约束阻尼系统的稳定性定理

王照林　黄士涛
（清华大学）

提要　本文在 Четаев 理论和大系统理论的基础上，针对力学系统提出了大系统加权 V 函数方法．并且应用这个方法证明了约束阻尼力学系统的稳定性定理．从而，把在卫星姿态动力学中用到的 Kelvin-Tait-Четаев 定理和 Mingori 定理等作了一定的推广．本文所分析得到的结果对于非线性力学系统也是正确的．

一、引　言

在一般的情况下，当研究耗散力学系统的运动稳定性时，除了通常的 Rayleigh 散逸力之外还要考虑约束阻尼（Constraint Damping）．例如，在弹性卫星等效系统的研究中就要分析约束阻尼对卫星姿态稳定性的影响[1,12]．另外，在弹性理论中的非保守位形力和陀螺系统中的径向修正力[2]，以及等离子体耗散的稳定性问题中出现的循环力[3,6]，它们也都是属于约束阻尼类型的．因此，对于约束阻尼系统稳定性问题的研究是有较大的理论意义和实际意义的．

对于约束阻尼系统的稳定性分析，Kelvin-Tait-Четаев 定理已不再适用了[9,11,14]． 因此，需要寻求更一般的稳定性条件．Müller 和 Tasso 等人[4,3]评论这类问题时曾指出：这是一个相当困难的问题．Mingori 于 1970 年利用一些限制条件建立了在特殊情况下该系统的稳定性判据[5]．Teichman[6] 于 1979 年曾试图在更一般的条件下来解决这类问题．但在 1980 年人们已经发现[3]，他的定理在一般的情况下是不成立的．这是因为他在进行通常的 Ляпунов 变换时，使得定常的力学系统转化成了非定常的力学系统，从而使他的这次研究归于失败．因此到目前为止，在一般条件下的约束阻尼系统的稳定性问题，尚未得到解决．

本文应用我们针对约束阻尼力学系统提出的大系统加权 V 函数方法，证明了一个约束阻尼系统的稳定性定理．它比较一般地解决了约束阻尼系统的稳定性问题．本文的定理对于线性和非线性力学系统都是适用的．

二、大系统加权 V 函数方法的表述

Четаев 第一个提出应用 V 函数加权和的方法来分析力学系统的稳定性问题[9,14]，参照这个思想，随后又有人在大系统的稳定性中应用了 Четаев 这个方法，另外还有人提出了

本文于 1982 年 4 月 2 日收到．

向量 V 函数方法等[7,8,10].

本文在此基础上针对约束阻尼力学系统提出了大系统加权 V 函数方法[9,13]. 其基本的思路是：首先将一个力学"小系统"视为一个"大系统"(视它为一个由诸子系统耦合而成的复合系统)；然后再把这个想像的"大系统"按数学上或物理上的意义，利用非奇异线性变换进行系统的结构分解(即所谓"单层结构"分块)；在此基础上构造加权 V 函数；最后再进行全系统(耦合的"大系统")稳定性的综合分析.

在下面我们首先提出了约束阻尼系统的数学模型，进而利用大系统加权 V 函数方法来证明约束阻尼系统的稳定性定理，然后再进一步地分析该定理的一些推论和有关的应用等.

三、约束阻尼力学系统的稳定性定理

1. 系统的数学模型[12]

设考查一个完整的、非保守的力学系统，它所受的约束不显含时间 t，而 $q_1, \cdots, q_n$ 为该系统的广义坐标. T 为系统的动能，而 U 为力函数.

此时，力学系统的运动微分方程式可以由完整系的 Hamilton-Остроградский 力学积分变分原理推导出来. 对于力学系统的真实运动而言，下式成立：

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T+\delta W)dt=0 \tag{3.1}$$

其中 δT 为 T 的一阶变分，而 δW 为主动力(有势力和非有势力)所做的虚功.

从力学变分原理 (3.1) 可以导出系统在主动力作用下的 Lagrange 运动微分方程式：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=\frac{\partial U}{\partial q_j}-\frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial R_2}{\partial \dot{q}_j}+T_j \ (j=1, \cdots, n) \tag{3.2}$$

其中 $R_1=\frac{1}{2}\dot{q}^\tau D\dot{q}$ 是阻尼函数，D 为正定或半正定阻尼矩阵；$R_2=\dot{q}^\tau Fq$ 是约束阻尼函数，$F=-F^\tau$ 为反对称约束阻尼矩阵；$\dot{q}$ 为广义速度向量；T_j 为陀螺力；而"τ"为转置符号.

方程 (3.2) 是一个受有势力、陀螺力、阻尼和约束阻尼作用的力学系统，由此可以通过线性化和非奇异的线性变换得到系统的矩阵方程

$$A\ddot{x}+(D+G)\dot{x}+(K+F)x=0 \tag{3.3}$$

这里 x 是 n 维状态向量，A 为对称正定惯量矩阵，D 为对称正定（或半正定）阻尼矩阵，$G=-G^\tau$ 为斜对称陀螺矩阵，K 为对称保守矩阵，$F=-F^\tau$ 为斜对称约束阻尼矩阵.

2. 定理的证明[13]

如果取矩阵微分方程 (3.3) 的零解 $x=0$ 为无扰运动，则 (3.3) 式即为对应的受扰运动微分方程式.

下面我们将利用大系统加权 V 函数方法来分析这类问题，从而可以得出一个比较普遍的约束阻尼系统的稳定性定理.

首先对系统 (3.3) 作如下的变换，令：

$$y_1=x, \ y_2=\dot{x}+Cx$$

其中 y_1、y_2 皆为 n 维向量，C 为 $n\times n$ 待定矩阵，从而可将 (3.3) 式变为：

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -Cy_1 + y_2\\ \dot{y}_2 &= Ey_1 + By_2\end{aligned}\tag{3.4}$$

其中

$$E = A^{-1}[(D+G)C - AC^2 - (K+F)]$$

$$B = A^{-1}[AC - (D+G)]$$

如果再作变换：

$$z_1 = y_1,\quad z_2 = \beta y_1 + y_2$$

则得：

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -(C+\beta I)z_1 + z_2\\ \dot{z}_2 &= (E-\beta H)z_1 + (\beta I + B)z_2\end{aligned}\tag{3.5}$$

这里 $H = B + C + \beta I$，β 是任意小的数，I 为单位矩阵.

不难验证，经过上述多次运用非奇异线性变换以后，系统 (3.3) 零解的稳定性问题可以转化为系统 (3.5) 零解的稳定性问题. 在此基础上就可以运用大系统加权 V 函数方法来研究约束阻尼系统的运动稳定性问题了.

按照上面我们提出的思路，首先把力学系统 (3.5) 视为一个"大系统"，并将其划分为两个子系统：

$$S_1: \dot{z}_1 = -(C+\beta I)z_1 + z_2$$

$$S_2: \dot{z}_2 = (E-\beta H)z_1 + (\beta I + B)z_2$$

再把它们分解成解耦子系统和耦合函数：解耦 S_1：$\dot{z}_1 = -(C+\beta I)z_1$，耦合函数：$h_1 = z_2$，解耦 S_2：$\dot{z}_2 = (\beta I + B)z_2$，耦合函数：$h_2 = (E-\beta H)z_1$.

对于解耦子系统我们构造 V_i 函数 $(i = 1,2)$：

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^\tau P z\tag{3.6}$$

$$\dot{V}_1 = -\frac{1}{2} z_1^\tau(2\beta P + C^\tau P + PC)z_1\tag{3.7}$$

$$V_2 = \frac{1}{2} z_2^\tau Q z_2\tag{3.8}$$

$$\dot{V}_2 = \frac{1}{2} z_2^\tau(B^\tau Q + QB + 2\beta Q)z_2\tag{3.9}$$

再计算与耦合函数有关的量：

$$(\mathrm{grad}V_1)^\tau h_1 + (\mathrm{grad}V_2)^\tau h_2 = \frac{1}{2} z_1^\tau[(P+P^\tau) + (E-\beta H)^\tau(Q+Q^\tau)]z_2$$

对于"大系统"(3.5)，可以选用 $V = V_1 + V_2$ 作为试验函数；由于受扰运动微分方程 (3.5)，函数 V 对于时间的全导数为

$$\begin{aligned}\dot{V} = &-\frac{1}{2} z_1^\tau(2\beta P + C^\tau P + PC)z_1 + \frac{1}{2} z_2^\tau(B^\tau Q + QB + 2\beta Q)z_2\\ &+ \frac{1}{2} z_1^\tau[(P+P^\tau) + (E-\beta H)^\tau(Q+Q^\tau)]z_2\end{aligned}\tag{3.10}$$

我们设下列条件成立：

$$\left.\begin{array}{l} P>0, Q>0,\ C^{\tau}P+PC>0\ (\text{或}\ C^{\tau}P+PC=0) \\ P+P^{\tau}+E^{\tau}(Q+Q^{\tau})=0,\ B^{\tau}Q+QB<0 \end{array}\right\} \tag{3.11}$$

因此由条件(3.11)可知,函数V是正定的,而$\dot{V}$的判别式矩阵为:

$$\begin{bmatrix} -(2\beta P+C^{\tau}P+PC) & -\frac{\beta}{2}H^{\tau}(Q+Q^{\tau}) \\ -\frac{\beta}{2}(Q+Q^{\tau})H & B^{\tau}Q+QB+2\beta Q \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

当$\beta>0$足够小时,由 Laplace 展开式可知,在上面矩阵的行列式中每个主子式满足下列条件:

$$(-1)^{s}\Delta_{s}>0 \quad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ 2n)$$

从而函数$\dot{V}$是负定的. 又因为函数V不显含时间t,由于他的连续性可知,V具有无穷小上界. 所以系统(3.5)(从而系统(3.3))的无扰运动渐近稳定.

综上所述,对于约束阻尼系统的稳定性问题我们已经获得了下面的结论:

定理 对于受有势力、陀螺力、阻尼和约束阻尼作用的力学系统(3.3),如果条件(3.11)被满足,则系统的零解渐近稳定.

四、定理的推论及应用

1. 考查下列形式的矩阵方程:

$$A\ddot{x}+(D+G)\dot{x}+(K+F)x+O(x)=0 \tag{4.1}$$

这里$O(x)$是不低于二阶的项,此时高阶的小量不会影响前面构造的 Ляпунов 函数的基本性质;从而可知,对于非线性系统(4.1),如果条件(3.11)成立,则无扰运动渐近稳定.

2. 对于系统(3.3)文[5]曾证明过一个定理:如果矩阵M的所有特征值都是正的,则系统渐近稳定;如果特征值至少有一个为负,则不稳定. 这里设$M=FD^{-1}AD^{-1}F-GD^{-1}F+K$,并且下列条件还应成立:

$$\begin{aligned} FD^{-1}A &= AD^{-1}F \\ FD^{-1}G &= GD^{-1}F \\ FD^{-1}K &= KD^{-1}F \end{aligned} \tag{4.2}$$

不难推证,上述定理的稳定性问题,可以由我们所证明的定理作为一个特例而导出.

事实上,如取$Q=A>0$,$C=D^{-1}F$,$P=M=FD^{-1}AD^{-1}F-GD^{-1}F+K$则得:

$$C^{\tau}P+PC=(D^{-1}F)^{\tau}M+M(D^{-1}F)=0$$
$$(P+P^{\tau})+E^{\tau}(Q+Q^{\tau})=0$$
$$B^{\tau}Q+QB=-2D<0$$

可见,我们所得的结果已经推广了文献[5]中的定理. 条件(4.2)具体地限制了系统参数的选择范围,即如果上述定理的条件(4.2)不满足时,文[5]中的论证则失效. 而在我们的定理中可以按(3.11)式对P、Q、C另外选择. 所以我们所证定理的条件要更普遍一些.

3. 如果在 (3.3) 式中不计约束阻尼的作用，则有 Kelvin-Tait-Четаев 定理：如果矩阵 K 的特征值皆为正，则系统渐近稳定；如果特征值至少有一个为负，则不稳定.

可以验证，应用我们的定理条件 (3.11) 能够把上述定理的稳定性问题作为一个特例推导出来. 其实，当 $F = 0$ 时，如取 $P = K$, $Q = A$, $C = 0$, 则得

$$C^{\tau}P + PC = 0$$

$$P + P^{\tau} + E^{\tau}(Q + Q^{\tau}) = 0$$

$$B^{\tau}Q + QB = -2D < 0$$

4. 在本文的引言中曾提到过文 [6] 的定理在一般的条件下是不成立的，它只有在某些特殊情况下才是正确的[3]. 当然，这种特殊情况也可以应用我们所证的定理推导出来.

事实上，在 $A = I$, $C^{\tau} = -C$ 的条件下，令：$Q = I$，并使 C 满足条件，

$$F = \frac{1}{2}(GC - CG) + \frac{1}{2}(DC + CD)$$

把这些条件代入我们的定理条件 (3.11) 中可解得

$$P = \frac{1}{2}[K + CC - S]$$

其中

$$S = \frac{1}{2}(DC - CD) + \frac{1}{2}(GC + CG)$$

在 $D > 0$，以及 C 与 D、G、K 可交换的条件下，可以检验满足 $PC + C^{\tau}P = 0$ 的条件，则只需 $P > 0$，系统即渐近稳定. 因此，这种情况完全类似于 Kelvin-Tait-Четаев 定理.

因为在不满足 C 与 D、G、K 可交换的条件时，而当 $P > 0$ 以及 $PC + C^{\tau}P > 0$ 同时成立时，应用我们的定理也可以判别系统的渐近稳定性. 甚至不必假设 $C^{\tau} = -C$，只要重新选择 C 也可以分析系统的稳定性问题. 所以本文的约束阻尼系统的稳定性定理是较为普遍的.

当然，对于本文所证的定理，还可以举出其他一些推论和应用等，这里不再赘述.

五、结　　语

1. 从以上的分析可以看出，应用大系统加权 V 函数方法来研究约束阻尼系统的稳定性问题，是简明有效的. 它不需要微分不等式的比较定理，也不要求各子系统的指数渐近稳定性的条件. 只要对我们想像的"大系统"分解得当，就可以获得比较好的运动稳定性判据.

2. 将能看到，应用大系统加权 V 函数方法也能够比较顺利地解决自旋卫星(包括陀螺体卫星)、挠性卫星以及空腔充液卫星等混合系统中的一类线性和非线性的稳定性问题.

3. 大系统动力学及其应用是当前"现代应用力学"中的一个重要课题. 不论是对于方法的研究或是应用的研究，都是很有必要的. 另外，如何能够引进一些近代数学的研究成果(比如，算子理论和拓扑原则等)，来促进大系统动力学理论的研究，也是当前非线性系

统分析的重要问题之一.

作者衷心感谢北京航空学院高为炳教授和清华大学万嘉璜教授的热情帮助和指教.

参 考 文 献

[1] Likins, P. W., *AIAA Jour.*, **5**, 11(1967), 2090—2094.

[2] Меркин Д. Р., Гироскопические Системы, *Наука*, Москва (1974), 174—179.

[3] Tasso, H., *ZAMP*, **31**, 4 (1980), 536—537.

[4] Müller, P. C., Stabilität und Matrizen, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1977), 5—10.

[5] Mingori, D. L., Trans. of ASME, ser. E, *J. of Appl. Mech.*, **37**,2 (1970), 253—258.

[6] Teichman, J., *ZAMP*, **30**, 6 (1979), 1027—1029.

[7] Šiljak, D. D., Large-scale Dynamic Systems: Stability and Structure, North-Holland, New York (1978), 88—113.

[8] Grujic, Lj. T., *Inter. J. of Contr.*, **20**, 3 (1974), 453—463.

[9] Четаев Н. Г., Устойчивость движения: Реботы по аналитической механике, *Наука*, Москва, (1962), 14—22.

[10] 高为炳,中国科学,A辑,1(1982),81—88.

[11] 王照林,力学学报,3(1978),171—176.

[12] 王照林,力学进展,4(1980),15—30.

[13] 王照林、黄士涛,空间控制系统理论及其应用学术会议论文,北戴河会议,203—6(1980).

[14] 王照林等编,现代控制理论基础,国防工业出版社,北京(1981),214—253.

STABILITY THEOREM OF MECHANICAL SYSTEMS WITH CONSTRAINT DAMPING

Wang Zhaolin Huang Shitao

(*Tsinghua University*)

Abstract

In this paper a method is presented to analyse the stability of mechanical systems, based on Chetayev's thory and theory of large-scale systems: method of large-scale systems with weighted V. A stability theorem of mechanical systems with constraint damping is proved using the above method. Therefore, the Kelvin-Tait-Четаев theorem and the Mingor's theorem used in satellite attitude dynamics are extended. Our results are also valid for nonlinear mechanical systems.