

Reissner 型平板弯曲断裂问题分析

李 英 治 柳 春 图

(中国科学院力学研究所)

摘要 本文在 Reissner 型平板裂纹尖端位移场展开式^[1]基础上,采用高阶奇异元计算中厚板弯曲应力强度因子。本文在基本公式中考虑剪切变形影响,计算分析了有限尺寸板在不同厚度、不同宽度以及不同支承条件下应力强度因子及其变化,并对奇异元位移模式项数的选择、奇异元最佳尺寸的选择等问题进行了分析讨论。

一、前 言

在平板弯曲断裂问题分析中,早期著作大都应用 Kirchhoff 平板理论^[4],它导致剪应力 τ_{xz} 、 τ_{yz} 的奇异性是 $r^{-\frac{1}{2}}$ 阶的,与 $\sigma_x\sigma_y$ 、 τ_{xy} 奇异性 $r^{-\frac{1}{2}}$ 阶不同。此外,其应力幅角也与平面拉伸时应力幅角不同,无法研究弯曲和拉伸共同作用问题。

为了克服经典理论的缺陷,从六十年代开始,根据较精确的 Reissner 理论进行平板弯曲断裂问题分析^[5,6],并得到含裂纹无限大板的解答。但是,文献[5]、[6]仅给出裂纹尖端应力场级数展开式的首项,对整个应力场情况仍不清楚。1980 年,柳春图用推广幂级数展开的方法^[1]获得 Reissner 型板裂纹尖端位移场的展开式,并给出渐近展开式前几项函数和系数的具体表达式,进一步阐明了 Reissner 型板裂纹附近的力学性质。它类似于平面问题的 Williams 展开式的作用,为平板弯曲断裂分析提供较好的力学基础。

鉴于数学上的困难,至今还没有求得在 Reissner 理论上的有限尺寸板的解答,即使借助有限元手段讨论有限尺寸板应力强度因子的文章亦不多见。迟至 1971 年才见到第一篇用有限元计算平板弯曲断裂问题的文章^[10],该文采用 Kirchhoff 板元进行求解,其物理基础显然是存在缺陷的。1976 年 R. S. Barsoum 采用厚板退化元配合畸变等参元的方法,1979 年 G. Yagawa 采用在奇异项上叠加有限元模式的方法进行有限元计算,开始考虑了剪切变形影响并在平板有限元分析中引进奇异性单元。但奇异元的位移模式仍有待改进,且都局限于讨论 I 型弯曲问题。

1979 年 Jalecs, A. 和 Francis, T. C. Loo^[14]首次用有限元法讨论了 I 型、II 型弯曲复合问题,该文仍采用 Kirchhoff 板元,并以 Williams 经典板弯曲展开式的首项作为奇异元的位移模式,其物理基础不正确。此外,法国 Bergez^[3]以及胡海昌和柳春图曾提出用 J 积分计算板壳弯曲应力强度因子的公式和方法。

综上所述,关于有限尺寸板弯曲断裂问题的研究还有待进一步开展。当前需要提出一些新的计算分析方法,提出一些合理的力学模型、适用性广泛的有限元位移模式来解决当前工程需要的平板弯曲应力强度因子计算问题,本文的工作就是为上述目的而进行

本文于 1982 年 5 月 8 日收到。

的。

二、有限元基本公式的建立

采用有限单元法解断裂力学问题的精度取决于所假定的位移模式模拟真实变形的程度,因此最恰当的方法就是采用裂纹尖端位移场的精确力学模型作为奇异元的位移模式。为了在奇异性区域内位移表达式足够准确,就需要保留渐近表达式的高阶项。因为如果仅取表达式首项,则在离裂纹尖端稍远的节点上就会造成误差。而文献[1]提出的 Reissner 型板裂纹尖端位移场展开式为上述设想提供了可能性。

本文以考虑剪切变形的平板弯曲理论为基础^[2],要求位移模式具有模拟弯曲变形和剪切变形状态的能力。为了达到这一点,我们采用一块在每一节点上有五个自由度的矩形平板作为基本单元(图 1),共 20 个节点参数。局部坐标系与整体坐标系平行,无需进行坐标变换。

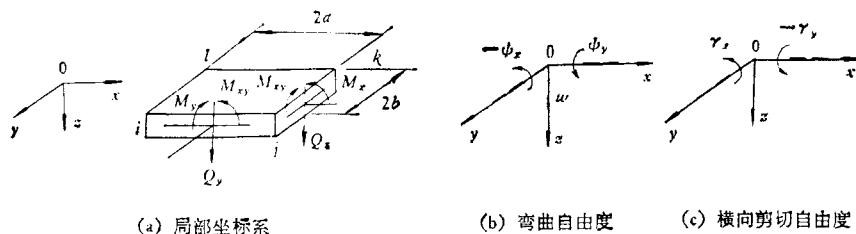


图 1

每个节点上的五个自由度依次为 $W, \phi_x, \phi_y, \gamma_x, \gamma_y$ 。 ϕ_x, ϕ_y 是变形前垂直中面直线段在变形后的转角。其中 ϕ_x 是 xz 平面内的转角,以从 x 轴经 90° 转到 z 轴的转向为正; ϕ_y 是 yz 平面内的转角,以 y 轴经 90° 到 z 轴的转向为正; W 为挠度,以向下为正。

$$\left. \begin{aligned} \gamma_x &= \frac{\partial W}{\partial x} - \phi_x \\ \gamma_y &= \frac{\partial W}{\partial y} - \phi_y \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

γ_x, γ_y 分别代表 x 为常数, y 为常数截面上平均剪切应变。它们并不独立,可以从 ϕ_x, ϕ_y 和 W 导出。为了提高插值精度,我们将 γ_x, γ_y 引入作为节点参数。

在整体布局上,采用方形网格划分,在裂纹尖端附近适当加密。奇异元和常规厚板元的布置如图 2。

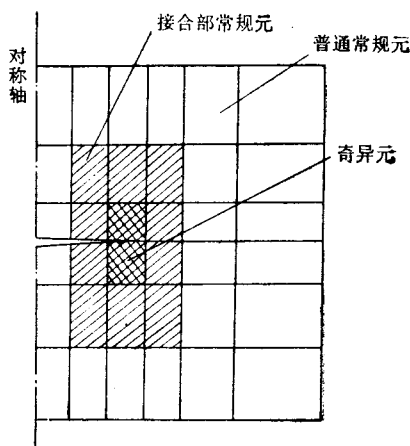


图 2

位移模式的具体形式以及刚度矩阵的形成分述如次:

1. 高阶奇异元位移模式及刚度矩阵的形成

文献[1]给出 ϕ_r, ϕ_θ, W 在裂纹尖端附近的展开式,坐标原点取在裂纹尖端。为了适

用于方形网格划分,需要通过坐标变换求出 ϕ_x, ϕ_y . 在 ϕ_x, ϕ_y 展开式中取至 $O(r^{\frac{1}{2}})$, 在 W 展开式中取至 $O(r^{7/2})$; γ_x, γ_y 按式 (2.1) 定义,并在各表达式中加上相应的裂纹尖端的初始值,得到高阶奇异元的位移模式. 在对称 I 型情况下,它们表示为

$$[f] = [P][\alpha_i] \quad (2.2)$$

式中, $[f] = [W, \phi_x, \phi_y, \gamma_x, \gamma_y]^T$; $[\alpha_i] = [W_0, \phi_{x0}, \phi_{y0}, \gamma_{x0}, \gamma_{y0}, A_1^{(1/2)}, A_1^{(1)}, A_1^{(3/2)}, A_1^{(2)}, A_1^{(5/2)}, D_1^{(1)}, D_1^{(2)}]$. $[f]$ 表示单元内部位移, $[\alpha_i]$ 表示奇异元的广义位移列向量. 其中 $W_0, \phi_{x0}, \phi_{y0}, \gamma_{x0}, \gamma_{y0}$ 分别是 $W, \phi_x, \phi_y, \gamma_x, \gamma_y$ 在裂纹尖端的初始值. 各系数的上标表示其相应的特征值,即展开式中的阶数^[1]. A_1 相应于 I 型对称弯曲的位移模式, D_1 相应于对称的面外剪切变形的位移模式. 矩阵 $[P]$ 的具体形式可由以下公式 (2.3a)~(2.3c) 以及 (2.1) 式计算而得.

$$\begin{aligned} W = & W_0 - A_1^{(1/2)} r^{3/2} \frac{2(1-\nu)}{1+\nu} \left[\cos \frac{\theta}{2} - \frac{7+\nu}{3(1-\nu)} \cos \frac{3}{2} \theta \right] \\ & + A_1^{(1)} r^2 \frac{1-\nu}{2(1+\nu)} \left(1 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \cos 2\theta \right) \\ & + A_1^{(3/2)} r^{5/2} \frac{2(1-\nu)}{1+\nu} \left[\cos \frac{\theta}{2} - \frac{9-\nu}{5(1-\nu)} \cos \frac{5}{2} \theta \right] \\ & + A_1^{(2)} r^3 \frac{1-\nu}{3(1+\nu)} \left(\cos \theta + \frac{1+\nu}{1-\nu} \cos 3\theta \right) \\ & + A_1^{(5/2)} r^{7/2} \frac{2(1-\nu)}{3(1+\nu)} \left[\cos \frac{3}{2} \theta - \frac{5-3\nu}{7(1-\nu)} \cos \frac{7}{2} \theta \right] \\ & + D_1^{(1)} r \cos \theta + D_1^{(2)} r^2 \cos 2\theta \end{aligned} \quad (2.3a)$$

$$\begin{aligned} \phi_x = & \phi_{x0} - A_1^{(1/2)} r^{1/2} \left[\frac{5-3\nu}{1+\nu} \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3}{2} \theta \right] + A_1^{(1)} r \frac{2}{1+\nu} \cos \theta \\ & + A_1^{(3/2)} r^{3/2} \frac{7-\nu}{1+\nu} \left[\cos \frac{3}{2} \theta - \frac{3(1+\nu)}{7-\nu} \cos \frac{\theta}{2} \right] \\ & + A_1^{(2)} r^2 \frac{2(3+\nu)}{3(1+\nu)} \left(\cos 2\theta - \frac{1+\nu}{3+\nu} \right) \\ & + A_1^{(5/2)} r^{5/2} \frac{5}{3} \left[-\cos \frac{\theta}{2} + \frac{9+\nu}{5(1+\nu)} \cos \frac{5}{2} \theta \right] \\ & + D_1^{(1)} \frac{5r^2}{2h^2} (1 - \cos 2\theta) \end{aligned} \quad (2.3b)$$

$$\begin{aligned} \phi_y = & \phi_{y0} - A_1^{(1/2)} r^{1/2} \left[\frac{7-\nu}{1+\nu} \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ & - A_1^{(1)} r \frac{2\nu}{1+\nu} \sin \theta + A_1^{(3/2)} r^{3/2} \frac{5-3\nu}{1+\nu} \left[\sin \frac{3}{2} \theta \right. \\ & \left. - \frac{3(1+\nu)}{5-3\nu} \sin \frac{\theta}{2} \right] - A_1^{(2)} r^2 \frac{4\nu}{3(1+\nu)} \sin 2\theta \\ & + A_1^{(5/2)} r^{5/2} \frac{5}{3} \left[\sin \frac{\theta}{2} + \frac{3-5\nu}{5(1+\nu)} \sin \frac{5}{2} \theta \right] \end{aligned} \quad (2.3c)$$

与单元体所假设的变形状态相对应的刚度矩阵,可以通过用广义位移列向量表达应

变能的方法加以确定。将(2.2)式代入曲率和横向剪切变形的表达式中

$$[\chi] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ -\frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \end{bmatrix} = [B_B][\alpha_1] \quad (2.4)$$

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix} = [B_s][\alpha_1] \quad (2.5)$$

将式(2.2)代入式(2.4)和式(2.5)中便得到 $[B_B]$ 、 $[B_s]$ 的具体表达。单元应变能为

$$U = \frac{1}{2} \int_A [\chi]^T [M] dA + \frac{1}{2} \int_A [\gamma]^T [Q] dA \quad (2.6)$$

式中 $[M]$ 、 $[Q]$ 分别为弯矩、剪力的矩阵

$$[M] = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & \gamma D & 0 \\ \gamma D & D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\gamma)D}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{bmatrix} = [D_B][\chi] \quad (2.7)$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix} = [D_s][\gamma] \quad (2.8)$$

式中 C 为剪切刚度, $C = \frac{5}{6} Gh$ 。

将式(2.7)、(2.8)代入式(2.6)得到

$$U = \frac{1}{2} \int_A [\chi]^T [D_B][\chi] dA + \frac{1}{2} \int_A [\gamma]^T [D_s][\gamma] dA \quad (2.9)$$

将 $[\chi]$ 、 $[\gamma]$ 的表达式(2.4)、(2.5)代入式(2.9)中, 得到以广义位移列向量 $[\alpha_1]$ 表示的应变能。

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} [\alpha_1]^T \left(\int_A [B_B]^T [D_B][B_B] dA + \int_A [B_s]^T [D_s][B_s] dA \right) [\alpha_1] \\ &= \frac{1}{2} [\alpha_1]^T [K][\alpha_1] \end{aligned} \quad (2.10)$$

式中

$$[K] = \int_A [B_B]^T [D_B][B_B] dA + \int_A [B_s]^T [D_s][B_s] dA \quad (2.11)$$

2. Reissner 型厚板单元的位移模式及刚度矩阵

常规元采用 20 节点参数矩形厚板单元, 其位移模式采用 x, y 多项式表示。刚度矩阵形成详见文献[8]。

3. 奇异元和常规元之间的连接

根据奇异元和常规元在公共节点上位移相等的条件, 可以用奇异元广义位移代替常规元的节点位移, 从而实现了奇异元和常规元之间的连接。

4. 奇异元系数与应力强度因子的关系

当根据应力定义应力强度因子时

$$\left. \begin{aligned} K_1(z) &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_y(r, 0) \\ K_2(z) &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{xy}(r, 0) \\ K_3(z) &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{yx}(r, 0) \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

经过一些运算,求得展开式系数与应力强度因子之间关系

$$\left. \begin{aligned} K_1(z) &= 2\sqrt{2\pi} G h A_1^{(1/2)} \zeta \\ K_2(z) &= -\frac{2}{3} \sqrt{2\pi} G h A_2^{(1/2)} \zeta \\ K_3(z) &= \frac{5G}{8} \sqrt{2\pi} D_2^{(1/2)} (1 - \zeta^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

式中 $\zeta = \frac{2z}{h}$. 求出奇异元广义位移以后,从式(2.15)立即得到应力强度因子.

三、数值计算

为了验证计算模型的精确性和有限元程序的正确性,首先将计算结果和解析解答作一比较.

1. 无裂纹板的弯曲

为了检验本文采用的 20 节点参数矩形厚板单元的计算精度,并确认其作为断裂分析中的常规单元的可靠性,首先对无裂纹板弯曲进行计算校核. 本文计算了四边简支板以及对边简支、对边固支板在均匀荷载下的挠度和内力. 在本文计算例子中,挠度和内力与 Reissner 理论解相比,相对误差均不超过 2%.

2. 含裂纹无限大板受均匀弯矩作用

Hartranft 和 Sih 用 Reissner 理论研究了这个问题^[6],获得的应力强度因子为

$$K_1(z) = \frac{12z}{h^3} \phi(1) M \sqrt{\pi a} \quad (3.1)$$

其最大值在 $z = h/2$ 处

$$K_I = \frac{6M}{h^2} \phi(1) M \sqrt{\pi a} \quad (3.2)$$

函数 $\phi(1)$ 依赖 h/a 和波桑比. 对于不同板厚,根据 $h/(a\sqrt{10})$,在图 4 中确定 $\phi(1)$ 值.

为了模拟无限大板的情况,板的长度要取得足够大. 我们用 $h = 1\text{cm}$, $a = 0.9\text{cm}$ 的板进行试算(图 4),板长 $2L$ 分别取 $20a$, $40a$, 均布弯矩均为 1kg-cm/cm , 计算结果如表 1 所示.

计算表明,对于 $h/a \approx 1$ 的板,采用上述两种板长所得的应力强度因子仅相差 0.4%,因此认为用 $20a$ 作为板长来模拟无限大板不致于有很大误差.

本文选择板厚 0.1, 0.5, 1, 2cm 四种板进行数值计算,并与无限大板解答进行了比较^[6],计算结果见表 2.

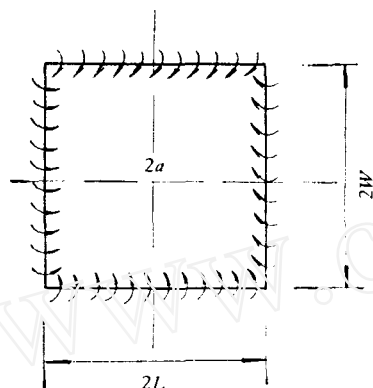


图 3

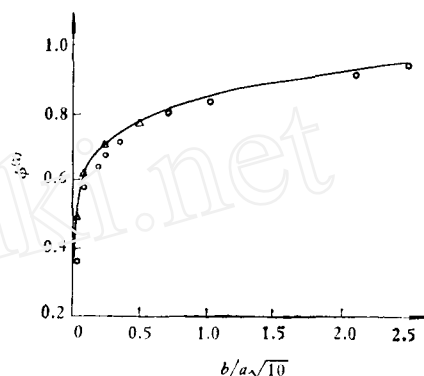


图 4

○文献[11] △本文 ——文献[6]

表 1 不同板长时应力强度因子的数值

$2L(\text{cm})$	$20a$	$40a$	相对误差
$K_I(\text{kg}/\text{cm}^{3/2})$	7.473003	7.439645	0.448%

表 2 不同板厚时应力强度因子的数值

h/a	$\phi(1)$	$K_I(\text{kg}/\text{cm}^{3/2})$ (本文)	K_I (文献[6])	相对误差
0.1	0.470	484.0218	499.832	3.16%
0.5	0.693	28.61372	29.4794	2.79%
1	0.744	7.818764	7.9181	1.25%
2	0.815	2.162566	2.1668	0.195%

从计算结果可以看出,当 $h/a > 1$ 时,计算值与文献[6]所得值没有什么差别。但随着板变薄,误差有所增加。但即使在很薄的板情况下, ($h/a = 0.1$) 误差也在 3% 左右。作为对比,图 4 中同时列出文献[11]用等参元计算的结果。在 $h/a = 0.04$ 薄板情况下,文献[11]结果为 0.372, 误差达 13%。这个误差是由于畸变等参元不能很好地描述裂纹尖端位移场所引起的。它只能形成应力 $r^{-1/2}$ 阶奇异性,而且在单元内部并不一定符合真实的应力分布。

3. 有限尺寸板的应力强度因子

为了探讨有限尺寸板在不同板厚、不同板宽时应力强度因子的变化。对于各种厚度

表 3 不同厚度平板的有限尺寸效应

a/L	$K_I(\text{kg}/\text{cm}^{3/2})$		
	$h/a = 0.1$	$h/a = 0.5$	$h/a = 1$
0.1	484.0218	28.6137	7.81876
0.2	497.3406	28.3607	8.05696
0.4	516.7353	31.9158	8.85120
0.5	549.7369	34.18575	9.56300

的平板, 分别计算了 $a/L = 0.1, 0.2, 0.4, 0.5$ 四种情况下应力强度因子的数值。边界弯矩均取 $1\text{kg}\cdot\text{cm}/\text{cm}$, 裂纹半长 $a = 1\text{cm}$ 。计算结果见表 3.3 及图 5, 图 6。

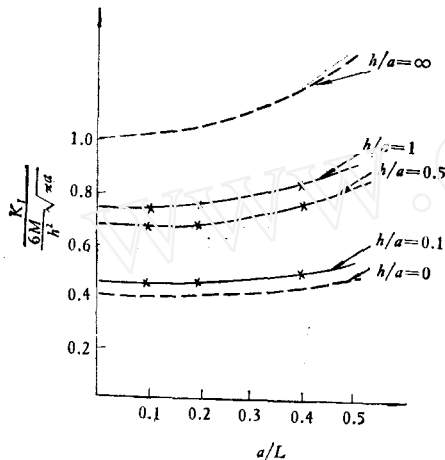


图 5

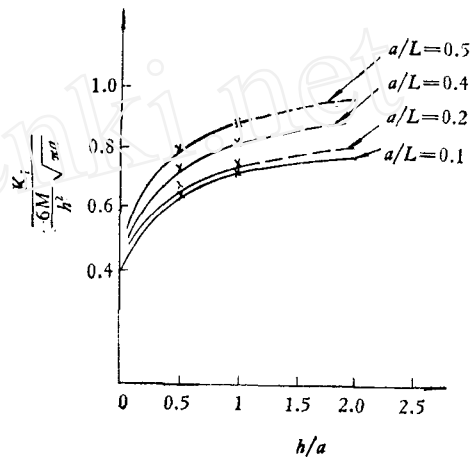


图 6

在图 5 和图 6 中, 纵坐标均取无量纲应力强度因子 $K_I / \left(\sqrt{\frac{6M}{h^2}} \sqrt{\pi a} \right)$, 即 Reissner 型有限尺寸板应力强度因子与 Kirchhoff 板在无限大时应力强度因子之比值。图 5 和图 6 分别表示无量纲应力强度因子随 a/L 和 h/a 的变化规律。

在图 5 中同时画出 $h/a = 0$ 和 $h/a = \infty$ 时无量纲应力强度因子随 a/L 的变化曲线^[13]。由于 $h/a = \infty$ 时板的受力状态与平面应力问题相同, 所以相应于 $h/a = \infty$ 的曲线是按照平面断裂问题推算的。相应于 $h/a = 0$ 的曲线是利用板厚为零时 Reissner 型板应力强度因子与 Kirchhoff 板应力强度因子之比为 $(1 + \nu)/(3 + \nu)$, 由 Kirchhoff 板相应曲线^[17]乘上 $(1 + \nu)/(3 + \nu)$ 推算而得。

从图 5 可以看出, 随着 a/L 增大, 该无量纲应力强度因子随之增大。此外, 在相同的 a/L 之下, Kirchhoff 板相应的值最小。随着 h/a 增大, 该值不断增大, 当 $h/a = \infty$ 时, 该值最大并等于平面断裂问题相应值。

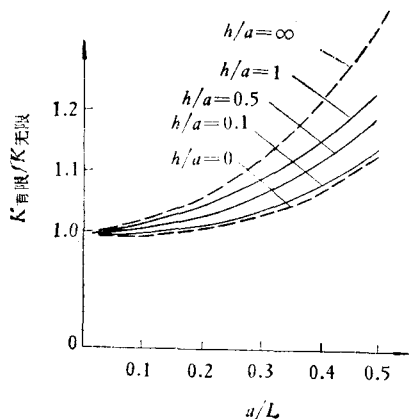


图 7

如果将不同板宽时 Reissner 型板应力强度因子分别除以 Reissner 型板无限大时的应力强度因子, 就得到板的有限尺寸效应系数, 如图 7 所示。可以看出, 对于各种厚度的板, 当 a/L 增大时, 有限尺寸效应系数随之增大。而且板越厚, 该系数增大更多一些。例如, 对于 $h/a = 0.1, 0.5, 1$ 三种厚度比, 当 $a/L = 0.4$ 时分别为 1.0676, 1.1154, 1.1320, 而当 $a/L = 0.5$ 时, 分别增加到 1.1358, 1.1947 和 1.2231。

4. 不同支承条件对应力强度因子影响

这个问题在文献[11]、[13]、[14]中均没有论及。为了比较不同支承条件对应力强度因子的影响,计算了 $h/a = 1$ 的四边简支板,并将其和四边自由板进行比较。在两种情况下,均施加均匀边界弯矩 1kgcm/cm 。计算结果如表 4 所示,并表示在图 3.6 的曲线中。

表 4 不同支承条件下应力强度因子

a/L	$K_I(\text{kg/cm}^{3/2})$		
	四边简支板	四边自由板	K_I 简支/ K_I 自由
0.1	5.246187	7.818764	67.1%
0.2	5.407619	8.056962	67.1%
0.4	5.736731	8.851205	64.8%
0.5	5.776664	9.563001	60.4%

从计算结果可以看出,当外荷载和几何尺寸相同时,在均布边界弯矩作用下,简支板的应力强度因子比自由板应力强度因子小30~40%,即使在 a/L 很小时(例如 $a/L = 0.1$)亦是如此。此外,简支板的有限尺寸效应系数与自由板亦有所不同。对自由板而言,当 a/L 增大时,有限尺寸效应系数不断增大。但对简支板而言,当 a/L 增大到 0.4 以后,虽然 a/L 再增大,但有限尺寸效应系数趋向平缓。

5. 矩形板的应力强度因子

以上各项计算均是以方板($L = W$)进行的。对于 $h/a = 0.1$,板长 $2L = 20\text{cm}$ 板宽 $2W$ 分别取 20cm , 10cm , 5cm , 4cm 的矩形板计算结果如表 5 所示。

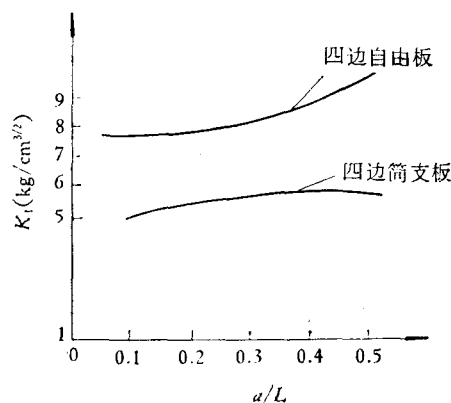


图 8

表 5 不同边长比对应力强度因子的影响

$2W(\text{cm})$	$K_I(\text{kg/cm}^{3/2})$		
	矩形 ($2L = 20\text{cm}$)	方板 $L = W$	$(K_I)_{\text{矩形}}/(K_I)_{\text{方板}}$
20	484.0218	484.0218	1
10	496.9064	497.3406	0.999
5	500.157	516.7353	0.967
4	525.008	549.7369	0.955

从计算结果可以看出,当板长不变而板宽变小,则应力强度因子增大。此外,还可以看出,矩形板的应力强度因子总是介于与其同宽的方板和无限大板的应力强度因子之间。在本文的计算范围内($h/a = 0.1$),若用方板代替矩形板,其误差在 5% 左右。

四、结 论

1. 从本文有限元计算结果可以看出,采用不同的平板弯曲理论,应力强度因子的数值有很大不同。当采用 Kirchhoff 板理论时,板越薄,即 h/a 值越小,则所求得的应力强度

因子与 Reissner 理论的解答的差值反而越大。

2. 本文用高阶奇异元计算 Reissner 型板弯曲应力强度因子, 与同类工作相比, 计算精度有较大的改进。根据足够宽度的板 ($2L = 20a$) 的计算结果与无限大板理论解相比较, 当 $h/a = 1$ 时, 误差 1% 左右, 即使对于 $h/a = 0.1$ 的薄板, 误差只有 3%。而文献 [11] 用畸变等参元方法最大误差为 13%。此外, 本文可以直接从奇异元系数中获得应力强度因子的数值, 而畸变等参元的方法则需要根据位移场用最小二乘法去推求应力强度因子。

3. 本文讨论了有限尺寸板在不同厚度比、不同宽度比时应力强度因子的变化。随着 a/L 增大, 板的有限尺寸效应系数随之增大, 而且板厚比 h/a 越大, 该系数增大更多一些。

4. 本文根据胡海昌和柳春图提出的 Reissner 型板 J 积分计算公式计算了平板弯曲应力强度因子, 在本文的算例中, 其精度在 5% 左右。Bergez 曾根据 Kirchhoff 板元计算 J 积分, 其应力强度因子与 Reissner 理论解相比大 70%, 并指出即使在数值计算中采用 Kirchhoff 理论也是不合适的。

5. 本文讨论了取裂纹尖端位移场展开式首项为位移模式与取前三阶为位移模式的区别。并指出当 $r < 0.1a$ 时两者误差不大, 但当 $r > 0.1a$ 时误差急剧增大。因此, 当仅取展开式首项作为奇异元位移模式时, 奇异元尺寸应限制在 $0.1a$ 以内, 因而不能描写离裂纹尖端稍远地方的奇异性, 结果影响了计算精度。

6. 本文从计算角度讨论了奇异元最佳尺寸的选择, 初步经验是, 奇异元尺寸应取为 $R = 0.1 - 0.4[a, h]_{\min}$ 。上述数值比取展开式首项为位移模式的奇异元尺寸要大些, 这有利于计算结果稳定和提高精度。

7. 本文对不同支承情况的应力强度因子进行了讨论, 指出仅承受边界均布弯矩、荷载且荷载大小和几何尺寸相同时, 简支板的应力强度因子比自由板的应力强度因子小 30% 左右, 当 a/L 增大时, 简支板的有限尺寸效应系数也随之增大, 但在 $a/L = 0.4$ 之后便趋向平缓。

8. 本文计算了矩形板的应力强度因子, 指出当板长不变而板宽变小时, 应力强度因子增大。矩形板的应力强度因子介于与其同宽的方形板和无限大板的应力强度因子之间。在本文计算范围内 ($h/a = 0.1$) 用方板代替矩形板的计算误差在 5% 以内。

9. 本文比较了 Kirchhoff 板的有限尺寸效应系数和 Reissner 型板的有限尺寸效应系数的区别。指出在 a/L 相同的情况下, Reissner 型板的有限尺寸效应系数总是介于 Kirchhoff 板和平面拉伸问题相应值之间, 但在 $h/a = 0.1$ 的薄板情况下, Reissner 型板和 Kirchhoff 板的有限尺寸效应系数区别并不是很大的。

参 考 文 献

- [1] 柳春图, Reissner 型中厚板在弯曲问题中裂纹尖端附近应力应变场, 第三届全国断裂力学会议文集(1981)。
- [2] 胡海昌, 弹性力学的变分原理及其应用(1981)。
- [3] Bergez, D., Linear elastic fracture mechanics applied to cracked plates and shells, *Int. J. Fracture*, **12**, 4(1976), 587—593.
- [4] Williams, M. L., The Bending Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack. *J. Appl.*

- Mech.*, **28**, (1961), 78—82.
- [5] Knowles, J. K. and Wang, N. M., On the bending of an elastic plate containing a crack, *J. Mathem. and Phys.*, **39** (1960), 223—236.
- [6] Hartanft, R. J. and Sih, G. C., effect of plate thickness on the bending stress distribution around Through cracks, *J. Math. and Phys.*, **47** (1968), 276—291.
- [7] Smith, D. G. and Smith, C. W., A Photo-elastic evaluation of the influence of closure and other effects upon the local bending stress in cracked plates, *Int. J. Fract.*, **6**, 3 (1970), 305—318.
- [8] Prgor, C. W. and Barker, R. M., Finit element bending analysis of reissner plates, *J. Eng. Mech. Division*, proc. ASCE, **96**, No EM6 (1970), 967—983.
- [9] Delate, F. and Erdogan, F., The Effect of transverse shear in a cracked plate under skew-symmetric loading, *J. Appl. Mech.*, **46**, 3 (1979).
- [10] Wilson, W. K., Thompson, D. G., On the finite element method for calculating stress intensity factors for cracked plates in bending, *Eng. Fract. Mech.*, **3**, 2 (1971).
- [11] Barsoum, R. S., A degenerate solid element for linear fracture analysis of plate bending and general shells, *Int. J. Num. Meth. in Eng.* **10** (1976), 551—564.
- [12] Zienkiewicz, O. C., *The Finite Method in Engineering Science*, McGraw-Hill, London (1971).
- [13] Yagawa, G., Finite element analysis of stress intensity factors for plate extension and plate bending problems, *Int. J. Num. Meth.* **14**, 5 (1979).
- [14] Jalees ahmad and Francis T. C. Loo, Solution of plate bending problems in fracture mechanics using a specialized finite element technique, *Eng. Fract Mech.* **11**, 4 (1979).

ANALYSIS OF REISSNER'S PLATE BENDING FRACTURE PROBLEM

Li Yingzhi, Liu Chuntu

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

In this paper, based on the asymptotic solution of the crack-tip displacement field for Reissner's plate, a high-order special element is proposed to obtain the bending stress intensity factor. Considering the effect of transverse shear deformation, the variation of stress intensity factor of finite plates with the change in thickness, width and boundary conditions is investigated. The choice of the displacement function, the selection of the special element optimum size are discussed and the J integral of the Reissner's plate is calculated.