

# 关于奇异摄动理论在自引力 介质波动中的应用<sup>1)</sup>

岳 曾 元

(北京大学地球物理系)

**提要** 本文通过自引力介质中波动的两个具体实例,讨论了与应用奇异摄动法有关的一些问题。第一个实例是密度波理论中遇到的带有三个迴转点(其中两个相距很近)的复本征值问题,指出:由于此问题中迴转点分布的几何结构敏感地依赖于复本征值  $\omega$ , 因此,即使为了求得初级近似的一致有效渐近解,也必须事先对于复本征值  $\omega$  对摄动参数  $\lambda$  的依赖性作某些明显的分析:将  $\omega(\lambda)$  展成级数  $\omega = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j \lambda^{-j}$ , 并根据问题中的辐射条件,估计出  $\omega$  的实、虚部关于  $\lambda$  的不同量阶。这是此问题分析过程中的关键性步骤。这一作法在形式上与通常的变形参数法(Lindstedt-Poincaré 方法)有些类似,但实质并不相同。第二个实例是自引力介质中弱非线性波的渐近周期解及色散关系。指出:倘若采用展开式  $\omega = \omega_0(k) + \varepsilon \omega_1(k) + \varepsilon^2 \omega_2(k) + \dots$  (其中  $\omega$  为频率,  $k$  为波数),则所得弱非线性色散关系当  $\lambda \rightarrow \lambda_J$  (Jeans 波长)时不一致有效。本文在分析了产生这种不一致有效性原因的基础上,改用展开式  $k = k_0 + \varepsilon k_1(\omega) + \varepsilon^2 k_2(\omega) + \dots$ 。于是,不但弱非线性渐近解关于  $(x, t)$  一致有效(当波长  $\lambda$  固定),而且弱非线性色散关系关于波长  $\lambda$  也一致有效。从而指出在此问题以及其它类似问题中根据物理特点适当选取变形参数的必要性。

## 一、引 言

自然界和工程技术领域存在着大量实际问题,如果对他们采用简单的(或正则的)摄动法会遇到困难,即出现这样或那样的不一致有效。从上一世纪 Lindstedt 和 Poincaré 用变形参数法处理行星轨道摄动问题以来,各种各样的奇异摄动法陆续出现,用来克服各种各样的不一致有效的困难。从本世纪四十年代末以来,奇异摄动理论得到更迅速的发展,并有效地推动了对于大量问题(力学的,物理学的,天文学的,工程技术方面的问题)的研究。郭永怀教授本人曾对奇异摄动理论作出过重要贡献<sup>[1]</sup>。他将 Poincaré-Lighthill 方法应用于边界层流动,使这一方法得到重要的推广。为此,钱学森深入地阐释了这一方法的重要性,并称它为 PLK 方法。

奇异摄动理论作为应用数学的一个重要部分,是在解决各种实际问题中产生的。即使是一种较为成熟的方法,当用于新问题时,也常需要根据新问题的特点灵活地作某些变通。

在本文中,我们将通过自引力介质中波动的两个实例来进一步说明奇异摄动理论的

本文于 1983 年 5 月 7 日收到。

1) 谨以此文纪念作者的导师郭永怀教授逝世十五周年。

这一特点.

## 二、旋涡星系密度波理论中的迴转点问题

首先,为了对比起见,我们来讨论另一个较简单的、带有两个迴转点的本征值问题.

例 1. 考虑方程<sup>1)</sup>

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [\lambda^2 q_1(x, \omega) + q_2(x)]y = 0 \quad (2.1)$$

其中  $\lambda$  为一可连续取值的大参数,  $\omega$  为本征值,  $q_1$  具有两个实零点  $\mu_1$  和  $\mu_2$  ( $\mu_2 > \mu_1$ , 它们应与  $\omega$  有关),  $q_1$  在  $\mu_1$  和  $\mu_2$  之间为正. 边界条件为

$$y \text{ 正则, 当 } x \rightarrow \pm\infty \quad (2.2)$$

运用和文献[2]中同样的方法,可求出此问题当  $\lambda$  大时的一致有效渐近解

$$y = \begin{cases} \frac{a_1}{\sqrt{\phi_1'(x)}} \text{Ai}[-\lambda^{2/3}\phi_1(x)] & -\infty < x < \mu_2 - \delta \\ \frac{a_2}{\sqrt{\phi_2'(x)}} \text{Ai}[-\lambda^{2/3}\phi_2(x)] & \mu_1 + \delta < x < +\infty \end{cases} \quad (2.3)$$

其中  $\phi_1$  和  $\phi_2$  为  $x$  的适当变换,而  $\lambda q_1(x, \omega)$  则必须满足如下量子条件<sup>[2]</sup>

$$\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_2} \sqrt{q_1(x, \omega)} dx = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \quad (2.5)$$

现在我们来着重讨论一下这一量子条件. 由于迴转点  $\mu_1$  和  $\mu_2$  是函数  $q_1(x, \omega)$  的零点, 它们应为  $\omega$  的函数,可分别记为  $\mu_1(\omega)$  和  $\mu_2(\omega)$ . 于是,量子条件(2.5)可改写成

$$\lambda \int_{\mu_1(\omega_n)}^{\mu_2(\omega_n)} \sqrt{q_1(x, \omega_n)} dx = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \quad (2.6)$$

对于给定的  $\lambda$ , 这是确定  $\omega_n$  的代数方程. 既然  $\lambda$  是此方程中的参数, 当  $\lambda$  变化时, 一般说来,  $\omega_n$  也应随着改变. 故应有

$$\omega_n = \omega_n(\lambda) \quad (2.7)$$

于是也有

$$\left. \begin{aligned} \mu_{1n} &= \mu_1[\omega_n(\lambda)] \\ \mu_{2n} &= \mu_2[\omega_n(\lambda)] \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

这就是说,在  $\lambda \rightarrow \infty$  的过程中,不但本征值系列  $\omega_n$  依赖于  $\lambda$ , 迴转点位置也依赖于  $\lambda$ . 然而,对于此例子而言,我们无需事先对这些依赖性作明显的分析,这是因为渐近解(2.3)和(2.4)的推导只用到  $\lambda$  大这一条件和边界条件(2.2),而迴转点位置随  $\lambda$  的细微变化对于解的性态和求解的分析过程并不产生重要的影响. 与此相对比,我们下面将指出,在密度波理论中所遇到的更复杂的迴转点问题中,对于本征值和迴转点位置对  $\lambda$  的依赖性事先作明显的分析是必要的.

对盘状星系中的螺旋结构问题作了若干数学上的简化之后,可归结为如下的本征值问题[3,4].

1) 此例与文献[2]p. 342—344所述的例子类似. 唯一不同的是,那里  $q_1$  只是  $x$  的函数,大参数  $\lambda$  本身为本征值,取离散值;这里  $\lambda$  为可连续取值的大参数,  $\omega$  为本征值,取离散值.

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dr^2} + K^2(r, \omega)u = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} K^2 = (\kappa/a)^2 \left[ (Q^{-2} - 1 + \nu^2) + O\left(\frac{a}{\kappa r}\right) \right] \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} u \text{ 正则, 当 } r \rightarrow 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\begin{cases} u \text{ 中波动因子} \sim e^{-i \int^r K dr} \end{cases} \quad (2.12)$$

(2.12)即为辐射条件,物理上表示在共转圈以外波能向外传播。(2.10)式中各量物理意义如下:

$$\nu = (\omega - mQ)/\kappa, \quad (2.13)$$

其中  $Q(r)$  为星系旋转曲线,  $\kappa$  由  $Q(r)$  按如下方式决定

$$\kappa^2 = (2Q)^2 \left( 1 + \frac{r}{2Q} \frac{dQ}{dr} \right), \quad (2.14)$$

$\omega$  为复本征频率

$$\omega = \omega_r + i\omega_i, \quad (2.15)$$

$a$  为基态的“等效声速”,模拟星的弥散速度,而  $Q$  为反映基态关于轴对称扰动稳定程度的一个参量,它随  $r$  变化的典型形式如图1所示。图中  $r_{co}$  为共转圈位置。由于  $\omega$  是复的,  $K^2$  也是复的,它的实部随  $r$  变化的形状如图2所示。由于在盘状星系的盘部分中

$$\kappa r_*/a \gg 1 \quad (2.16)$$

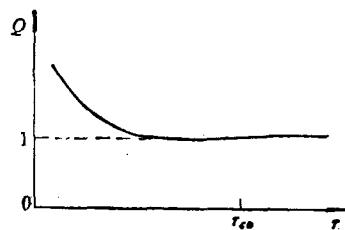


图1 函数  $Q(r)$  的典型形状。注意,这种形状并非密度波渐近理论所必需。事实上,只需  $Q-1$  在  $r_{co}$  附近较小,而在内部迅速增加即可

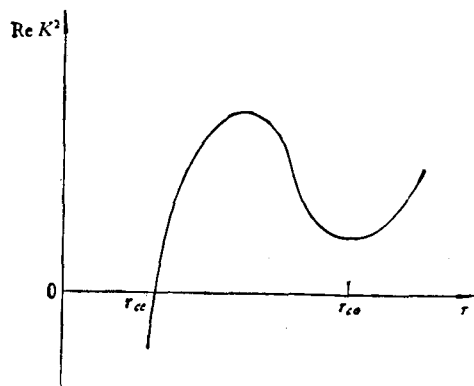


图2  $\text{Re } K^2$  的大致形状

( $r_*$  为盘部分一典型尺度),如引进大参数  $\lambda \left[ \frac{\kappa r_*}{a} = O(\lambda) \right]$ , 则只要作适当无量纲化, (2.18)式中因子  $(\kappa/a)^2$  便对应于  $\lambda^2$ 。于是,(2.9)–(2.12)是与例1类似的带有大参数和迴转点的本征值问题。然而,此问题与例1相比,除了  $r \rightarrow +\infty$  的边界条件换成辐射条件外,迴转点的个数和分布也较例1更为复杂。首先,  $K^2$  在复  $r$  平面上有三个一级零点(迴转点),其中一个在  $r_{co}$  附近,另外两个在  $r_{co}$  附近:一个在实轴上方,一个在实轴下方,两者距离为  $\lambda^{-1/2}$  量阶。在文献[4]中,作者曾仔细分析了这一问题,并求出了此问题的一致有效渐近解:

$$u = \begin{cases} c_1 [\phi_1(r, \lambda)]^{-1/2} \text{Ai}[-\lambda^{2/3} \phi_1(r, \lambda)] & (-\infty < r < r_{co} - \delta) \\ \hat{c}_2 \left[ \frac{\lambda^2 q_1(r, \lambda)}{z_*^2 + \sigma_*} \right]^{-1/4} D_{-\frac{1}{2}(1+i\sigma_*)}[(1+i)z_*] & (r_{ce} + \delta < r < \infty) \end{cases} \quad (2.17)^{1)} \\ (2.18)$$

和如下的量子条件

$$\int_{r_{ce}}^{r_{co}} K dr = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi + \mathcal{F}(\alpha), \quad (2.19)$$

其中

$$\mathcal{F}(\alpha) = \frac{i}{2} \ln \frac{(2\pi)^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1+i\alpha)\right)} + \frac{\alpha}{4} \left[1 + \ln \frac{2}{\alpha} + \frac{\pi}{2} i\right], \quad (2.20)$$

$$\alpha = \left\{ K^2 / \left[ \frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} \text{Re} K^2 \right]^{1/2} \right\}_{r=r_{co}}. \quad (2.21)$$

(2.17)、(2.18)式中  $\phi_1$  和  $z_*$  是自变量  $r$  的适当的变换,而

$$\sigma_* = \frac{2}{\pi i} \int_{r_{02}}^{r_{01}} K dr, \quad (2.22)$$

$r_{02}$  和  $r_{01}$  为  $r_{co}$  附近在实轴下方和上方的回转点,而  $\text{Ai}$  和  $D$  分别表示 Airy 函数和抛物柱型函数. 常数  $c_1$  和  $\hat{c}_2$  的关系为

$$c_1 = \hat{c}_2 (-1)^{n+1} 2^{1/2} i \lambda^{3/4} e^{(1/8)(1+2i\sigma_*)\pi i} \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{2}(1+i\sigma_*)\right) \right\}^{-1/2}. \quad (2.23)$$

(上述结果详见文献[4]). 这里只讨论与本文主题有关的一点,即: 在此问题中对于  $\omega(\lambda)$  这一依赖关系事先作某些明显分析的必要性. 事实上,林家翘和刘汝莹<sup>[3]</sup>首先针对这一问题的一个简化情形,即  $K^2$  在  $r_{co}$  处有一个二级零点的情形得出过一致有效渐近解和量子条件,并阐明了波传播和增长的物理机制. 后来,文献[5,6]考虑了比二级零点更一般的情况,得出了一些改进,但由于不是从密度波理论本来的方程[见(2.9)–(2.10)]出发,而是从某种简化的模型出发,这使得共转点  $r_{co}$  附近  $K^2$  的细致结构(包括  $r_{co}$  附近两个回转点的分布等)不能得到完全恰当的反映,这一点也影响分析过程. 正如文献[4]所指出的,要对  $K^2$  在  $r_{co}$  附近的性态作出正确的分析,必须分析  $\omega$  对  $\lambda$  的依赖性. 具体地说,必须在解问题之前先判定  $\omega_r$  和  $\omega_i$  关于  $\lambda$  的量阶. 文献[4]中的作法是,令

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 \lambda^{-1} + \dots \quad (2.24)$$

用辐射条件(2.12)可得出: (i)  $\omega_0$  必须为实数,换言之,

$$\omega_r = O(1), \quad \omega_i = O(\lambda^{-1}) \quad (2.25)$$

和 (ii)  $Q$  与 1 之差在共转点处为  $\lambda^{-1}$  量阶:

$$(Q - 1)_{r=r_{co}} = O(\lambda^{-1}) \quad (2.26)$$

于是,由(2.10)式可知,  $K^2$  的主项在实轴上有二级零点,而  $\omega_i$  对  $K^2$  的贡献则并入一阶项之中. 由此,当  $\lambda$  充分大时,  $r_{co}$  附近两个回转点必然分布于实轴异侧,而由所得量子条件定出的  $\omega_i$  也的确为  $\lambda^{-1}$  量级,从而得到完全自洽的分析(详见文献[4]).

应指出,展开式(2.24)形式上颇类似于“变形参数法”,但实际的含意却不同. 通常的

1) (2.17), (2.18) 式适用于复平面上相当宽广的区域,两者的渐近匹配也可在复平面上的相应公共适用区域内进行.

“变形参数法”是为了清除高阶近似中的久期项之类的目的而确定  $\omega_1$  等等, 这里却是为了使初级近似解当  $\lambda$  大时满足辐射条件而来首先确定  $\omega_0$  是实数还是虚部不为零的复数. 换句话说, 确定  $\omega$  实、虚部关于  $\lambda$  的不同量阶. 这一点, 可以说是此问题在处理方法上与其它已知方法相比的一个不同之处.

### 三、关于自引力介质中非线性波的摄动理论

在文献[7]中, 作者曾考虑了绕  $x$  轴作均匀旋转的自引力介质(角速度  $\Omega = \sqrt{2\pi G\rho_0}$ ,  $\rho_0$  为基态密度)沿  $x$  方向传播的非线性波周期解, 求出了任有限振幅情形下完全非线性周期波的精确解, 得出了这种周期波(中性波)在波长-振幅平面内的存在区域(见图 3), 并求出了非线性色散关系(见图 4). 进一步, 作者讨论了用摄动法求解弱非线性波的途

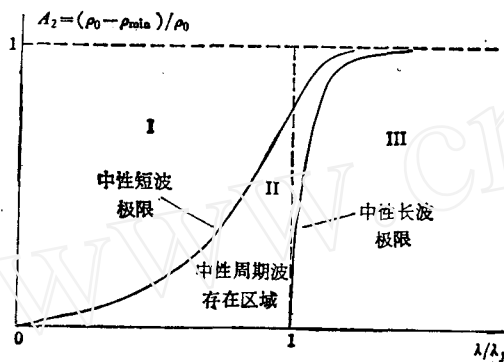


图 3 中性周期波在波长-振幅平面上的存在区域 (区域 II).  $\lambda_J$  为 Jeans 波长,  $A_2$  为无量纲波谷深度(引自文献[7])

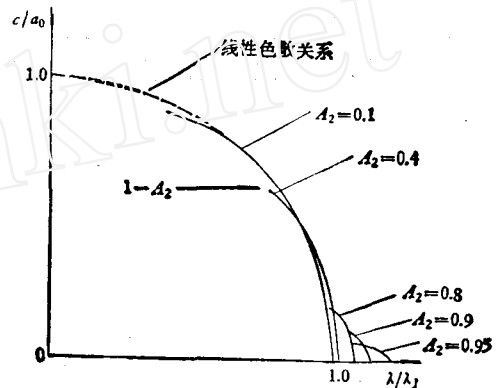


图 4 等温情形下非线性色散关系 (引自文献[7])

径(见文献[7]之附录 C). 在那里, 除了将压力  $p$ , 密度  $\rho$ , 速度  $u$  和引力势  $\phi$  按通常摄动理论的作法对小参数

$$\varepsilon = \frac{\rho_{\max} - \rho_0}{\rho_0} \quad (3.1)$$

作展开之外, 还将频率  $\omega$  对波数  $k$  的依赖关系  $\omega(k, \varepsilon)$  对  $\varepsilon$  作展开:

$$\omega = \omega_0(k) + \varepsilon \omega_1(k) + \varepsilon^2 \omega_2(k) + \dots \quad (3.2)$$

于是, 得出密度的弱非线性周期解为

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \tilde{\rho} = \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \varepsilon^2 \rho_2 \\ &= \rho_0 + \tilde{\rho}(0) \left[ \cos \theta + \frac{\tilde{\rho}(0)}{\rho_0^2} \xi_1 (-\cos \theta + \cos 2\theta) \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

其中

$$\theta = kx - \omega t \quad (3.4)$$

$$\xi_1 = -\frac{k^2}{12\pi G} (3c_0^2 - a_0^2). \quad (3.5)$$

(只讨论等温情形). (3.5) 式中  $c_0 = \omega_0/k$ . 关于弱非线性色散关系(3.2)式, 则得到

和

$$\omega_1 = 0 \quad (3.6)$$

$$\omega_2 = \frac{k}{4\rho_0 c_0} \left\{ -\frac{k^2}{12\pi G} (3c_0^2 - a_0^2)^2 + \rho_0 \left( \frac{a_0^2}{2} - c_0^2 \right) \right\}. \quad (3.7)$$

[关于 (3.3)–(3.7) 的详细推导, 见文献 [7]] 上述弱非线性渐近解虽然对于固定波长  $\lambda (0 < \lambda < \lambda_J)$ , 当  $\varepsilon$  小时关于自变量  $(x, t)$  一致有效, 但正如我们在文献 [7] 中指出的那样, 这一弱非线性色散关系在  $\lambda \sim \lambda_J$  附近不一致有效, 因为当  $\lambda \rightarrow \lambda_J$  时,  $c_0 \rightarrow 0$ ,  $\omega_2 \rightarrow \infty$ , 于是  $\varepsilon^2 \omega_2$  会超过  $\omega_0$  而使展开式 (3.2) 失去意义. 现在我们来分析一下产生这种不一致有效的原因. 事实上, 当  $\lambda \rightarrow \lambda_J$  时, 有  $\omega_0 \rightarrow 0$ , 于是  $\omega - \omega_0$  相对于  $\omega_0$  不再是一个小的修正. 这就使得展开式 (3.2) 在  $\lambda \sim \lambda_J$  附近不能很好地体现摄动法的基本思想. 在本文中, 我们不象 (3.2) 式那样将  $\omega(k, \varepsilon)$  展开, 而将  $k(\omega, \varepsilon)$  作如下展开:

$$k = k_0(\omega) + \varepsilon k_1(\omega) + \varepsilon^2 k_2(\omega) + \dots \quad (3.8)$$

我们将证明, 由此得出的解不但对于固定波长  $\lambda$  关于自变量  $(x, t)$  一致有效, 而且色散关系关于波长  $\lambda$  也一致有效. 下面我们来给出这一推导. 在和基态一起旋转的参考系中, 方程组为<sup>[7]</sup>

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0 \end{array} \right. \quad (3.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{array} \right. \quad (3.10)$$

$$p = a_0^2 \rho \quad (\text{等温情形}) \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 4\pi G (\rho - \rho_0) \quad (3.12)$$

寻找周期解

$$\left. \begin{array}{l} p = p_0 + \tilde{p}(\theta), \quad \rho = \rho_0 + \tilde{\rho}(\theta), \quad u = \tilde{u}(\theta) \\ \phi = \tilde{\phi}(\theta) \end{array} \right\} \quad (3.13)$$

$\theta$  由 (3.4) 式给出. 并令

$$\begin{bmatrix} \tilde{p}(\theta) \\ \tilde{\rho}(\theta) \\ \tilde{u}(\theta) \\ \tilde{\phi}(\theta) \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} p_1(\theta) \\ \rho_1(\theta) \\ u_1(\theta) \\ \phi_1(\theta) \end{bmatrix} + \varepsilon^2 \begin{bmatrix} p_2(\theta) \\ \rho_2(\theta) \\ u_2(\theta) \\ \phi_2(\theta) \end{bmatrix} + \varepsilon^3 \begin{bmatrix} p_3(\theta) \\ \rho_3(\theta) \\ u_3(\theta) \\ \phi_3(\theta) \end{bmatrix} + \dots \quad (3.14)$$

将 (3.14) 和 (3.8) 代入 (3.9)–(3.12), 得出各级方程如下:

$$\varepsilon^1: \begin{cases} -\omega \dot{\rho}_1 + k_0 \rho_0 \dot{u}_1 = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\begin{cases} -\omega \dot{u}_1 + \frac{k_0}{\rho_0} \dot{p}_1 + k_0 \dot{\phi}_1 = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

$$p_1 - a_0^2 \rho_1 = 0 \quad (3.17)$$

$$k_0^2 \dot{\phi}_1 - 4\pi G \rho_1 = 0 \quad (3.18)$$

$$\varepsilon^2: \begin{cases} -\omega \dot{\rho}_2 + k_0 \rho_0 \dot{u}_2 = -k_1 \rho_0 \dot{u}_1 - k_0 \frac{d}{d\theta} (\rho_1 u_1) \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\begin{cases} -\omega \dot{u}_2 + \frac{k_0}{\rho_0} \dot{p}_2 + k_0 \dot{\phi}_2 = -k_0 u_1 \dot{u}_1 - \frac{k_1}{\rho_0} \dot{p}_1 - k_1 \dot{\phi}_1 \end{cases} \quad (3.20)$$

$$p_2 - a_0^2 \rho_2 = 0 \quad (3.21)$$

$$k_0^2 \ddot{\psi}_2 - 4\pi G \rho_2 = -2k_0 k_1 \dot{\psi}_1 \quad (3.22)$$

$$\varepsilon^3: \begin{cases} -\omega \dot{\rho}_3 + k_0 \rho_0 \dot{u}_3 = -k_1 \left[ \rho_0 \dot{u}_2 + \frac{d}{d\theta} (\rho_1 u_1) \right] - k_2 \rho_0 \dot{u}_1 \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\begin{cases} -\omega \dot{u}_3 + \frac{k_0}{\rho_0} \dot{p}_3 + k_0 \dot{\psi}_3 = -k_0 (u_1 \dot{u}_2 + u_2 \dot{u}_1) - k_1 u_1 \dot{u}_1 - \frac{k_1}{\rho_0} \dot{p}_2 \\ - \left( \frac{k_2}{\rho_0} - k_1 \frac{\rho_1}{\rho_0^2} \right) \dot{p}_1 - k_1 \dot{\psi}_2 - k_2 \dot{\psi}_1 \end{cases} \quad (3.24)$$

$$p_3 - a_0^2 \rho_3 = 0 \quad (3.25)$$

$$k_0^2 \ddot{\psi}_3 - 4\pi G \rho_3 = -2k_0 k_1 \ddot{\psi}_2 - (k_1^2 + 2k_0 k_2) \dot{\psi}_1 \quad (3.26)$$

边界条件

$$\bar{\rho}(0) = \rho_{\max} - \rho_0 = \varepsilon \rho_0, \quad \dot{\bar{p}}(0) = 0 \quad (3.27)$$

则导致

$$\left. \begin{aligned} \rho_1(0) = \rho_0, \quad \rho_2(0) = \rho_3(0) = \cdots = 0 \\ \dot{\rho}_i(0) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots) \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

容易求出一级解为

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \rho_0 \cos \theta \\ p_1 &= a_0^2 \rho_1 \cos \theta \\ u_1 &= \frac{c_0}{k_0} \cos \theta \\ \psi_1 &= -\frac{4\pi G \rho_0}{k_0^2} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

其中  $k_0$  与  $\omega$  满足

$$c_0^2 = \frac{\omega^2}{k_0^2} = a_0^2 - \frac{4\pi G \rho_0}{k_0^2} \quad (3.30)$$

将(3.29)代入二级方程右端,得到

$$\left. \begin{aligned} -\omega \dot{\rho}_2 + k_0 \rho_0 \dot{u}_2 &= k_1 \rho_0 c_0 \sin \theta + k_0 \rho_0 c_0 \sin 2\theta \\ -\omega \dot{u}_2 + \frac{k_0}{\rho_0} \dot{p}_2 + k_0 \dot{\psi}_2 &= k_1 c_0^2 \sin \theta + \frac{1}{2} k_0 c_0^2 \sin 2\theta \\ p_2 - a_0^2 \rho_2 &= 0 \\ k_0^2 \ddot{\psi}_2 - 4\pi G \rho_2 &= -2k_0 k_1 (a_0^2 - c_0^2) \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

为消除二级解中关于  $\theta$  的非周期项(即关于  $x$  和  $t$  的“久期项”),必须令<sup>1)</sup>

$$k_1 = 0. \quad (3.32)$$

于是,我们可求出满足边界条件(3.28)的二级解为

$$\left. \begin{aligned} \rho_2 &= -\xi_1 \cos \theta + \xi_1 \cos 2\theta \\ u_2 &= -\frac{c_0}{\rho_0} \xi_1 \cos \theta + \xi_2 \cos 2\theta \\ \psi_2 &= \frac{1}{\rho_0} (a_0^2 - c_0^2) \xi_1 \cos \theta + \xi_3 \cos 2\theta \\ p_2 &= -a_0^2 \xi_1 \cos \theta + \xi_4 \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

1) 在此简单情形,此结论可视察出。更严格的作法可用与下面推导  $k_2$  满足的关系相类似的方法,来定出  $k_1 = 0$ 。

其中

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{\rho_0 c_0^2}{(a_0^2 - c_0^2)} \\ \xi_2 &= -\frac{c_0(a_0^2 + c_0^2)}{2(a_0^2 - c_0^2)} \\ \xi_3 &= \frac{1}{4} c_0^2 \\ \xi_4 &= -\frac{\rho_0 a_0^2 c_0^2}{(a_0^2 - c_0^2)} \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

为了求  $k_2(\omega)$ , 需将(3.29)和(3.33)代入三级方程(3.23)–(3.26)右端, 得到

$$-\omega \dot{\rho}_3 + k_0 \rho_0 \dot{u}_3 = A_3 \sin \theta \quad (3.35)$$

$$-\omega \dot{u}_3 + \frac{k_0}{\rho_0} \dot{p}_3 + k_0 \dot{\phi}_3 = D_3 \sin \theta + E_3 \sin 2\theta + F_3 \sin 3\theta \quad (3.36)$$

$$p_3 - a_0^2 \rho_3 = 0 \quad (3.37)$$

$$k_0^2 \ddot{\phi}_3 - 4\pi G \rho_3 = I_3 \cos \theta \quad (3.38)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A_3 &= k_2 \rho_0 c_0 \\ D_3 &= k_0 c_0^2 + \frac{1}{2} \xi_1 k_0 c_0, \quad E_3 = -k_0 \frac{c_0^2}{\rho_0} \xi_1, \quad F_3 = \frac{3}{2} \xi_2 k_0 c_0 \\ I_3 &= -2k_0 k_2 (a_0^2 - c_0^2) \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

我们可以先用待定系数法求(3.35)–(3.38)的特解

$$\rho_3^* = \eta_1 \cos \theta + \eta_2 \cos 2\theta + \eta_3 \cos 3\theta \quad (3.40)$$

$$u_3^* = \eta_4 \cos \theta + \eta_5 \cos 2\theta + \eta_6 \cos 3\theta \quad (3.41)$$

$$\phi_3^* = \eta_7 \cos \theta + \eta_8 \cos 2\theta + \eta_9 \cos 3\theta \quad (3.42)$$

$$p_3^* = \eta_{10} \cos \theta + \eta_{11} \cos 2\theta + \eta_{12} \cos 3\theta \quad (3.43)$$

其中  $\eta_i$  为待定常数。于是, 方程(3.35)–(3.38)的通解则为

$$\left. \begin{aligned} \rho_3 &= \zeta_1 \cos(\theta + \zeta_2) + \rho_3^* \\ p_3 &= \zeta_1 a_0^2 \cos(\theta + \zeta_2) + p_3^* \\ u_3 &= \zeta_1 \frac{\omega}{k_0 \rho_0} \cos(\theta + \zeta_2) + u_3^* \\ \phi_3 &= -\zeta_1 \frac{4\pi G}{k_0^2} \cos(\theta + \zeta_2) + \phi_3^* \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

其中  $\zeta_1$  和  $\zeta_2$  为二积分常数。只要令

$$\zeta_2 = 0, \quad \zeta_1 = -(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) \quad (3.45)$$

则得到满足边界条件(3.28)的特解。于是, 问题归结为求(3.40)–(3.43)中的系数  $\eta_i$ 。将(3.40)–(3.43)代入三级方程(3.35)–(3.38), 比较系数, 可分别得到关于  $(\eta_1, \eta_4, \eta_7, \eta_{10})$ ,  $(\eta_2, \eta_5, \eta_8, \eta_{11})$  和  $(\eta_3, \eta_6, \eta_9, \eta_{12})$  的三个线性代数方程组。后两个方程组的系数行列式不为零, 故一定有解。而第一个方程组为

$$\omega\eta_1 - k_0\rho_0\eta_4 = A_3 \quad (3.46)$$

$$\omega\eta_4 - \frac{k_0}{\rho_0}\eta_{10} - k_0\eta_7 = D_3 \quad (3.47)$$

$$\eta_{10} - a_0^2\eta_1 = 0 \quad (3.48)$$

$$-k_0^2\eta_7 - 4\pi G\eta_1 = I_3 \quad (3.49)$$

易知它的系数行列式为零,故只当  $A_3, D_3, I_3$  满足一定关系时才有解。不难证明,这一关系式为

$$\frac{k_0}{\rho_0}\left(c_0^2 - a_0^2 + \frac{4\pi G\rho_0}{k_0^2}\right)\eta_1 - \frac{c_0}{\rho_0}A_3 + \frac{1}{k_0}I_3 = D_3. \quad (3.50)$$

再利用(3.30)式,得到

$$-\frac{c_0}{\rho_0}A_3 + \frac{1}{k_0}I_3 = D_3. \quad (3.51)$$

将  $A_3, D_3, I_3$  的定义代入,此式成为  $k_2$  满足的代数方程。由此可解出

$$k_2 = -\frac{1}{4} \frac{k_0 c_0}{a_0^2} \xi_2 \quad (3.52)$$

将  $\xi_2$  定义代入,得出  $k_2$  的最终形式为

$$k_2 = \frac{k_0 c_0^2 (a_0^2 + c_0^2)}{8a_0^2 (a_0^2 - c_0^2)} = \frac{\omega^2 k_0 \left(a_0^2 + \frac{\omega^2}{k_0^2}\right)}{32\pi G\rho_0 a_0^2} \quad (3.53)$$

不难看出,由此得出的弱非线性色散关系

$$k = k_0(\omega) + \varepsilon^2 k_2(\omega) \quad (3.54)$$

对于有解区域(图 3 之区域 II)是一致有效的。事实上,容易看出(3.53)式对于  $\lambda \rightarrow \lambda_J$  的一致有效性是不成问题的。现在我们来看另一极限,即  $\lambda$  小 ( $k_0$  大)的短波极限。这时

$$k_2 \sim \frac{\omega^2 k_0}{16\pi G\rho_0} = \frac{1}{4} \left(\frac{k_0}{\lambda_J}\right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda_J}{\lambda}\right)^2 \quad (\text{短波极限}) \quad (3.55)$$

其中

$$k_J = \frac{2\pi}{\lambda_J} = \frac{2}{a_0} \sqrt{\pi G\rho_0} \quad (3.56)$$

于是,对于短波极限,有

$$k = k_0 + \varepsilon^2 k_2 \sim k_0 \left[1 + \frac{\varepsilon^2}{4} \left(\frac{\lambda}{\lambda_J}\right)^2\right] \quad (3.57)$$

对于弱非线性波,易知

$$\varepsilon \sim A_2, \quad (3.58)$$

其中  $A_2 = (\rho_0 - \rho_{\min})/\rho_0$ , 即图 3 中的纵坐标。再由图 3 可知,在周期解存在区域 II 中,当  $\lambda \lesssim \frac{1}{2} \lambda_J$ , 有

$$A_2 / \left(\frac{\lambda}{\lambda_J}\right) \lesssim \frac{1}{4} \quad (3.59)$$

于是

$$\frac{\varepsilon^2}{4} \left(\frac{\lambda_J}{\lambda}\right)^2 \lesssim \frac{1}{64} \quad (\text{短波极限}) \quad (3.60)$$

由此可见,弱非线性色散关系(3.54)对于周期解存在的整个波长范围内,当  $\varepsilon$  小时都是一致有效的.

由此可见,根据问题物理特点来适当选择变形参数是很必要的.

### 参 考 文 献

- [1] 钱伟长主编, 奇异摄动理论及其在力学中的应用, 科学出版社 (1981).
- [2] Nayfeh, A. *Perturbation Methods*, John Wiley & Sons, Inc. (1973).
- [3] Lin, C. C. and Lau, Y. Y., *Studies in Applied Mathematics*, 60(1979), 97—163.
- [4] Yue, Z. Y. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 20, Nos. 1+2, (1982), 1—110.
- [5] Nishimoto, T., *Studies in Applied Mathematics*, 60, (1979), 11.
- [6] Xu, J. J. *Scientia Sinica*, 18 (1980), 992.
- [7] Yue, Z. Y., *Studies in Applied Mathematics*, 65, (1981), 1—36.

## ON THE APPLICATION OF THE SINGULAR PERTURBATION THEORY TO THE WAVES IN A SELF-GRAVITATING MEDIUM

Yue Zengyuan

(Department of Geophysics, Peiking University)

### Abstract

Some problems on the application of the singular perturbation theory are discussed in terms of two example related to the waves in a self-gravitating medium. the first example is the complex eigen-value problem in the density wave theory, where three turning points are involved and two of them are close to each other. It is pointed out that the geometric distribution of the turning points depends upon the complex eigen-value  $\omega$  sensitively. Thus, it is necessary to make some explicit analysis on the dependence of  $\omega$  on the perturbation parameter  $\lambda$  in advance, even for obtaining the first-order uniformly valid asymptotic solution. We expand  $\omega(\lambda)$  in a series  $\omega = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j \lambda^{-j}$  and obtain the different orders of the real and imaginary parts of  $\omega$  from the radiation condition. This is the key to the analysis of this problem. Formally, this method looks like the strained parameter method (Lindstedt-Poincaré method), but essentially they are different. The second example is the asymptotic periodic solution and the dispersion relation of weakly non-linear waves in a self-gravitating medium. It is indicated that, if the expansion  $\omega = \omega_0(k) + \varepsilon \omega_1(k) + \varepsilon^2 \omega_2(k) + \dots$  is adopted, where  $\omega$  is the angular frequency,  $k$  the wave number, the weakly non-linear dispersion relation is not uniformly valid as  $\lambda \rightarrow \lambda_J$  (Jeans length). Based on the analysis of this non-uniform-validity, we adopt another expansion in this paper:  $k = k_0(\omega) + \varepsilon k_1(\omega) + \varepsilon^2 k_2(\omega) + \dots$ , in this way, not only the weakly non-linear asymptotic solution uniformly valid for  $(x, t)$  for a given  $\lambda$  is obtained, but also the weakly nonlinear dispersion relation is uniformly valid for the wave length  $\lambda$ . Thus, we see the necessity of choosing the proper strained parameter for this and other similar problems.