

关于匀质弹性半空间上刚体垂直振动的轴对称混合边值问题

时 永 澄

(冶金部包头廿二冶建研所)

提要 本文继 Бородачев, Awojobi 等之后对匀质弹性半空间上刚体垂直振动轴对称混合边值问题进行了新的研究, 抛弃由 Reissner 所建议的用消除驻波确定自由波项系数的方法, 直接由弹性力学方程与有关问题的混合边界条件处理了自由波项, 使著名的瑞利极点化为可去奇点, 从而建立了与过去不同的表征有关边值问题的第二类弗里德荷姆积分方程, 其积分核是非奇异的并在寻常积分定义下有意义. 对所获得的方程进行了详细的解答, 并与大型动力基础实测资料进行了对比, 从而作出了半空间内介质的阻尼损耗不可忽略的结论.

一、导 言

匀质弹性半空间上刚体振动问题的研究始于 Reissner^[1]. 他在刚体底部半空间表面介质反力均匀分布的假定下求解了圆柱形刚体垂直振动问题. 在求解过程中, 通过消除半空间表面位移的驻波项确定自由波项系数, 从而获得了问题确定的解. 在 Шехтер 修正了 Reissner 有关自由波项符号的错误后^[2], 这种由 Lamb 首创的确定自由波项系数的方法为介质波动力学承继下来. 1953 年宋泽永 (Sung, T. Y.) 发表的论文中明确的指出了半空间表面垂直位移的通解由强迫振动的特解与自由边界的通解组合构成, 前者由柯西主值意义下的积分表出, 后者为带有任意常数的自由波项, 追随 Reissner, 作者用消除驻波的方法确定自由波项的系数^[3].

1964 年 Бородачев 首先将刚体底部的反力分布作为未知量, 由刚体底部介质与刚体一同运动的线位移假定所规定的混合边值问题确定反力分布, 求解了有关刚体垂直振动问题^[4]. 1965 年 Awojobi 与 Grootenhuis 继 Бородачев 之后, 求解了同样的混合边值问题^[5]. 描述该混合边值问题的积分方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{Q_z^3}{G} \int_0^\infty \frac{\alpha_1(p)}{\phi(p)} \overline{\sigma(p)} p J_0(pr) dp &= w_0 \quad 0 \leq r \leq R \\ \int_0^\infty \overline{\sigma(p)} p J_0(pr) dp &= 0 \quad r > R \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

无论 Бородачев 还是 Awojobi 等在处理方程 (1) 左边的位移积分表达式时, 均将

本文于 1982 年 4 月 20 日收到.

它分成两部分:一部分为积分的柯西主值;另一部分为被积函数在瑞利极点处的留数的一1/2倍,这一部分就是自由波项,其系数与 Reissner 对自由波项系数的选取是一致的.由于被积函数中包含未知量,这样选取自由波项的系数能否消除驻波项就不清楚了.因此对于混合边值问题,不能用消除驻波项的方法确定自由波项系数.

本文与宋泽永一致,将表面位移表为两部分之和

$$w(r, 0) = \frac{Q_2^2}{G} \cdot \mathcal{D} \int_0^\infty \frac{\alpha_1(p)}{\phi(p)} \overline{\sigma(p)} p J_0(pr) dp + A_0 J_0(p_0 r) \quad (2)$$

式中

$$\mathcal{D} \int_0^\infty \frac{\alpha_1(p)}{\phi(p)} \overline{\sigma(p)} p J_0(pr) dp = \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0} \left(\int_0^{p_0 - \varepsilon_1} + \int_{p_0 + \varepsilon_2}^\infty \right) \frac{\alpha_1(p)}{\phi(p)} \overline{\sigma(p)} p J_0(pr) dp \quad (3)$$

p_0 为瑞利极点, A_0 为任意常数. 该位移表达式计入了波动方程的一切特解, 因而是完备的. 由于 ε_1 与 ε_2 互相独立的趋于零, 此处符号 $\mathcal{D}$ 已不表示柯西主值, 仅表示右端积分组合. 迄今以前所有有关文献中 $\mathcal{D}$ 表示取柯西主值意义下的积分, 即取 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. 我们认为没有任何理由强令 ε_1 与 ε_2 相等, 这是本文与宋泽永及其他作者的第一个不同点, 另一个不同表现在自由波项系数 A_0 的选取方法上, 我们认为标准的弹性力学混合边值条件足以保证获得问题确定解, 对于圆柱形刚体垂直振动问题, 考虑到轴对称性, 采用柱坐标, 由于切向位移 $V = 0$, 有关的混合边界条件可表为

(i) 当 $z \rightarrow \infty$ 时, 径向水平位移 u 和垂直位移 w 有界;

(ii)
$$\begin{cases} \tau_{rz} = 0, & \text{当 } z = 0, \\ \sigma_r = 0, & \text{当 } z = 0, r > R \text{ (刚体半径)}, \\ w = w_0, & \text{当 } z = 0, r \leq R. \end{cases}$$

式中 w_0 为常量; 用不着引入所谓辐射条件, 即消除表面位移中的驻波, 这相当于在半空间表面增加了一个边界条件:

(iii) $z = 0$ 时 w 由扩散波集叠加.

本文放弃了条件 (iii), 由 (i)、(ii) 确立了全新的表征有关力学问题的积分方程, 因而获得了与以往不同的解案, 有关的数值计算结果具有一个与以前不同的显著特点: 理论计算共振振幅普遍超过刚体实测振幅. 这恰恰显示了用无阻尼振动模型描述实际的有阻尼振动对象的特点, 对于这些计算, 迄今以前一切理论计算在很多情况下与此相违背: 理论计算共振振幅经常低于实测振幅, 排斥了进一步考虑介质阻尼的可能性. 本文的结果断定了基础振动的半空间理论必须计入介质阻尼, 才能克服其定量方面所遭遇到的严重困难. 这方面 Veletsos 等对扭转振动已作了初步的尝试.

二、处理自由波项的新建议

根据前面的讨论, 采用完备的表面垂直位移表达式, 在条件 (i) 和 (ii) 下我们得到表征有关混合边值问题的如下积分方程

$$\begin{cases} \frac{Q_2^2}{G} \mathcal{D} \int_0^\infty \frac{\alpha(p)}{\phi(p)} \overline{\sigma(p)} J_0(pr) p dp + A_0 J_0(rp_0) = w_0, r \leq a \\ \int_0^\infty \overline{\sigma(p)} J_0(pr) p dp = 0, r > a \end{cases}$$

式中 w_0 为刚体简谐振动复振幅, a 为刚体半径. 在第一个方程中令 $r = 0$, 得到

$$A_0 = w_0 - \frac{Q_2^2}{G} \mathcal{D} \int_0^\infty \frac{\alpha(p)}{\phi(p)} \overline{\sigma(p)} p dp \quad (4)$$

将此式回代到第一个方程消去 A_0 后, 就得到下列积分方程组

$$\frac{Q_2^2}{G} \mathcal{D} \int_0^\infty \frac{\alpha(p)}{\phi(p)} \overline{\sigma(p)} [J_0(rp) - J_0(rp_0)] p dp + w_0 J_0(rp_0) = w_0, r \leq a \quad (5.1)$$

$$\int_0^\infty \overline{\sigma(p)} J_0(rp) p dp = 0, r > a \quad (5.2)$$

考虑到极限

$$\lim_{p \rightarrow p_0} \frac{J_0(rp) - J_0(rp_0)}{\phi(p)} = -\frac{r J_1(rp_0)}{\phi'(p_0)}$$

为一确定的值. 瑞利方程的根 p_0 已不再成为被积函数的极点, 而是一可去奇点. 因此我们有

$$\lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0, \epsilon_2 \rightarrow 0} \left(\int_{p_0 - \epsilon_1}^0 + \int_0^{p_0 + \epsilon_2} \right) \frac{\alpha(p)}{\phi(p)} \overline{\sigma(p)} [J_0(rp) - J_0(rp_0)] p dp = 0$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{D} \int_0^\infty \frac{\alpha(p)}{\phi(p)} \overline{\sigma(p)} [J_0(rp) - J_0(rp_0)] p dp \\ &= \left(\int_0^\infty - \lim_{\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0} \left(\int_{p_0 - \epsilon_1}^0 + \int_0^{p_0 + \epsilon_2} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\alpha(p)}{\phi(p)} \overline{\sigma(p)} [J_0(rp) - J_0(rp_0)] p dp = \int_0^\infty \frac{\alpha(p)}{\phi(p)} \overline{\sigma(p)} [J_0(rp) - J_0(rp_0)] p dp$$

于是方程 (5.1)、(5.2) 可表为

$$\begin{aligned} & \frac{Q_2^2}{G} \int_0^\infty \frac{\alpha(p)}{\phi(p)} \overline{\sigma(p)} [J_0(pr) - J_0(p_0 r)] p dp \\ &= w_0 [1 - J_0(rp_0)], r \leq a \end{aligned} \quad (5.1')$$

$$\int_0^\infty \overline{\sigma(p)} J_0(rp) p dp = 0, r > a \quad (5.2')$$

它们是非奇异的积分方程组. 不难看出它对应着表面位移的下列表示

$$w(r, 0) = \frac{Q_2^2}{G} \int_0^\infty \frac{\alpha(p)}{\phi(p)} \overline{\sigma(p)} [J_0(pr) - J_0(p_0 r)] p dp + w(0, 0) J_0(rp_0)$$

它是完备的和非奇异的, 它包含一个未知函数 $\overline{\sigma(p)}$ 和常量 $w(0, 0) = w_0$, 前者可由积分方程确定, 后者在 $\overline{\sigma(p)}$ 确定后, 由刚体的振动方程决定.

以上消去 A_0 的方法不是唯一的. 取任意不大于 a 的 r 值代替 $r = 0$ 去消去 A_0 后可得到不同形式的方程, 它们完全等价.

令

$$\rho = \frac{r}{a} \quad (6)$$

$$S_x = a\Omega_2 = a\Omega \sqrt{\frac{\rho_0}{G}} \quad (7)$$

$$\eta = \frac{pa}{S_x} \quad (8)$$

$$\sigma(\eta) = \frac{S_x^2}{Gw_0a} \overline{\sigma(p)} \quad (9)$$

$$\beta^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \quad (10)$$

$$\alpha(\eta) = \sqrt{\eta^2 - \beta^2} \quad (11)$$

$$\phi(\eta) = (2\eta^2 - 1)^2 - 4\eta^2(\eta^2 - 1)^{\frac{1}{2}}(\eta^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

方程 (5.1')、(5.2') 就化为无量纲形式

$$\frac{1}{S_x} \int_0^\infty \frac{\alpha(\eta)\eta}{\phi(\eta)} [J_0(S_x\eta\rho) - J_0(S_x\eta_0\rho)] \sigma(\eta) d\eta = 1 - J_0(S_x\eta_0\rho), \rho \leq 1 \quad (13.1)$$

$$\int_0^\infty \sigma(\eta) J_0(S_x\eta\rho) \eta d\eta = 0, \rho > 1 \quad (13.2)$$

式中 η_0 为方程 $\phi(\eta) = 0$ 的唯一的一对实根 $\pm\eta_0$ 之一。

三、具有非奇异核的第二类弗里德荷姆方程

对偶积分方程 (13.1)、(13.2) 是不便于求解的。现将它们化为第二类弗里德荷姆积分方程。为此通过变换

$$\sigma(\eta) = - \frac{4(1-\beta^2)S_x^2}{\pi} \int_0^1 p(t) \cos(\eta S_x t) dt \quad (14)$$

引入函数 $p(t)$ ，代入方程 (13.2)，由于交换积分号后得出的狄拉克广义函数在 $\rho > 1$ 时使有关的积分式为零，该方程就自然得到满足。将 (14) 式再代入 (13.1) 式，经过简化后得到

$$\begin{aligned} & \frac{2S_x}{\pi} \int_0^1 \left(\int_0^1 [J_0(S_x\eta\rho) - J_0(S_x\eta_0\rho)] \cos(\eta S_x t) d\eta \right) p(t) dt \\ & - \frac{2S_x}{\pi} \int_0^1 \left(\int_0^\infty F(\eta) [J_0(S_x\eta\rho) - J_0(S_x\eta_0\rho)] \cos(\eta S_x t) d\eta \right) \\ & \times p(t) dt = 1 - J_0(S_x\eta_0\rho) \end{aligned} \quad (15)$$

式中

$$F(\eta) = 1 + 2(1-\beta^2)\alpha(\eta)\eta/\phi(\eta)$$

由于 (15) 式对于任意的 $\rho \in [0, 1]$ 成立，引入两个新的独立变量 $x, \tau \in [0, 1]$ ，在 (15) 式中用乘积 $x\tau$ 代替 ρ 后该式仍然成立，然后再令

$$\chi = S_x\eta x, \chi_0 = S_x\eta_0 x,$$

我们就得到

$$\frac{2S_x}{\pi} \int_0^1 \left\{ \int_0^\infty [J_0(\chi\tau) - J_0(\chi_0\tau)] \cos(\eta S_x t) d\eta \right\} p(t) dt$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2S_x}{\pi} \int_0^1 \left\{ \int_0^\infty F(\eta) [J_0(\chi\tau) - J_0(\chi_0\tau)] \cos(\eta S_x t) d\eta \right\} p(t) dt \\
& = 1 - J_0(\chi_0\tau)
\end{aligned} \quad (16)$$

将该方程对 τ 求一次导数就得出

$$\begin{aligned}
& -\frac{2S_x}{\pi} \int_0^1 \left\{ \int_0^\infty [\chi J_1(\chi\tau) - \chi_0 J_1(\chi_0\tau)] \cos(\eta S_x t) d\eta \right\} p(t) dt \\
& + \frac{2S_x}{\pi} \int_0^1 \left\{ \int_0^\infty F(\eta) [\chi J_1(\chi\tau) - \chi_0 J_1(\chi_0\tau)] \cos(\eta S_x t) d\eta \right\} p'(t) dt \\
& = \chi_0 J_1(\chi_0\tau)
\end{aligned} \quad (17)$$

在以上这两个方程两边分别乘以 $\tau(1-\tau^2)^{-\frac{1}{2}}$ 后进行相减, 再对 τ 进行从 0 到 1 的积分后得到下列方程

$$\begin{aligned}
& \frac{2S_x}{\pi} \int_0^1 \left\{ \int_0^\infty [\theta(\chi) - \theta(\chi_0)] \cos(\eta S_x t) d\eta \right\} p(t) dt \\
& - \frac{2S_x}{\pi} \int_0^1 \left\{ \int_0^\infty F(\eta) [\theta(\chi) - \theta(\chi_0)] \cos(\eta S_x t) d\eta \right\} p(t) dt \\
& = 1 - \theta(\chi_0)
\end{aligned} \quad (18)$$

式中

$$\begin{aligned}
\theta(\chi) &= \int_0^1 \tau(1-\tau^2)^{-\frac{1}{2}} [J_0(\chi\tau) + \chi J_1(\chi\tau)] d\tau = \int_0^1 J_0(\chi\tau) (-\sqrt{1-\tau^2})' d\tau \\
& - \int_0^1 \chi\tau J_1(\chi\tau) \frac{\tau d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = 1 - \int_0^1 J_1(\chi\tau) \chi \sqrt{1-\tau^2} d\tau \\
& - \int_0^1 J_1(\chi\tau) \frac{\chi\tau^2}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = 1 - \chi \int_0^1 \frac{J_1(\chi\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau \\
& = 1 - \chi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \chi^{2k+1}}{(2k)!! [2(k+1)]!!} \int_0^1 \frac{\tau^{2k+1}}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau \\
& = 1 - \chi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \chi^{2k+1}}{(2k)!! [2(2k+1)]!!} \cdot \frac{1}{2} B\left(k+1, \frac{1}{2}\right) \\
& = 1 - \chi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \chi^{2k+1}}{(2k)!! [2(2k+1)]!!} \cdot \frac{1}{2} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+1+\frac{1}{2}\right)} \\
& = 1 - \chi \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^k \chi^{2k+1}}{(2k)!! [2(2k+1)]!!} \right. \\
& \quad \cdot \left. \frac{k!}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}} \right\} \\
& = 1 - \chi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \chi^{2k+1}}{[2(k+1)]!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \chi^{2k}}{(2k)!} = \cos \chi
\end{aligned} \quad (19)$$

因此我们有

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \theta(\chi) \cos(\eta S_x t) d\eta &= \int_0^\infty \cos \chi \cos(\eta S_x t) d\eta = \int_0^\infty \cos(\eta S_x x) \\
 \cos(\eta S_x t) d\eta &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \{ \cos[(x+t)\eta S_x] + \cos[(x-t)\eta S_x] \} d\eta \\
 &= \frac{\pi}{2S_x} [\delta(x+t) + \delta(x-t)]
 \end{aligned} \quad (20)$$

方程(18)左边第一项可表为

$$\begin{aligned}
 &\frac{2S_x}{\pi} \int_0^1 \left\{ \int_0^\infty [\theta(\chi) - \theta(\chi_0)] \cos(\eta S_x t) d\eta \right\} p(t) dt \\
 &= \int_0^1 [\delta(x+t) + \delta(x-t)] p(t) dt - \frac{2S_x}{\pi} \int_0^1 \left[\int_0^\infty \cos(\eta S_x t) d\eta \right] \\
 &\quad \times p(t) dt \cdot \cos(S_x \eta_0 x) = p(x) - \left(\int_0^1 \delta(t) p(t) dt \right) \cos(S_x \eta_0 x) \\
 &= p(x) - p(0) \cos(S_x \eta_0 x)
 \end{aligned} \quad (21)$$

方程(18)现在可表为

$$p(x) - \int_0^1 K(x, t) p(t) dt = 1 + [p(0) - 1] \cos(S_x \eta_0 x) \quad (22)$$

式中

$$K(x, t) = \frac{2S_x}{\pi} \int_0^\infty F(\eta) [\cos(S_x \eta x) - \cos(S_x \eta_0 x)] \cos(S_x \eta t) d\eta \quad (23)$$

当 η 充分大时我们求得 $F(\eta)$ 的渐近式

$$F(\eta) = -\frac{1}{4} \frac{9 - 4\beta^2 - 3\beta^4}{1 - \beta^2} \cdot \frac{1}{\eta^2} + o\left(\frac{1}{\eta^2}\right) \quad (24)$$

它表明(23)式右边的核积分在无穷处的收敛性不成问题。容易看出该核积分的被积函数在 $\eta = \eta_0$ 处有确定值, 过去的瑞利极点在此已变成可去奇点, 因此方程(22)是非奇异的。这是我们所获得的方程与 Бородачев 所建立的方程最重要的不同点。

方程(22)中常数 $p(0)$ 尚未确定。实际上该方程允许 $p(0)$ 取任何值, 因为当令 $x = 0$ 时该方程成为恒等式。 $p(0)$ 的这种不确定性反映了自由波项系数仍未确定。

方程(22)是关于 $p(x)$ 的线性方程, 引入变换

$$p(x) = p_0(x) + p_1(x) \quad (25)$$

式中 $p_0(x)$ 满足方程

$$p_0(x) - \int_0^1 K(x, t) p_0(t) dt = 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (26)$$

将变换式(25)代入方程(22), 利用方程(26)消去 $p_0(x)$ 后得 $p_1(x)$ 的下列方程

$$p_1(x) - \int_0^1 K(x, t) p_1(t) dt = [p(0) - 1] \cos(S_x \eta_0 x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (27)$$

在方程(25)中令 $x = 0$ 得到 $p_0(0) = 1$, 于是由(25)式得到

$$p(0) = 1 + p_1(0)$$

将此结果代入方程(26)消去 $p(0)$ 后就得到下列方程

$$p_1(x) - \int_0^1 K(x, t) p_1(t) dt = \cos(S_x \eta_0 x) + [p_1(0) - 1] \cos(S_x \eta_0 x)$$

$$0 \leq x \leq 1 \quad (28)$$

将该方程与方程 (22) 进行对比, 注意到这两个方程的差别, 并考虑到方程 (22) 来自方程 (13.1) 和 (13.2) 以及 $\cos(S_x \eta_0 x)$ 来自 $J_0(S_x \eta_0 \rho)$, 就可以看出方程 (28) 系经变换

$$\sigma_1(\eta) = -\frac{4(1-\beta^2)S_x^2}{\pi} \int_0^1 p_1(t) \cos(\eta S_x t) dt \quad (29)$$

由下列方程得到

$$\frac{1}{S_x} \int_0^1 \frac{\alpha(\eta)\eta}{\phi(\eta)} [J_0(S_x \eta \rho) - J_0(S_x \eta_0 \rho)] \sigma_1(\eta) d\eta = 0, \quad \rho \leq 1 \quad (30)$$

$$\int_0^1 \sigma_1(\eta) J_0(S_x \eta \rho) \eta d\eta = 0, \quad \rho \geq 1 \quad (31)$$

令

$$\overline{\sigma_1(p)} = \frac{G u_0 \omega}{S_x^2} \sigma(\eta)$$

注意到方程 (13.1)、(13.2) 来自方程 (4.1) 和 (4.2), 就可看出方程 (30)、(31) 来自下列方程

$$\frac{\Omega_2^2}{G} \int_0^\infty \frac{\alpha(p)}{\phi(p)} \overline{\sigma_1(p)} [J_0(rp) - J_0(rp_0)] p dp = 0, \quad r \leq a \quad (32)$$

$$\int_0^\infty \overline{\sigma_1(p)} J_0(rp) p dp = 0, \quad r > a \quad (33)$$

这是一个关于 $\overline{\sigma_1(p)}$ 的齐次方程, 相应的非齐次方程 (4.1) 和 (4.2) 作为力学方程有关非零解的存在唯一性, 决定了该齐次方程有唯一的零解. $\overline{\sigma_1(p)} = 0$ 满足方程 (32)、(33) 是显然的. 据此, 由 (14)、(25) 和 (29) 式可以断定 $p_1(x)$ 对应力无影响.

由此可以得出结论, 对于描述半空间表面介质给予刚体的动态反力分布, $p_0(x)$ 与 $p(x)$ 具有相同的效果. 因此方程 (21) 可表为方程 (26) 的形式, 即抛弃 $p_1(x)$, 以 $p_0(x)$ 代替 $p(x)$, 这样我们就得到下列有关混合边值问题的第二类弗里德荷姆积分方程

$$p(x) - \int_0^1 K(x, t) p(t) dt = 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (34)$$

对于这个方程, 我们在泊松比 $\nu = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ 和无量纲频率 $S_x = 0.2, 0.4, \dots, 3$ 情况下进行了数值解. 为了迅速的构成与这个方程相当的线性代数方程组的系数, 首先将核 $K(x, t)$ 的无穷积分表达式化为有限积分然后展为幂级数. 所有的计算都在电子计算机上完成. 一切有关求解的细节和详细的计算结果, 我们将在另一篇文章中予以报道. 这里仅在图 1 中给出我们作过的大量计算中的一个普通算例的结果, 它表明理论计算共振振幅大大超过了对实际的刚性基础测量结果,

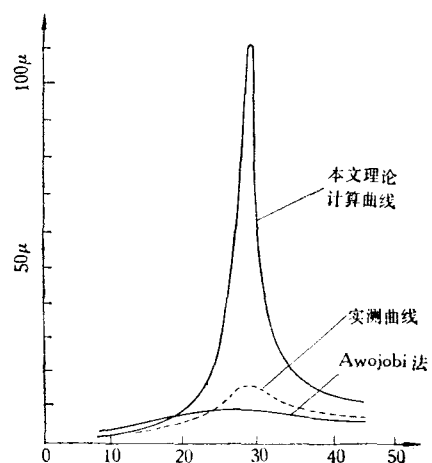


图 1 西安 10 号基础反应曲线
基础底面积 $S = 4.0 \text{ M}^2$, 基础重量 $w_s = 10.92 \text{ T}$, 激励器质量偏心矩 $M_s = 0.03276 \text{ kg} \cdot \text{s}^2$

这一情况是带有普遍性的。由此可以看出为了使理论计算结果与实际相符合，必须考虑半空间内介质的阻尼损耗。

冶金部制氧机攻关组吴迺柏工程师根据我国动力基础大量实测资料与动力基础弹性半空间理论在定量方面的偏差提出审查该理论的建议并提供大量参考资料，其中包括了保定冶金部勘察科学技术研究所周叔举高级工程师所作的大量计算结果和总结性论文，作者充分利用了这些资料，对此特表示感谢。

对谈镐生、王仁、武际可、黄琳等教授分别给予的关心、指导和大力支持表示感谢。

最后对北京大学力学系王敏中所进行的详细讨论致谢，通过这些讨论本文的观点阐述得更加明确和简练。

参 考 文 献

- [1] Reissner, E., Ingenieur-Archiv., 7 (1936), 381—396.
- [2] Шехтер, О. Я. НИИ. Сборник Трудов, "Вибрации оснований и фундаментов", М. (1948).
- [3] Sung, T. Y., Vibration in semi-infinite solids due to periodic surface loading, ASTM Special Technical Publication, Symposium of Dynamic Testing of Solids, Philadelphia, 151 (1953).
- [4] Бородачев, Н. М., Известия АН СССР, Механика и Машиностроение, 2 (1964).
- [5] Awojobi, A. O., Grootenhuys, P. Proc. of the Royal Society, Series, A, 287, 1408 (1956).

ON THE AXIALLY SYMMETRIC MIXED BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF THE VERTICAL FORCED VIBRATION OF A RIGID BODY UPON A SEMI-INFINITE ELASTIC SPACE

Shi Yongchen

(Building Institute of Bao Tou 22nd M.C.C.)

Abstract

In order to describe the axially symmetric mixed boundary-value problem of vertical forced vibration of body upon a semi-infinite elastic space, we present a new second type Fredholm equation, in which the kernel function is different from that obtained by Borodachev, and the wellknown Rayleigh pole is transformed to a false-singularity. The numerical solutions of this equation are obtained for Poissons ratio $\nu=1/4, 1/3, 1/2$ by use of electronic computer. By comparing the results of calculation with the measurement data for some large dynamical foundation experiments in our country, and from the fact that the measurement values of the resonant amplitude are very much smaller than those obtained from our theoretical calculations, we come to the conclusion that the inner frictional damping of soil in semi-infinite space can not be neglected in the study of elastic semi-infinite space in foundation dynamics.