结构分析中的条件位移法

王　正
（中国航空研究院）

本文分析了飞行器中广泛应用的薄壁连接结构的力学特征，提出了一种能够反映这种特征的"虚拟空间钉元素"和相应的连接结构理想化方法，介绍了在这样理想化结构的某些节点之间的内部约束条件，简述了在该条件下位移法的两种解法、相应的集合矩阵方程式的特征和适用范围.

飞行器的使用实践表明：危害这种结构安全使用的疲劳裂纹常常出现在复杂的连接区内，由于许多连接区是高次静不定的空间结构，裂纹扩展主要依赖于裂纹附近的应力场，也与附近钉孔的传递载荷有很密切的关系，因此，为了正确计算复杂连接结构的内力或应力分布，在这类结构的整体强度分析中，应当直接充分地考虑连接组合特征和影响.

1. 条件位移法的产生

1）薄壁连接单元的力学特征

（1）预紧力及其作用　对于任何薄壁连接结构，在装配时，都必须对螺钉或铆钉等紧固件沿其轴线方向施加一定的力，以便形成紧固件内残留的预紧拉力，尽管加力的方式因紧固件的种类而异，这些力所产生的变形效应也非常复杂，但是，所有预紧力都具有下述性质和作用：

a. 预紧力总是使被连接件之间相互挤压，因而使被连接件相对紧密地连接在一起.

b. 预紧力总是与被连接件的弹性反力构成一组自平衡力系.

c. 预紧力使被连接件产生的变形范围与被连接件离散化尺寸相比较一般是非常小的.

当结构承受外载荷作用以后，可能产生一个轴向力叠加在预紧力上，只要这个附加轴向力未使预紧力完全消失，即连接未被破坏，那么，上述性质仍然存在. 根据圣维南原理，可以在连接结构的总体强度分析中不考虑这些力的局部效应，只考虑其总效果. 即：在结构承载以后，从被连接件总体来看，不会产生彼此分离或靠近的轴向相对位移.

（2）垂直于钉轴方向上的弹性性质　图 1 表示一个典型连接单元，如果在被连接件的相对两端分别作用一个垂直于钉轴方向的力 P_t，那么，在钉的上下两头就会沿力 P_t 的方向产生一个相对位移 $\Delta u'$. 一般，将 $P_t \sim \Delta u'$ 曲线的切线斜率称为连接单元的切向刚度系数，并以 k_t 表示.

实验研究表明：

a. k_t 一般不是常数，并具有一定的方向性.

b. k_t 的数值与材料、孔径、板厚和连接组合情况等等有非常密切的关系，一般应当用

本文于 1981 年 5 月 13 日收到.

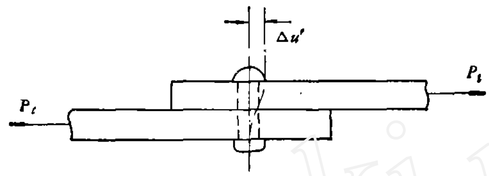

图 1　典型连接单元

模拟实际连接情况的试验方法测定 k_t 的数值.

2) 集中连接组合特征的力学模型

从前面的分析可以看出连接单元是一个具有复杂力学性质的多元素组合体．为了能够在结构整体强度分析中直接反映这些复杂的力学性质，我们将多元素连接单元的力学性质抽象地集中到一种特殊的连接元素上，并将这种元素命名为"虚拟空间钉元素".

"虚拟空间钉元素"是具有确定的空间方向和特殊正交异性的弹性性质，但不计大小的两端点元素.

紧固件的轴线方向必定是虚拟空间钉元素的弹性主方向之一，在该方向上，这种元素具有绝对刚硬的性质，而在垂直于钉轴的平面内表现为正交异性或横观各向同性的弹性性质．这种特殊的弹性性质可以表示为

$$\varepsilon_0 = 0 \tag{1}$$

$$P_t = k_t \Delta u' \tag{2}$$

(1) 式中的 ε_0 表示虚拟空间钉元素在钉轴方向上的应变．(2) 式表示垂直于钉轴的某一弹性主方向上的力与变形关系.

由于 k_t 一般由试验测定，因而可以不考虑这种元素的尺寸和大小，将它的两个端点看成是无限接近的两点，以保证钉元素在每对力 P_t 作用下的平衡．故这种元素具有"虚拟"含意.

每个虚拟空间钉元素都具有各自确定的局部坐标，它必须与钉元素的弹性主方向一致.

3) 连接结构的条件位移法

由于将多元素连接组合单元的力学特征集中到虚拟空间钉元素上了，因而可以按照一般的结构分析方法[1]使连接结构理想化．这时，对于结构的连接部分，可以按其实际构造分层任意离散，即：连接的每层都可以独立地划分为自相适应的各种基本元素，层与层之间仅通过对应节点间的虚拟空间钉元素连接起来．这样理想化的结构将能够直接反映连接组合的力学特征和影响.

在这样的理想化结构中，由于所有的虚拟空间钉元素都存在 (1) 式规定的轴向刚硬条件，因而使理想化结构的某些节点之间具有如下的关系：

$$(u_0)_{i2} - (u_0)_{i1} = 0 \tag{3}$$

式中：$(u_0)_{i2}$ 和 $(u_0)_{i1}$ 分别表示第 i 个钉元素两端的节点位移沿钉轴坐标方向上的分量.

利用坐标转换关系，可以将 (3) 式用对应节点位移的整体坐标分量 u 表示为：

$$F_i(u) = 0 \tag{4}$$

(3) 式或(4)式是理想化连接结构的某些节点之间固有的相互约束条件. 在这种条件下,用位移法作结构分析比较合适,这就形成了适用于空间复杂连接结构的条件位移法.

2. 条件位移法的两种解法

1) *广义变分法*　利用广义变分原理 [2] 和 (4) 式条件,对于线性连接结构, 可以建立如下的集合矩阵方程式

$$[K_1]\left\{\begin{array}{c} u \\ \hdashline \sigma \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} R \\ \hdashline 0 \end{array}\right\} \tag{5}$$

式中: R 是节点外力, σ 是拉格朗日乘子.

由于广义刚度矩阵 $[K_1]$ 的阶数较高和某些主对角线元素为零,因而 (5) 式仅适用于较小型的连接结构.

2) *虚功原理解法*　如果我们选择所有的位移变量都是满足 (3) 式的独立变量,并且将各元素的刚度矩阵和节点外载荷相对于这些独立位移表示出来, 就可以用虚功原理求解了. 按照这种方法建立起来的集合矩阵方程式为:

$$[K_2]\left\{\begin{array}{c} u_j \\ \hdashline u'_i \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} R_j + \sum\limits_{i=j} (AR_0)_i \\ \hdashline R'_i \end{array}\right\} \tag{6}$$

式中, u_j 和 R_j 分别是自由节点的整体坐标位移分量和外力分量, u'_i 和 R'_i 分别是约束节点沿垂直于钉轴的弹性主方向上的位移和外力分量, R_0 是约束节点外力在钉轴方向的分量. (6) 式是相对于整体坐标和钉元素部分局部坐标上的混合平衡方程式, 由于其阶数低,并且刚度矩阵 $[K_2]$ 的主对角线都占"优势", 可用某些贮存和求解大型线代方程组的有效方法,因而 (6) 式适用于大型复杂的空间连接结构.

参　考　文　献

[1] Przemieniecki, J. S., Theory of Matrix Structural Analysis (1968).
[2] Washizu, K., Variational Methods in Elasticity and Plasticity (1975).

CONDITIONAL DISPLACEMENT METHOD IN STRUCTURAL ANALYSIS

Wang Zheng
(*Chinese Aeronautical Establishment*)

Abstract

This paper analyzes the mechanical features of the thin-walled joint structure which is widely applied in flight vehicles. A "fictious space-pin element" being representative of these features and a corresponding idealized method of the joint structure are suggested. The inter-constraint conditions among some nodal points of such idealized structure are presented. Two solutions of the displacement method under the conditions, the features of the corresponding assembling matrix equations and their applied range are briefly described.