粘性不可压缩流体定常流动的差分解法

叶　敬　棠
（复　旦　大　学）

提要　本文研究了定常 N-S 型方程和压力泊松方程的耦合求解．提出了一种处理压力自洽边界条件的方法，结合文［7］中给出的自调差分格式，可以对一些较复杂的粘性不可压缩流进行数值求解．

不可压缩流体的运动由 N-S 方程所控制，由于方程的非线性，加上压力场和流场的耦合又必须满足不可压缩性方程，整个问题就比较难处理．在二元流情况下不少人采用流函数-涡量法[1]，避开了同时处理压力场和流场的困难，取得了一些成功．但是这一方法难于推广到三元流情况．对于定常的二、三元流，有人采用时间相关法，从不定常的 N-S 方程出发，求得定常的渐近解，也有直接从定常方程出发．Spalding[2] 提出的抛物型流计算方法就是从定常方程出发，但忽略了二阶纵向导数效应，只能适用于主流方向比较确定的流动．本文也直接从定常的 N-S 方程和压力泊松方程出发，研究能适用于较复杂流动的数值解法．

较复杂的流动，如带回流的流动，已属湍流范畴．虽然湍流计算所用的出发方程已不是 N-S 方程．但是目前应用较多的 K-ε 模式等湍流模式理论的基本方程仍是 N-S 型的[3,4]，即有非线性的对流部分，也有扩散部分．因此，本文的出发方程是 N-S 型方程，所提的解法也将适用于湍流计算．

由于不易找到 N-S 方程的回流型精确解，无法把数值解和精确解作对比，而和实验数据对比又不易判明精度，因此本文提出一类能代表回流的模拟流，它满足的是 N-S 型方程，保留了 N-S 方程的主要特点，但增加了某种外力场或动量率分布源．利用这一类模拟流，可以有效地校验本文数值方法的精度．本文也计算了能精确满足 N-S 方程的环流解，比较了精度．

一、基本方程和求解方法

1. 基本方程和定解条件

定常的 N-S 方程

$$u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + F_i \tag{1}$$

压力泊松方程

本文于 1982 年 2 月 11 日收到．

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_k^2} = -\rho \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \tag{2}$$

式中 ν，当流动为湍流时可视为涡粘性系数，而 F_i 就是涡粘性模式的修正项．式(1)，(2)组成本文研究的基本方程．它们的定解条件是：在边界 S 上给定 u_i 的值

$$u_i|_S = f_i(M) \quad M \in S \tag{3}$$

对于压力 P 不应另给条件[5]，因此式(2)的定解条件要从式(1)导出．

2. 解动量方程的自调格式

对于动量方程的差分式已有不少研究，文献[6]、[7]两文从不同角度导出的差分格式都是带有自调能力的格式，我们利用文献[6]中的自调差分格式．在小网格雷诺数条件下，此格式的精度和中心差格式相当．网格雷诺数增大后，中心差格式发散，自调格式仍能保证迭代收敛，而且精度优于上风格式．以二元流为例，按图 1 所示的网格，并把 u_1、u_2

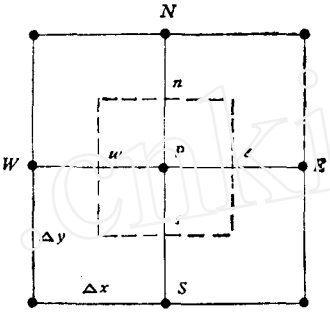

图　1

改写为 u、v，把 x_1，x_2 改写为 x，y，则方程(1)中第一式的自调差分式为

$$D_P^u u_P - D_W^u u_W - D_E^u u_E - D_S^u u_S - D_N^u u_N + \frac{1}{\rho}\frac{P_E - P_W}{2\cdot\Delta y} - \iint_{\Delta x\Delta y} F_1 dxdy = 0 \tag{4}$$

其中

$$\begin{aligned} D_P^u &= D_W^u + D_E^u + D_S^u + D_N^u \\ D_W^u &= |A_w| + A_w + B_w - 2\alpha_w|A_w| \\ D_E^u &= |A_e| - A_e + B_e - 2\alpha_e|A_e| \\ D_S^u &= |A_s| + A_s + B_s - 2\alpha_s|A_s| \\ D_N^u &= |A_n| - A_n + B_n - 2\alpha_n|A_n| \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &A_w = u_w\cdot\Delta y/2,\ A_e = u_e\cdot\Delta y/2,\ A_s = v_s\Delta x/2,\ A_n = v_n\Delta x/2 \\ &B_w = B_E = \nu\Delta y/\Delta x,\ B_s = B_n = \nu\Delta x/\Delta y, \\ &u_w = (u_W + u_P)/2,\ \alpha_w = (4 - R_{0w}\beta)/[8 + 2(1-\beta)R_{0w}] \\ &R_{0w} = \begin{cases} |2A_w/B_w| & \text{当 } |2A_w/B_w| < 8 \\ 4/\beta & \text{当 } |2A_w/B_w| \geqslant 8 \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

u_e、u_s、u_n，α_e、α_s、α_n，R_{0e}、R_{0s}、R_{0n} 有相应的表示式，相应地有 v 方程的差分式．

如取诸 α 为零，则退化为上风差格式．

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

3. 压力泊松方程边界条件的处理

对压力泊松方程采用通常的五点差分式(取 $\Delta y = \Delta x$)

$$P_W + P_E + P_S + P_N - 4P_P = (\Delta x)^2 \left[-\rho \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right]_P \tag{6}$$

定解的边界条件由(1)给出,在左右边界上,由(1)的第一式,并利用连续性方程给出 Neumann 型自洽边界条件

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \rho\nu\left(-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \rho F_1 \tag{7}$$

在上、下边界上自洽边界条件为

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho\left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \rho\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) + \rho F_2 \tag{8}$$

选择(7)、(8)的差分形式要注意和(2)的差分式相适应. 还要注意满足迭代收敛条件. 对于五点格式(6),它有 $n \times m + 2(n + m)$ 个待解的 P,而方程数为 $n \times m$,所以要列出 $2(n \times m)$ 个差分边界条件,对于左右边界,可以写出(7)的差分式

$$\left.\begin{aligned} P_{1,j} - P_{0,j} &= \rho\Delta x \left[-\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \nu\left(-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + F_1\right]_{\frac{1}{2},j} \\ P_{n+1,j} - P_{n,j} &= \rho\Delta x \left[-\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \nu\left(-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + F_1\right]_{n+\frac{1}{2},j} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$j = 1, 2, \cdots m$$

对于上、下边界,可以写出(8)的差分式

$$\left.\begin{aligned} P_{i,1} - P_{i,0} &= \rho\Delta y \left[-\left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) + F_2\right]_{i,\frac{1}{2}} \\ P_{i,m+1} - P_{i,m} &= \rho\Delta y \left[-\left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) + F_2\right]_{i,m+\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

在导出(9)、(10)式时利用了连续性方程. (9)、(10)和(6)都有二阶精度. 但是,$2(n+m)$ 个数值边界条件(9)、(10)全是 Neumann 型条件. 在这些条件下,式(6)的解还不确定,迭代时解要不断漂移. 这和出现在(1)中的 P 可以相差一个任意常数是相对应的,必须在一边界点上指定 P 的值,即把(9)、(10)中的一个 Neumann 条件改为 Dirichlet 型条件,例如取

$$P_{1,0} = \text{已知值} \tag{11}$$

由 $2(n + m) - 1$ 个 Neumann 型条件和一个 Dirichlet 型条件就可完全决定 P.

4. 迭代步骤和迭代收敛条件

由(1)、(2)组成的基本方程是非线性方程组,相应的差分方程也是非线性的. 式(1)中的系数 D 包含待解的 u、v,(6)、(9)、(10)中的右端项也包含待解的 u、v,因此,整个差分方程组要用迭代法求解. 在每一迭代(大迭代)循环中,先按上一迭代所得的 $u^{(n)}$,$v^{(n)}$,$P^{(n)}$ 算出(4)式中的系数 D 和右端项,再利用边界条件(3)来解(4)式,所得的解记为 u^*、v^*,然后按松弛式

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\left.\begin{aligned} u^{(n+1)} &= (1-\lambda)u^{(n)} + \lambda u^* \\ v^{(n+1)} &= (1-\lambda)v^{(n)} + \lambda v^* \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

计算出 $n+1$ 次近似流场 $u^{(n+1)}$、$v^{(n+1)}$，由此新的近似流场可以计算出方程(6)和边界条件(9)、(10)的右端项，再利用条件(11)，解出方程组(6)、(9)和(10)，记所得之解为 P^*，又按

$$P^{(n+1)} = (1-\xi)P^{(n)} + \xi P^* \tag{13}$$

算出 $n+1$ 次近似压力场，(12)和(13)中的 λ 和 ξ 都是松弛因子．重复上述步骤，直至收敛，就得所求的 u，v，和 P．在解(4)、(6)式时，可以按交替方向法化为三对角线方程组，用追赶法求解，这时还要迭代(称小迭代)，但这一迭代收敛很快，对较简单的流场(如环形流)，迭代四、五次就达到收敛要求．对于较复杂的流场(如本文的四旋涡型流)则要迭代几十次才能收敛．

关于非线性方程组的迭代收敛性的论证，目前还只能按线化法来分析，即在假定(4)中的系数 D 和 (4)、(6)、(9)、(10) 的右端皆为已知的条件下来分析，也即分析小迭代的收敛性．从线代数理论知道：不可约的线性代数方程组

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}y_j = B_i \quad (i = 1,\cdots,n) \tag{14}$$

的迭代收敛充分条件是对任一 i 值，成立不等式

$$|A_{ii}| \geqslant \sum_{j\neq i} |A_{ij}| \tag{15}$$

而且(15)中有一式为真不等式．

根据这一定理，在文[7]中已证明了自调差分式(4)满足条件(15)．对于由差分式(6)和边界条件差分式(9)、(10)组成的代数方程，显见是不可约的，而且也满足(15)式．再据条件(11)知，(10)式中的第一式当 $i=1$ 时其系数满足真不等式，故而知(6)、(9)、(10)可用迭代法求解．从而表明，自洽边界条件的差分处理(9)、(10)是合理的．

5. 关于收敛速度和松弛因子

本文提出的差分解法属定常迭代法，用于计算较简单的流动(如环流)，当网格数为 20×20，在每秒十余万次运算速度的中小型计算机上计算，约 10—14 分钟就可达到 10^{-3} 量级的收敛程度．和时间相关法相比，在达到同样精度时，时间相关法约需 20—25 分钟时间．定常迭代法几乎快了一倍．对于较复杂的回流，计算时间则要增加好几倍．雷诺数小时约需 45—80 分钟，雷诺数大时，计算时间还要增加．这和文献[7]中关于动量方程的计算情况是相对应的，所有松弛因子都取低松弛值．雷诺数小时取 0.5，大时取 0.1—0.2，本文的计算网格为 20×20，或 30×30．

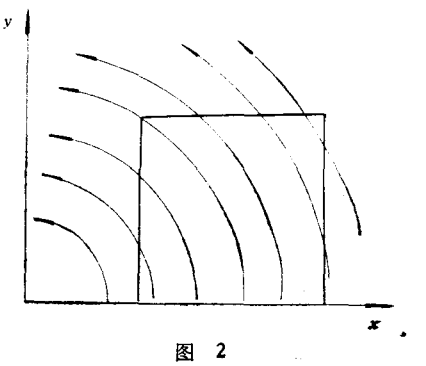

图 2

6. 算例

例 1．环流(图 2)

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

取计算区域如图 2 所示，流场为

$$v_\theta = \frac{\omega_1 r_1^2 - \omega_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{(\omega_1 - \omega_2) r_1^2 r_2^2}{(r_1^2 - r_2^2) r}$$

计算精度按平均相对误差表示

$$\mathrm{err} = \left(\frac{\sum_{i,j} |u_{计} - u_{精}|}{\sum_{i,j} |u_{精}|} + \frac{\sum_{i,j} |v_{计} - v_{精}|}{\sum_{i,j} |v_{精}|} \right) \Big/ 2$$

计算结果见于表 1，其中 $\mathrm{Re}_{\Delta x} = U \cdot \Delta x / \nu$ 是特征网格雷诺数.

表 1

Re	25	50	100	200	400	800	3200	网格数
$\mathrm{Re}_{\Delta x}$	1.25	2.5	5	10	20	40	160	
err(u,v)	0.0013	0.0016	0.0036	0.0043	0.0045	0.0046	0.0048	20×20
err(P)	0.0021	0.0023	0.0043	0.0045	0.0051	0.0056	0.0057	

例 2. 拟回流(图 3)

图 3 表示的是模拟分离区流动的拟回流，其 u, v, P 值为

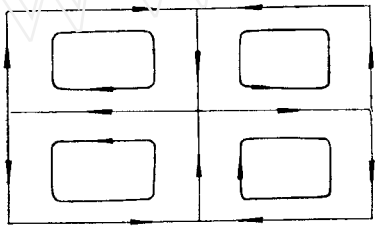

图 3

$$u = g_1 \sin \frac{2\pi x}{L_1} \cos \frac{2\pi y}{L_2}$$

$$v = g_2 \cos \frac{2\pi x}{L_1} \sin \frac{2\pi y}{L_2}$$

$$P = P_0 + \rho \left(g_1^2 \cos^2 \frac{2\pi x}{L_1} + g_2^2 \cos^2 \frac{2\pi y}{L_2} \right) \Big/ 2$$

其中四个参数 g_1, g_2, L_1 和 L_2 满足关系式

$$g_1/L_1 + g_2/L_2 = 0$$

如此定出的拟流动是不可压缩的，它满足 N-S 型方程(1)，只要取(1)中的

$$F_1 = A g_1 \sin \frac{2\pi x}{L_1} \cos \frac{2\pi y}{L_2}$$

$$F_2 = A g_2 \cos \frac{2\pi x}{L_1} \sin \frac{2\pi y}{L_2}$$

$$A = \nu \left[\left(\frac{2\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{L_2} \right)^2 \right]$$

计算结果见表 2.

表 3 是对方程 (6) 的右端项采用两种不同近似时的计算结果比较. 一种是三次 *spline* 插值近似，一种是普通的中心差近似，由此表可以看出提高差分式 (6) 的右端项的精度对于计算结果有相当大的影响，特别是对 P 值的影响较大.

表 4 列出了单纯解 u, v 方程(假定 P 已知)和联合解 u, v, P 时关于 u, v 精度的比较.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

表 2

Re	10	20	40	60	100	200	网格数
$Re_{\Delta x}$	1/3	2/3	4/3	2	10/3	20/3	
$err(u,v)$	0.0079	0.0176	0.0371	0.058	0.165	0.24	30×30
$err(P)$	0.0039	0.0064	0.011	0.042	0.044	0.046	

表 3

$Re=10,\ Re_{\Delta x}=1/3,\ 30\times 30$	$err(u,v)$	$err(P)$
右端三次 *spline* 近似	0.0079	0.0039
右端中心差近似	0.0202	0.060

表 4　$err(u, v)$ 比较

$Re_{\Delta x}$	1	2
只解 u,v	0.0138	0.028
解 u,v,P	0.0377	0.0775

结　论

1. 本文关于在网格边线中点上给出压力泊松方程的自洽 Neumann 型边界条件加上在一个边界点上给出 Dirichlet 型条件的方法是有效的.

2. 用自调差分格式加自洽 Neumann 型边界条件可以实现对定常不可压缩 u,v,P 方程组的直接求解,算例是在二元流中进行的,但所有提法及算式可直接推广到三元情况.

3. 回流的计算比较难,但从表 2 可以看出,加密网格,控制网格雷诺数,还是可以达到足够的精度.

4. 从表 3, 表 4 可以看出,改进 P 方程的差分精度,对于提高整个 u, v 解的精度具有不可忽视的作用, 可以考虑对 P 方程采用更高精度的差分格式及研究相应的自洽边界条件.

参　考　文　献

[1] Greenspan, D., Discrete Numerical methods in Physics and Engineering, Academic Press, New York (1974).

[2] Patankar, S. V. and Spalding, D. B., A calculation procedure for heat. mass and momentum transfer in the three-dimentional parabolic flows, *Inter. J. of Heat. Mass Transfer*. 15(1972).

[3] Saffman, P. G., A Phenomenological Thery for the Computation of Turbulence flows, Turbulence Seminar, Bekerly, 1977—1978.

[4] Mellor, G. L. and Herring, H. J.. A Survey of the mean Turbulent field closure models, *AIAA J.*, **11**. 5(1973).

[5] Ladyzhenskaya, O. A., Mathematical analysis of Navier-Stokes equations for incompressible Liquids, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 7(1975).

[6] Chien, J. C., A general finite-difference formulation with application to Navier-Stokes equations, *J. of Computational physics*, **20**, 3(1976).

[7] 叶敬棠,定常不可压缩对流扩散方程的一种改进的差分解法,力学学报,2(1983).

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

A DIFFERENCE METHOD FOR THE STEADY FLOW OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID

Ye Jingtang
(*Fudan University*)

Abstract

In this paper author investigates a numerical method for the time independent equations of N-S type and pressure Poisson equation. A method for handling the self consistent boundary conditions of pressure is proposed. Utilizing these boundary conditions and the self-adjusting difference scheme proposed in paper [6], numerical solution of complicated flow of viscous incompressible fluid can be obtained.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net