

# 树形多刚体系统的动力学普遍方程

周 起 钊

(北 京 大 学)

**提要** 本文继 J. Wittenburg, 之后用图论的观点分析树形多刚体系统的结构, 提出重叠子树结构的力学模型及脉络图定义, 改进了增广体的概念从而使系统可以进行动力学等效分解. 在规定一些符号及运算规则以后使用紧凑的矩阵形式导出树形多刚体系统动力学普遍方程组. 在引进铰链矩阵以后系统的约束和运动学关系都写成矩阵形式, 从而导出以广义坐标表出的动力学方程组, 便于进行数值计算的程序设计.

## 一、引 言

从基本理论的角度看研究多刚体系统的重要课题之一是建立其动力学普遍方程, 它们应该通用(刚体数目不限, 相互间联系关系不限、约束方式不限)、简洁且便于进行数值计算的程序设计.

J. Wittenburg<sup>[2,3,4]</sup> 引用了图论的某些概念和结果在此领域中是开创性的重要步骤, 但在基本概念的建立方面失之于系统与严格, 在图论的应用方面未能深入地挖掘下去因而对系统的结构特性缺乏整体的深入分析, 在运算工具方面他未能始终应用紧凑的矩阵形式. 以上两点使得他的论证重复而烦琐. 从动力学方面来观察, 体比较处于更为重要的地位因此本文提出脉络图的定义. 从而可以对系统整体建立重叠子树结构的力学模型. 系统中某个刚体与单个刚体的动力学有某些共性, 这是推广 Euler 方程的关键, 由于上方刚体与下方刚体的动力学效应并不相同, 因此本文改进了由 Otto Fisher<sup>[5]</sup> 首创由 Wittenburg 继承的增广体概念, 从而可轻易地对系统进行动力学等效分解.

## 二、符号与运算规则

本文所使用的矩阵符号有以下三类:

1. 元素是标量的矩阵或列阵, 如  $I$ ,  $H$ ,  $M$ ,  $q$  等.
2. 以  $b_i (i = 1, \dots, n)$  为元素的向量列阵用  $\mathbf{b}$  表示, 以  $b_i$  为元素的对角向量矩阵用  $\mathbf{b}$  表示, 以  $b_{ij}^T$  为元素的向量矩阵用  $\mathbf{b}^T$  表示, 余此类推.
3. 二阶张量对应的矩阵表示如  $\underline{J}_{ij}$ . 以  $\underline{J}_{ij}$  为元素组成的张量矩阵记为  $\underline{J}$ , 它形式上是一个  $3n \times 3n$  阶的标量矩阵.

三类矩阵之间的运算规则一方面保持熟知的标量矩阵间的运算规则, 另一方面当相应元素运算时又保持标量、向量和张量间的运算规则, 如  $\mathbf{b}^T \times \mathbf{F}$  的结果是向量列阵其第

本文于 1982 年 6 月 25 日收到.

$k$  个元素为  $\sum_{j=1}^n b_{kj} \times F_j$ , 又如  $\underline{\underline{J}} \cdot \omega$  的结果是向量列阵其第  $k$  个元素为  $\sum_{j=1}^n \underline{\underline{J}}_{kj} \cdot \omega_j$ , 而  $\underline{\underline{J}}_{kj} \cdot \omega_j$  按张量与向量之间运算规则进行运算.

### 三、树形系统的结构分析

考虑  $n$  个刚体组成的多刚体系统  $[B: B_k \in B, k = 1, \dots, n]$ .

**定义 1** 若两个刚体上(或在其延拓部份) 分别有一点绝对速度恒相等则称该点为**铰链**记为  $h_j$ .

被铰接的两刚体可绕  $h_j$  作相对转动, 转动自由度  $S_j$  称为**维数**, 可能有  $S_j = 1, 2, 3$  三种情形.

**定义 2** 绝对运动已知的刚体称为零刚体  $B_0$ , 若刚体系  $B$  中有一刚体(记为  $B_1$ ) 与  $B_0$  铰接, 铰链记为  $h_1$  称为  $B$  的**根基**, 这样的系统称为**有根系统** 否则称为**悬空系统**.

本文只讨论有根系统, 如取与系统质心固连的平动参考体为零刚体, 则本文的结果可以推广到悬空系统中去. 唯零刚体的运动需由系统质心运动方程求得.

**定义 3**  $B$  和  $B_0$  组成含  $n+1$  个元素的集合  $[B^+: B_k \in B^+, k = 0, 1, \dots, n]$ , 刚体间铰链的集合  $[H: h_j \in H, j = 1, \dots, m]$  是  $B^+$  的无序积  $B^+ \& B^+$  的子集, 则偶对  $(B^+, H)$  组成一个图称为**体铰图**,  $E_k$  为其顶点,  $h_j$  为其边. 若体铰图是树<sup>[4]</sup> 则对应的刚体系统称为**树形系统**.

树形系统的充要条件是每个刚体上至少有一个铰, 且  $m = n$ . 本文只讨论树形系统.

以  $B_0$  为起点(定为**下方**) 体铰图中其他各个悬挂点为终点(定为**上方**) 标定各条通路的方向, 则体铰图成为一棵外向树. 因此在同一条通路中各刚体和铰链之间就都有上下之分.

**定义 4** 考虑  $B$  中任意刚体  $B_k$ , 以其下方铰链  $h_k$  为起点(称为**根基**) 上方铰链  $h_j$  为终点(称为**树梢**) 的向量  $b_j$  称为树体  $B_k$  的**茎**,  $h_j$  上方所有的刚体都称为**叶片**, 全部叶片组成  $B_k$  的第  $j$  号**复合叶**, 它是以  $h_j$  为根基的一棵子树. 惯性系中定点  $o$ , 向径  $\gamma_k = \overrightarrow{oh_k}$  称为  $B_k$  的**根**,  $B_k$  的质心  $c_k$ , 连体向量  $c_k = \overrightarrow{h_k c_k}$  称为  $B_k$  的**树心**. 在零刚体上任取一点作为零铰链  $h_0$ , 约定  $b_1 = \overrightarrow{h_0 h_1}$  为零刚体的茎.

**定义 5**  $H$  和  $h_0$  组成含  $n+1$  个元素的集合  $[H^+: h_k \in H^+, k = 0, 1, \dots, n]$ , 全部茎的集合  $[b_k: b_j \in b, j = 1, \dots, n]$  是集合  $H^+$  的有序积  $H^+ \times H^+$  的子集, 偶对  $(H^+, b)$  组成一个有向图称为系统的**脉络图**, 铰链为其顶点茎为其弧.

根据定义不难证明同一树形系统的脉络图与体铰图是拓扑同构的.

树形系统的结构特点如下:

1. 系统  $B$  是一棵母树由  $n$  棵子树叠合而成, 最大的子树就是母树本身, 最小的子树没有茎因而也没有叶片.

2. 任何一棵以  $B_k$  为树体的子树在构造上都是相似的, 包含根(对应**有根基**)、树体(对应**有树心**)、茎(对应**有树梢**)以及复合叶(由若干叶片组成), 复合叶与茎的数目(可能为零)相同.

3. 除母树外每一棵子树都是另一棵子树的复合叶因此根基和树梢的含义是相对的。

**定义 6** 用自然数对系统中刚体、铰链和茎进行标号，满足以下条件者称**正规标号**：

- 1) 在体铰图中由  $B_0$  开始对刚体分层依次标号下层优先；
- 2) 子树根基标号与树体一致；
- 3) 茎的标号与树梢一致。

正规标号体铰图和脉络图的完全关联矩阵<sup>[1]</sup>相同其秩为  $n$ ，删去其中首行元素得出  $n \times n$  阶满秩矩阵  $\mathbf{I}$  称为  $B$  的关联矩阵，其逆记为  $\mathbf{H}$ ，它们有如下性质：

1.  $\mathbf{I}$  为上三角形其对角元素均为  $-1$ ，非零元素均为  $I_{kj} = +1$  ( $k < j$ ) 表示  $B_k$  与  $B_j$  之间有铰  $h_j$  相连。令  $\mathbf{I}^E = \mathbf{I} + \mathbf{E}$ ， $\mathbf{E}$  为单位矩阵， $\mathbf{I}^E$  第  $k$  行中的非零元素  $I_{kj}^E = +1$  ( $k < j$ ) 所在的列号  $j$  就是  $B_k$  上茎  $b_j$  的标号，记  $\underline{b}^{IE} = \mathbf{I}^E \underline{b}$  其第  $k$  行中非零元素都是  $B_k$  的茎。

2. 对应脉络图  $\mathbf{H}$  的元素取值意义为：

$$H_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{若茎 } b_i \text{ 在 } h_0 \text{ 至 } h_j \text{ 的通路中,} \\ 0 & \text{若茎 } b_i \text{ 不在 } h_0 \text{ 至 } h_j \text{ 的通路中.} \end{cases}$$

$\mathbf{H}$  也是上三角形的，非零元素全部都是  $-1$ 。

**定义 7** 设刚体  $B_k$  有  $n_k$  ( $n_k \geq 0$ ) 根茎  $b_{j,k}$  相应的树梢  $h_{j,k}$ ，以  $h_{j,k}$  为根基的第  $j^k$  号子树(复合叶)的总质量记为  $M_{j,k}$ ，将它作为集中质量附加在  $B_k$  的点  $h_{j,k}$  上而造成附有  $n_k$  个集中质量的刚体称为  $B_k$  的**推广体**记为  $B_k^*$ 。

$B_k^*$  的总质量就是第  $k$  号复合叶的总质量为  $M_k = m_k + \sum m_j$ ，其中  $m_k$  是  $B_k$  的质量，求和号应遍及  $B_k$  的全部叶片。有关系式  $M = -\mathbf{H} \underline{m}$ ，其中  $M$  和  $\underline{m}$  表示以  $M_k$  和  $m_k$  为元素的列阵。 $B_k^*$  的质心  $c_k^*$ ，连体向量  $\underline{d}_k = \overrightarrow{h_k c_k^*}$  满足关系式  $M_k \underline{d}_k = m_k \underline{c}_k + \sum m_j \underline{b}_{j,k}$ ，其中求和号应遍及  $B_k$  的全部茎共  $n_k$  项，写成矩阵形式为

$$\underline{M} \underline{d} = \underline{m} \underline{c} + \underline{b}^{IE} \underline{M} (\mathbf{I}^E)^T \quad (1)$$

其中  $\underline{M}$  和  $\underline{m}$  为对角矩阵， $T$  为转置符号。 $B_k^*$  的根为

$$\underline{r} = -\mathbf{H}^T \underline{b} + \underline{b}_0 \underline{1}_n \quad (2)$$

其中  $\underline{1}_n$  为元素都是 1 的  $n$  阶列阵， $\underline{b}_0 = \overrightarrow{o h_0}$ 。 $\underline{\ddot{r}}$  为各根基的绝对加速度  $\underline{a}_k$  所组成的列阵  $\underline{a}$ ，有关系式

$$\underline{a} = -\mathbf{H}^T \underline{\ddot{b}} + \underline{a}_0 \underline{1}_n \quad (3)$$

其中  $\underline{a}_0$  是  $h_0$  点的绝对加速度。

#### 四、动力学方程

任意刚体  $B_k$  的受力图如图 1(a) 所示，其中  $\underline{F}_k$  和  $\underline{L}_k$  是外力及外力偶矩， $\underline{X}_{j,k}^c$  和  $\underline{Y}_{j,k}^c$  是与树梢  $h_{j,k}$  对应的约束力和约束力偶矩， $\underline{Y}_{j,k}$  是铰链  $h_{j,k}$  中的阻尼及弹性力偶矩， $-\underline{X}_{j,k}^c$ 、 $-\underline{Y}_{j,k}^c$  和  $-\underline{Y}_{j,k}$  是根基  $h_k$  处相应的量，约定对应树梢取正号对应根基取负号。

分别考虑  $B_k$  的质心运动定理及对质心的动量矩定理，然后对整个系统写出矩阵形式的方程

$$\underline{m} (\underline{\ddot{r}} + \underline{\ddot{c}}) = \underline{F} + \underline{\mathbf{I}} \underline{X}^c \quad (4)$$

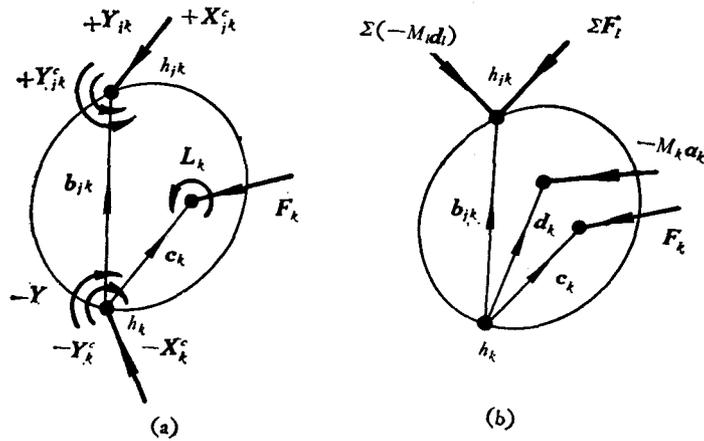


图 1

$$\dot{\mathbf{G}}^c = \mathbf{L} + \mathbf{I}\mathbf{Y} + \mathbf{I}\mathbf{Y}^c + \mathbf{b}^{IE} \times \mathbf{X}^c - \mathbf{c}\mathbf{I} \times \mathbf{X}^c \quad (5)$$

其中向量列阵  $\mathbf{G}^c$  的元素是  $B_k$  相对其质心的动量矩  $\mathbf{G}_k^c$ 。由式 (4) 解出  $\mathbf{X}^c$  并利用式 (3) 得

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^c &= \mathbf{H}(\mathbf{m}\dot{\mathbf{c}} + \mathbf{m}\mathbf{a}) - \mathbf{H}\mathbf{F} \\ &= \mathbf{H}\mathbf{m}\dot{\mathbf{c}} - \mathbf{H}\mathbf{m}\mathbf{H}^T\dot{\mathbf{b}} + \mathbf{H}\mathbf{m}(\mathbf{a}_0 \mathbf{1}_n) - \mathbf{H}\mathbf{F} \end{aligned} \quad (6)$$

利用式 (1) 和 (3) 经过计算可得出

$$\mathbf{H}\mathbf{m}\dot{\mathbf{c}} - \mathbf{H}\mathbf{m}\mathbf{H}^T\dot{\mathbf{b}} = -\mathbf{M}\mathbf{a} + \mathbf{H}\mathbf{M}\dot{\mathbf{d}} - \mathbf{H}\mathbf{m}(\mathbf{a}_0 \mathbf{1}_n) \quad (7)$$

代入式 (6) 得

$$\mathbf{X}^c = -\mathbf{M}\mathbf{a} + \mathbf{H}\mathbf{M}\dot{\mathbf{d}} - \mathbf{H}\mathbf{F} \quad (8)$$

应用式 (6) 和 (8) 消去式 (5) 中的  $\mathbf{X}^c$  并在所得的方程等号两边同时加上  $\mathbf{c} \times (\mathbf{m}\dot{\mathbf{c}}) + \mathbf{b}^{IE} \times (\mathbf{M}\dot{\mathbf{b}})$  得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{G}} &= \mathbf{L} + \mathbf{I}\mathbf{Y} + \mathbf{I}\mathbf{Y}^c + (\mathbf{c} - \mathbf{b}^{IE}\mathbf{H}) \times \mathbf{F} + \mathbf{b}^{IE} \times (\mathbf{H}\mathbf{M}\dot{\mathbf{d}}) \\ &\quad - \mathbf{c} \times (\mathbf{m}\mathbf{a}) + \mathbf{b}^{IE} \times \mathbf{M}(\dot{\mathbf{b}} - \mathbf{a}) \end{aligned} \quad (9)$$

其中等式左边的向量列阵  $\dot{\mathbf{G}}$  为

$$\dot{\mathbf{G}} = \dot{\mathbf{G}}^c + \mathbf{c} \times (\mathbf{m}\dot{\mathbf{c}}) + \mathbf{b}^{IE} \times (\mathbf{M}\dot{\mathbf{b}})$$

其元素  $\dot{\mathbf{G}}_k$  是  $B_k$  相对  $h_k$  动量矩的时间导数。根据式 (3) 可得

$$\dot{\mathbf{b}} - \mathbf{a} = -(\mathbf{I}^E)^T \mathbf{a} \quad (10)$$

借助式 (10) 和 (1) 将式 (9) 等号右端最后两项化简为

$$-\mathbf{c} \times (\mathbf{m}\mathbf{a}) + \mathbf{b}^{IE} \times \mathbf{M}(\dot{\mathbf{b}} - \mathbf{a}) = \mathbf{d} \times (-\mathbf{M}\mathbf{a}) \quad (11)$$

代入式 (9) 得出

$$\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{L} + \mathbf{I}\mathbf{Y} + \mathbf{I}\mathbf{Y}^c + (\mathbf{c} + \mathbf{b}^I) \times \mathbf{F} + \mathbf{b}^I \times (-\mathbf{M}\dot{\mathbf{d}}) + \mathbf{d} \times (-\mathbf{M}\mathbf{a}) \quad (12)$$

其中  $\mathbf{b}^I \equiv -\mathbf{b}^{IE}\mathbf{H}$  是严格上三角向量矩阵, 若其第  $k$  行有非零元素  $b_{kj}^I (j > k)$  则表示  $B_j$

是树体  $B_k$  的叶片而  $\underline{b}_{ki}^L$  就是  $B_k$  上长这张叶片的茎. 方程 (12) 是  $n$  个联立向量方程组, 对其中与任意刚体  $B_k$  对应的第  $k$  个方程可作出动力学等效的直观解释. 为叙述简便不妨设  $\underline{L} = \underline{Y} = \underline{Y}^c = 0$ , 第  $k$  个方程就是单个增广体  $B_k^*$  对于  $h_k$  点的动量矩方程其受力情况如下(见图 1(b)): 1)  $\underline{F}_k$  仍作用在  $B_k$  的质心  $c_k$ , 作用在第  $j^k$  号复合叶中各叶片上的外力都移置到相应的树梢  $h_{j^k}$  上去; 2) 根基点  $h_k$  的加速度  $\underline{a}_k$  造成一项“惯性力”  $-M_k \underline{a}_k$  作用在  $B_k^*$  的质心  $c_k^*$  处; 3) 每一张叶片造成一项“惯性力”  $-M_i \underline{d}_i$ , 第  $j^k$  号复合叶中所有这些“力”的向量和  $\sum -M_i \underline{d}_i$  (和号应遍及该复合叶中所有叶片) 作用在相应的树梢  $h_{j^k}$  上. 动力等效增广体模型是定点运动单刚体在概念上的一种推广 (当  $n=1$ ,  $\underline{a}=0$  时前者就退化成后者), 使我们有可能将多刚体系统进行动力学等效分解, 在一定意义下分别当作  $n$  个单刚体来处理.

方程 (12) 左边的  $\underline{\dot{G}}$  可以写成

$$\underline{\dot{G}} = \underline{\underline{J}}^B \cdot \underline{\dot{\omega}} + \underline{\omega} \times \underline{\underline{J}}^B \cdot \underline{\omega} \quad (13)$$

其中  $\underline{\omega}$  和  $\underline{\dot{\omega}}$  的元素  $\omega_k$  是  $B_k$  的绝对角速度, 对角张量矩阵  $\underline{\underline{J}}^B$  的元素  $\underline{J}_{kk}^B$  是  $B_k^*$  相对  $h_k$  的惯量张量. 因  $\underline{d}_k$  是  $B_k$  上的固连向量则有关系式

$$\underline{\ddot{d}} = \underline{\dot{\omega}} \times \underline{d} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{d}) \quad (14)$$

利用公式  $\underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C}) = (\underline{B}\underline{A} - \underline{B} \cdot \underline{C}\underline{E}) \cdot \underline{C}$  将式 (12) 中右端倒数第二项写成

$$\underline{\dot{L}} \times (-\underline{M}\underline{\ddot{d}}) = -\underline{\underline{J}}^L \cdot \underline{\dot{\omega}} - \underline{b}^L \times [\underline{M}\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{d})] \quad (15)$$

其中张量矩阵  $\underline{\underline{J}}^L$  的元素是二阶张量

$$\underline{J}_{kj}^L = -M_j (\underline{d}_j \underline{b}_{ki}^L - \underline{d}_i \cdot \underline{b}_{ki}^L \underline{E}) \quad (16)$$

当  $j \leq k$  时有  $\underline{b}_{ki}^L = 0$  则  $\underline{J}_{kj}^L = 0$ , 所以  $\underline{\underline{J}}^L$  是严格上三角张量矩阵, 只有当  $B_j$  是  $B_k$  的叶片 ( $j > k$ ) 时  $\underline{b}_{ki}^L$  才不为零故  $\underline{\underline{J}}^L$  是由叶片折算过来的张量矩阵. 令  $\underline{\omega}^b \equiv (\underline{I}^E)^T \underline{\omega} + \underline{\omega}_0 \underline{1}_n^1$ . 其中  $\underline{\omega}_0$  是零刚体绝对角速度,  $\underline{1}_n^1$  为  $n$  阶列阵其第一个元数为 1 其余的全为零;  $\underline{\omega}^b$  的元素  $\omega_j^b$  是茎  $\underline{b}_j$  所固连的那个刚体的绝对角速度. 对  $\underline{b}$  求两次导数得

$$\underline{\ddot{b}} = -\underline{b} \times \underline{\dot{\omega}}^b + \underline{\omega}^b \times (\underline{\omega}^b \times \underline{b}) \quad (17)$$

利用 (3) 和 (17) 可将 (12) 最后一项写成

$$\underline{d} \times (-\underline{M}\underline{\ddot{a}}) = -\underline{\underline{J}}^R \cdot \underline{\dot{\omega}} - \underline{M}\underline{d} \times \{ \underline{H}^T [\underline{b} \times \underline{\dot{\omega}}_0 \underline{1}_n^1 - \underline{\omega}^b \times (\underline{\omega}^b \times \underline{b})] + \underline{a}_0 \underline{1}_n \} \quad (18)$$

其中  $\underline{\underline{J}}^R$  是由根折算过来的惯量张量矩阵其元素为

$$\underline{J}_{ki}^R = -M_k (\underline{b}_{ik}^L \underline{d}_k - \underline{b}_{ik}^L \cdot \underline{d}_k \underline{E}) \quad (19)$$

对比式 (16) 和 (19) 可知有  $\underline{J}_{ji}^R = (\underline{J}_{ij}^L)^T$ ,  $i < j$ . 令总惯量张量矩阵  $\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{J}}^R + \underline{\underline{J}}^B + \underline{\underline{J}}^L$  它形式上是一个  $3n \times 3n$  阶对称矩阵. 将 (15) 和 (18) 代入式 (12) 整理后得

$$\underline{\underline{J}} \cdot \underline{\dot{\omega}} = \underline{L} + \underline{I}\underline{Y} + \underline{I}\underline{Y}^c + (\underline{c} + \underline{b}^L) \times \underline{F} + \underline{L}^o \quad (20)$$

其中  $\underline{L}^o$  是与  $\underline{\omega}$  有关的项



式 (24) 和 (26) 联立就是以  $\omega$  和  $q$  为未知函数的  $3n + s$  个一阶方程组可直接编写计算程序进行数值积分。对式 (22) 求一次时间导数得出  $\dot{\Omega}_k = \underline{e}_k \dot{q}_k + \dot{q}_k^T \left[ \frac{\partial \underline{e}_k}{\partial q_k} \right] \dot{q}_k$ ，令  $\underline{W}_k \equiv \dot{q}_k^T \left[ \frac{\partial \underline{e}_k}{\partial q_k} \right] \dot{q}_k$ ，其中  $\left[ \frac{\partial \underline{e}_k}{\partial q_k} \right]$  是  $s_k \times s_k$  阶向量矩阵元素为  $\frac{\partial e_{i^k}}{\partial q_{j^k}}$  ( $i^k, j^k = 1, \dots, s_k$ )，对于整个系统可以写出关系式

$$\dot{\Omega} = (\underline{E}^h \underline{e}) \dot{q} + \underline{W} \tag{27}$$

对式 (25) 求一次导数并将式 (27) 代入得

$$\dot{\omega} = -\underline{e}^h \dot{q} - \underline{H} \underline{W} + \omega_0 \underline{1}_n \tag{28}$$

将式 (26) 和 (28) 代入式 (24) 得出以广义坐标表出的广义 Euler 方程显式

$$\Delta \dot{q} = \underline{B} \tag{29}$$

其中  $\Delta$  为与广义坐标  $q$  有关的  $s \times s$  阶标量矩阵

$$\Delta(q) = (\underline{e}^h)^T \cdot \underline{J} \cdot \underline{e}^h \tag{30}$$

$\underline{B}$  为与  $q$  及  $\dot{q}$  有关的  $s$  阶标量列阵

$$\begin{aligned} \underline{B}(q, \dot{q}) = & (\underline{e}^h)^T [\underline{J} \cdot \underline{H} \underline{W} - \underline{J} \cdot (\dot{\omega}_0 \underline{1}_n) - \underline{L} - (\underline{c} + \underline{b}^L) \\ & \times \underline{F} - \underline{L}^\omega] - \underline{e}(\underline{E}^h)^T \cdot \underline{Y} \end{aligned} \tag{31}$$

其中  $\underline{L}^\omega$  已将式 (26) 代入故不再包含  $\omega$ 。可以直接就式 (29)–(31) 编写计算程序对广义坐标进行数值积分。

### 六、例 子

设  $n = 7$  实体图及按正规标号后的体铰图和脉络图如图 2a—2c 所示。

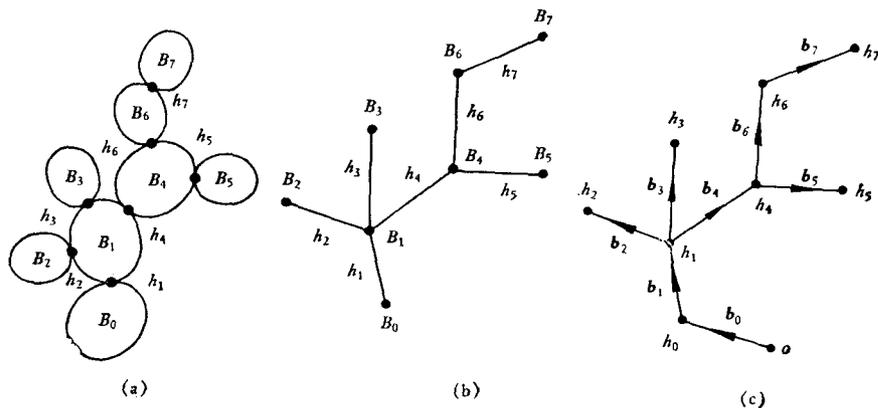


图 2

系统的关联矩阵及其逆矩阵为

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{H} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

构成系统的全部子树共 7 棵如图 3 所示,图中虚线画出的是叶片.

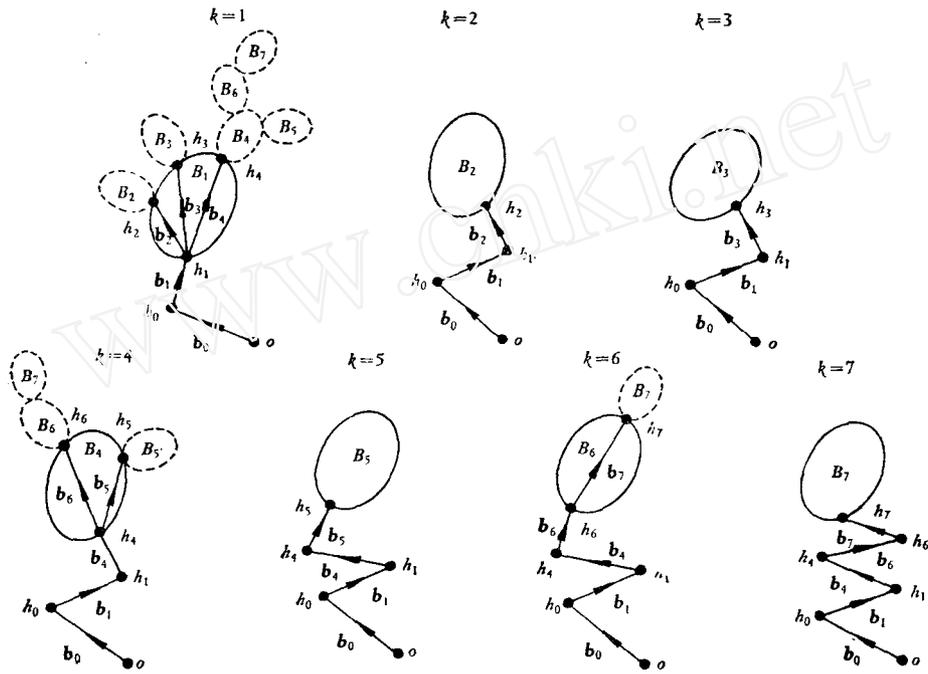


图 3

由  $\underline{I}$  和  $\underline{H}$  算出

$$\underline{b}^E = \underline{I}^E \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 & \underline{b}_2 & \underline{b}_3 & \underline{b}_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{b}_5 & \underline{b}_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{b}_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{b}^L = -\underline{b}^E \underline{H} = \begin{bmatrix} 0 & \underline{b}_2 & \underline{b}_3 & \underline{b}_4 & \underline{b}_4 & \underline{b}_4 & \underline{b}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{b}_5 & \underline{b}_6 & \underline{b}_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{b}_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

增广体的质量、质心向量及根向量为



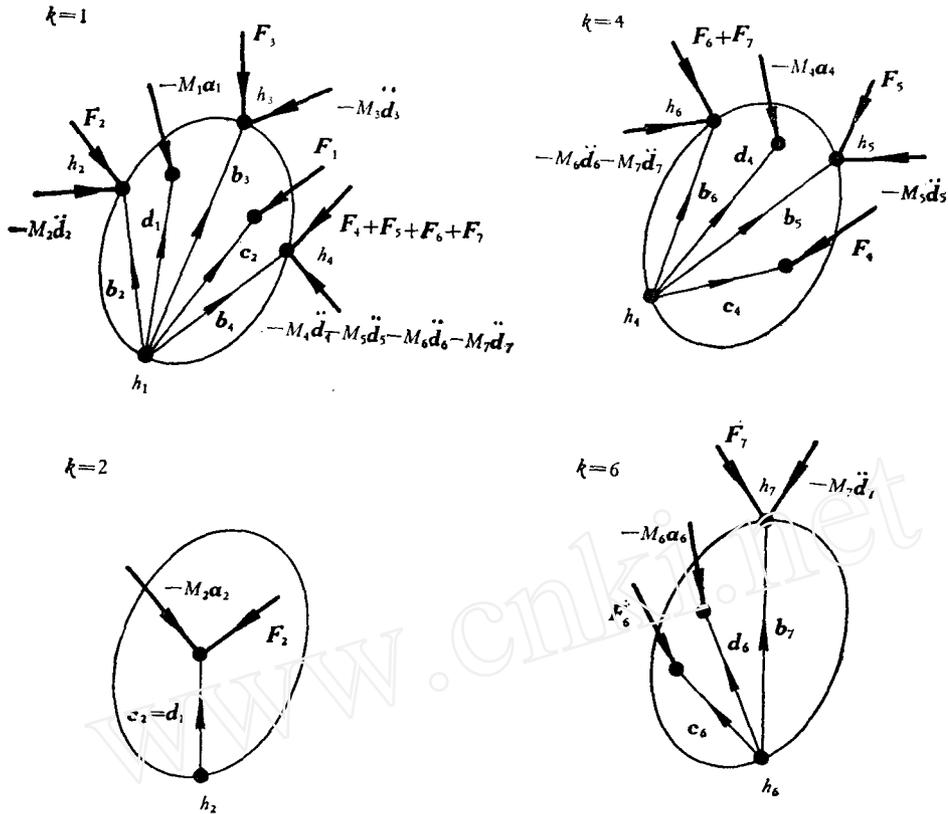


图 4

$$-\underline{e}^h = -\underline{H}^T \underline{E}^h \underline{e} = \begin{bmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 & \underline{e}_4 & \underline{e}_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 & 0 & 0 & \underline{e}_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 & 0 & 0 & 0 & \underline{e}_7 & \underline{e}_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 & 0 & 0 & 0 & \underline{e}_7 & \underline{e}_8 & \underline{e}_9 & \underline{e}_{10} & \underline{e}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 & 0 & 0 & 0 & \underline{e}_7 & \underline{e}_8 & 0 & 0 & 0 & \underline{e}_{12} & \underline{e}_{13} & 0 \\ \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 & 0 & 0 & 0 & \underline{e}_7 & \underline{e}_8 & 0 & 0 & 0 & \underline{e}_{12} & \underline{e}_{13} & \underline{e}_{14} \end{bmatrix}$$

本文承朱照宣老师关心与指教谨致谢意。

参 考 文 献

[1] Harary, F. H. 图论, 上海科技出版社(1980).  
 [2] Wittenburg, J., Dynamics of systems of Rigid Bodies (1977).  
 [3] Roberson, R. E., Wittenburg, J., A Dynamical Formalism of an Arbitrary Number to the Interconnected Rigid Bodies, With Reference to the Problem of Satellite Attitude control, 3rd IFAC Conger (1966), proc. London (1968).  
 [4] Wittenburg, J., Dynamics of Multibody Systems. Proceedings of the XVth International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, (1980). (中文译文见力学进展, 12, 3(1982)).  
 [5] Fischer, O., Theoretical Foundation for the Mechanics of Living Mechanism, Teubner Leipzig (1906).

## GENERALIZED DYNAMICAL EQUATIONS FOR TREE-SHAPED MULTI-RIGID-BODY SYSTEMS

Zhou Qizhao  
(Peking University)

### Abstract

Following Wittenburg<sup>[2]</sup>, and utilizing the viewpoint of graph theory, this paper analyses the structure for a treeshaped system of an arbitrary number of interconnected rigid bodies. It brings up a dynamical model of overlapping subtrees shaped structure and a definition of the so-called artery graph and modifies the idea of augmented body so that the equivalent dynamical decomposition of the system can be carried out.

By specifying certain symbols and rules of calculation, this article sets up generalized dynamical equations for the tree-shaped multi-rigid-body system in a rather compact matrix form.

Thus after introducing the hinge matrix both the constraint relations and the kinematics of the system are written in matrix form. Finally the dynamical equations are expressed in terms of generalized coordinates so that they can be used for computer programming.