚算出的速度以及初始拟流线的倾角即可算出 u 和 v .

初始场的好坏将大大影响计算过程的收敛速度. 本计算中采用逐步加密网格技术. 先在稀网格上进行计算, 待解基本趋近稳定后, 再用密网格进行计算. 此时由稀网格上的计算结果, 用线性插值得到密网格的初始场. 一般说来, 这样得到的密网格的初始场是相当好的, 它能使密网格上的计算过程加速收敛.

实 例 计 算

为了表明上述方法的有效性和灵活性, 选择了三个具有典型意义的例子作为考核对象.

在计算过程中, 我们从第 501 时间步开始修正拟流线, 且每隔 10 个时间步修正一次. 引进符号 SY_j :

$$SY_j \equiv \max_i |y_{i,j}^{(m)} - y_{i,j}^{(m-1)}|$$

该处上标 (m) 表示拟流线修正的次数.

从第 601 时间步起, 用基本格式 II 替代基本格式 I.

1. 修正拟流线过程的收敛性

图 2 是从下面第一个例子中得到的一个结果. 全部 SY_j , ($j = 1, 2, \dots, 7$) 都落在图 2 中所示两条曲线之间的窄条之中. 这表明, 拟流线单调并很快地收敛于真实流线.

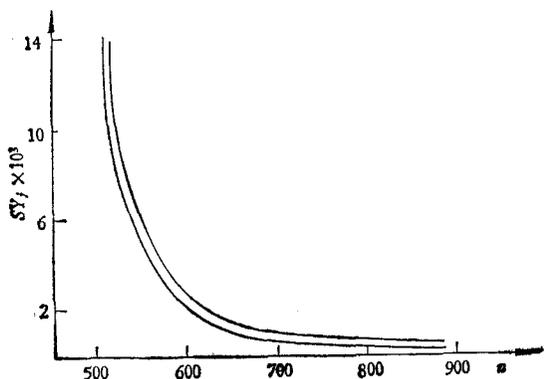


图 2 拟流线迭代的收敛性

2. 例 1: Hobson 冲击式涡轮叶栅中的跨音流动. 在这个例子中, 进、出口处的流动都是亚音速的, 而靠近吸力面中心有一个嵌入超音区. 流动是没有激波的.

在图 3 中, 计算得到的表面速度分布同速度图法中的设计数据作了比较. 符合程度

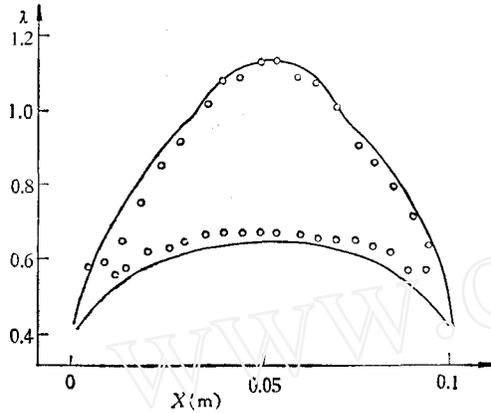


图3 Hobson 冲击式涡轮叶栅的表面速度分布——精确解, O 本方法

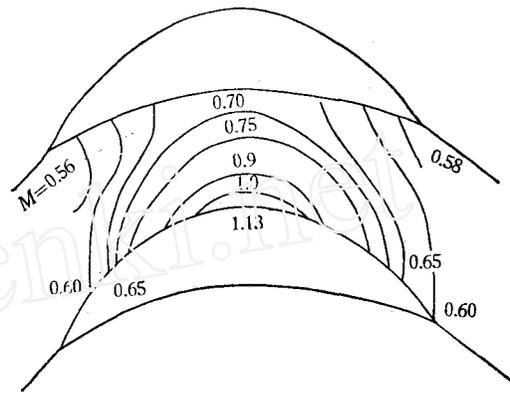


图4 Hobson 叶栅槽道内 Ma 数分布

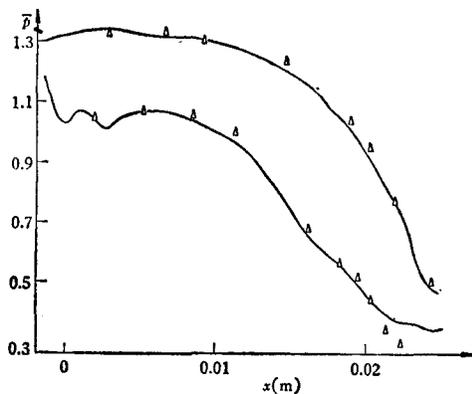


图5 624 叶片叶面压力分布

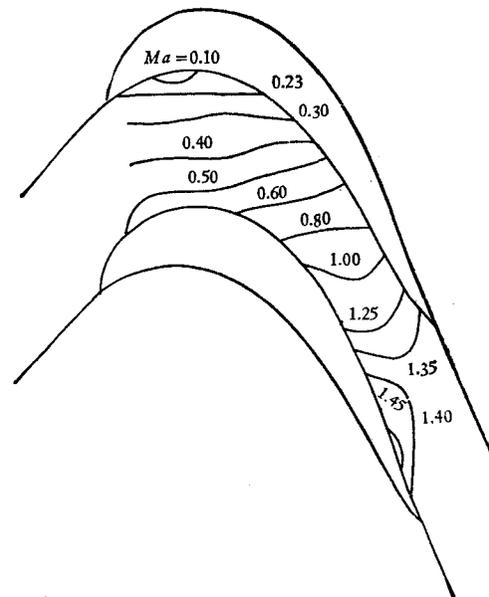


图6 624 叶栅槽道内 Ma 数分布

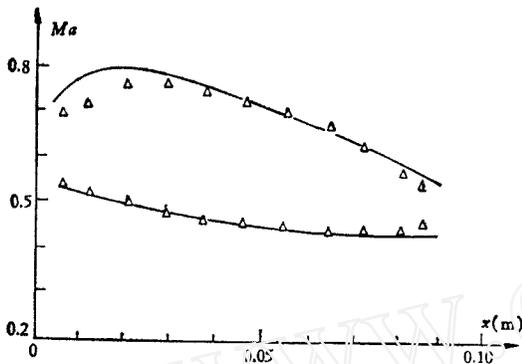
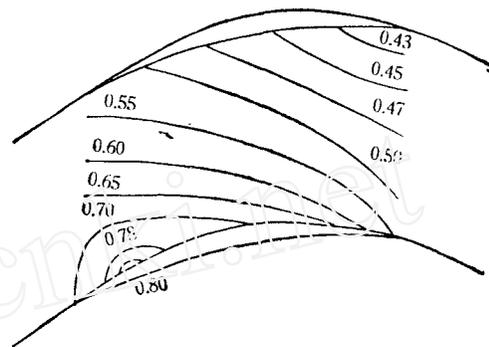
是好的. 在图4中示出了计算所得叶栅槽道内 Ma 数分布, 其对称性相当好, 这从另一方面说明了计算的可靠性.

3. 例2: 624 涡轮叶栅中的跨音流动

这个例子讨论的叶栅流动在进口处是亚音而在出口处则是超音的. 流场中存在激波.

图5示出了预示的和实验的表面压力分布的比较. 它们之间的吻合程度是很好的. 计算所得叶栅槽道内的 Ma 数分布由图6所示.

4. 例3: 高弯度双圆弧压气机平面叶栅的亚音速绕流.

图 7 高弯度双圆弧压气机叶栅叶面 Ma 数分布— 本方法 \triangle 实验数据^[4]图 8 高弯度双圆弧压气机叶栅槽道内的 Ma 数分布

在图 7 中比较了计算和实验得到的叶片表面 Ma 数分布。由图可见,吻合程度是令人满意的。而计算所得叶栅槽道内的 Ma 数分布示于图 8 中。

参 考 文 献

- [1] Denton, J. D., A time marching method for two- and three-dimensional blade to blade flows, ARC R & M, 3775 (1975).
- [2] 张耀科、沈孟育、龚增锦, 平面叶栅跨音速绕流的数值试验, 计算数学, 4(1978).
- [3] Hobson, D., A hodograph method for design of transonic turbine blades, CUED/A-Turbo/TR, 40 (1972).
- [4] Breugelmans, F. A. E., The cascade and stator section performance of a 48° cambered DCA airfoil N79-22486.

A TIME MARCHING FINITE AREA STREAMLINE ITERATION METHOD AND ITS APPLICATION TO TRANSONIC FLOW AROUND PLANE CASCADE

Shen Mengyu

(Tsinghua University)

Chen Xidi

(Wuhan Institute of Naval Technology)

Abstract

The present method can be regarded as a combination of the time marching finite area method and the streamline iteration method. The grid used in this method is formed by a set of streamlines which are unknown in advance and have to be iterated successively in the process of computation and a set of fixed pitchwise lines. The use of streamlines as gridlines makes the distributions of gridlines more reasonable; it also greatly simplifies the finite difference scheme.