

满应力法与规划法的关系 及拟乘子法的实现

李康元

(上海科技大学)

提要 本文是文献[1]的继续和发展,讨论二个问题: 1) 证明满应力法是规划法的近似算法,为满应力法的使用提供了依据; 2) 讨论拟乘子法在大型结构优化设计中具体实施的步骤. 使拟乘子法在结构优化设计中取得较好的效果. 优化过程是完全自动化的. 文中也提出并使用了满应力因子的概念和处理松约束的方法.

一、拟乘子法的回顾

考虑下面的规划问题:

$$\left. \begin{array}{l} \text{目标函数 } W = F(x) \rightarrow \min \\ \text{约束 } g_j(x) \leq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, E) \\ x \geq 0 \quad (x = x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

文献[1]证明可将这一规划问题的求解转化为下面二个规划问题中的任一问题的求解:

$$\left. \begin{array}{l} L(x) = \sum_{j=1}^E \xi_j g_j(x) + F(x) \rightarrow \min \\ g_j(x) \leq 1, \quad \xi_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, E) \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \quad (1.2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(x) = \sum_{j=1}^E \eta_j g_j(x) \rightarrow \min \\ W = F(x) \\ g_j(x) \leq 1, \quad \eta_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, E) \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \quad (1.3)$$

事实上, 这二个问题都是原目标函数最优点的充分条件. 在函数 $L(x)$ 和 $\varphi(x)$ 中, ξ 和 η 实际上是二组权系数. 但它们类似于拉格朗日乘子, 所以被称为拟乘子.

对于不同的拟乘子, 文献[1]证明存在下面的关系:

本文于1981年10月22日收到.

$$\frac{\partial g_j}{\partial \xi_j} < 0 \quad \left(\text{及} \quad \frac{\partial g_j}{\partial \eta_j} < 0 \right) \quad (j = 1, 2, \dots, E) \quad (1.4)$$

这一关系确定了约束函数值随拟乘子变化的方向, 所以可以用迭代的方法求解. 迭代步骤是:

- 1) 任选一组 $\xi^{(0)}$.
- 2) 求出 $L(x)$ 的极小值点 $x^{(0)}$.
- 3) 求出 $g_j(x^{(0)})$.
- 4) 用下式“调整”拟乘子:

$$\xi_j^{(1)} = \begin{cases} \xi_j^{(0)} (g_j)^{h_j^{(0)}} & g_j > 0.1 \\ 0.1 \xi_j^{(0)} & g_j \leq 0.1 \end{cases} \quad (1.5)$$

式中 h_j ($j = 1, 2, \dots, E$) 称为步长指数.

5) 以 $\xi^{(1)}$ 的值求出函数 $L(x)$ 的极小值点 $x^{(1)}$, 若 $\|x^{(1)} - x^{(0)}\| \leq \varepsilon$ 则迭代收敛, 否则将 $x^{(1)} \Rightarrow x^{(0)}$, $\xi^{(1)} \Rightarrow \xi^{(0)}$, 转第三步.

对于函数 $\varphi(x)$, 迭代步骤相似.

第 4 步中的步长指数是用来控制拟乘子的变化速度, 使点 $x^{(1)}$ 比点 $x^{(0)}$ 更靠近最优点. 这是因为: 若某个约束函数值小于 1, 根据式 (1.5), ξ 的值将减小, 而根据式 (1.4), 该约束函数值将上升而靠近 1. 对松约束, 由于 $g_j(x)$ 小于 1, 所以随迭代次数增加, 对应的 ξ_j 就逐渐趋于零而自动与有效约束分开.

二、满应力法与规划法的关系

众所周知, 满应力法的迭代公式是:

$$A_i^{(k+1)} = A_i^{(k)} \frac{\sigma_i^{(k)}}{[\sigma_i]} \quad (2.1)$$

此处省写 ($i = 1, 2, \dots, s$) (下同). s 表示杆件总数, A 表示杆件截面积, 上标 k 表示迭代次数, σ 和 $[\sigma]$ 分别表示实际应力和许用应力. 显然, 第 $k + 1$ 次迭代与第 0 次迭代的的关系是:

$$A_i^{(k+1)} = A_i^{(0)} \frac{\sigma_i^{(0)}}{[\sigma_i]} \frac{\sigma_i^{(1)}}{[\sigma_i]} \dots \frac{\sigma_i^{(k)}}{[\sigma_i]} \quad (2.2)$$

此式可以从拟乘子法经一些简化而导出.

应用函数 $L(x)$, 以应力为约束的桁架的优化设计问题可转化为下面的拟乘子问题:

$$\left. \begin{aligned} L(A) &= \sum_{p=1}^s \xi_p \frac{\sigma_p}{[\sigma_p]} + \sum_{p=1}^s A_p l_p \rightarrow \min \\ \frac{\sigma_p}{[\sigma_p]} &\leq 1, \quad \xi_p \geq 0 \\ A_p &\geq A_{p0} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

式中 l_p 表示包含比重的杆长. A_{p0} 为最小面积约束值.

函数 $L(A)$ 的极值条件为:

$$\sum_{p=1}^j \frac{\xi_p}{[\sigma_p]} \frac{\partial \sigma_p}{\partial A_i} + l_i = 0 \quad (2.4)$$

由

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial A_i} = -C_p^i \frac{N_p}{A_i^2} + \frac{1}{A_p} \frac{\partial N_p}{\partial A_i}$$

式中 N 表示内力,

$$C_p^i = \begin{cases} 0 & i \neq p \\ 1 & i = p \end{cases}$$

并令

$$f_i(\xi_p, A_p, N_p) = \sum_{p=1}^j \frac{\xi_p}{[\sigma_p]} \frac{1}{A_p} \frac{\partial N_p}{\partial A_i} \quad (2.5)$$

则式(2.4)可简化为:

$$-\frac{\xi_i}{A_i} \frac{\sigma_i}{[\sigma_i]} + f_i(\xi_p, A_p, N_p) + l_i = 0$$

于是得到迭代式:

$$A_i^{(k+1)} = \left[\frac{\xi_i}{[\sigma_i]} \cdot \frac{\sigma_i}{(f_i(\xi_p, A_p, N_p) + l_i)} \right]^{(k)} \quad (2.6a)$$

若令

$$f_i(\xi_p, A_p, N_p) = 0$$

则得:

$$A_i^{(k+1)} = \frac{\xi_i^{(k)} \sigma_i^{(k)}}{l_i [\sigma_i]} \quad (2.6b)$$

对多工况情况,上式变为:

$$A_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^R \frac{\xi_{ji}^{(k)} \sigma_{ji}^{(k)}}{l_i [\sigma_{ji}]} \quad (2.7)$$

式中 R 表示工况数. 对每根杆, 只有应力比最大的那个工况(譬如说 $j = m$) 是有效约束. 所以除 ξ_{mi} 外, 其余的 ξ_{ji} 都为零, 因此式(2.7)也能简化到式(2.6b). 杆件分组时, 基于同样的理由, 也能得到这一结果.

根据式(1.5)有:

$$\xi_i^{(k+1)} = \xi_i^{(k)} \left(\frac{\sigma_i^{(k)}}{[\sigma_i]} \right)^{h_i^{(k)}} \quad (2.8)$$

若令 $h_i = 1$ 及 $\xi_i^{(0)} = A_i^{(0)} l_i$, 则有:

$$A_i^{(1)} = A_i^{(0)} \frac{\sigma_i^{(0)}}{[\sigma_i]}$$

$$A_i^{(k+1)} = A_i^{(0)} \frac{\sigma_i^{(0)}}{[\sigma_i]} \cdot \frac{\sigma_i^{(1)}}{[\sigma_i]} \cdots \frac{\sigma_i^{(k)}}{[\sigma_i]}$$

这就是式(2.2).

由此可知, 在满应力法中, 相当于采用了下面的拟乘子:

$$\xi_i^{(k)} = A_i^{(0)} l_i \frac{\sigma_i^{(0)}}{[\sigma_i]} \cdot \frac{\sigma_i^{(1)}}{[\sigma_i]} \cdots \frac{\sigma_i^{(k-1)}}{[\sigma_i]} \quad (2.9)$$

以后我们将这一拟乘子称为满应力因子。在同一迭代步上,它们是拟乘子的一个近似值。

同理可证,若应用函数 $\varphi(x)$,则可导出相当于齿行法的迭代关系;若步长指数不为 1,则步长指数相当于满应力法中的超松弛因子。

所以满应力法是在拟乘子法的迭代过程中忽略 $f_i(\xi_p, A_p, N_p)$ 这一项而得到的一种近似算法。

$f_i(\xi_p, A_p, N_p)$ 是不是小量,能否忽略? 在静定结构的情况下它为零;在超静定结构的情况下,当截面积按“射线步”方式变化时,它也为零。由于有二个“零点”以及从满应力法在多数情况下有较好的结果这一事实来看,在多数情况下,它可能是一个小量。但是,不能从理论上证明它是一个小量,所以不能保证满应力法总能得到较好的结果。而且,由于在一般情况下 $f_i(\xi_p, A_p, N_p)$ 不为零,所以若一个结构的最优解为超静定结构,则满应力法必带来误差。

三、结构优化设计中拟乘子法的实现

1. 迭代关系式

应用函数 $\varphi(x)$,以位移和应力为约束的桁架优化设计问题的迭代式为(推导从略,可参考文献[1]):

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{A_k}{A_1} \right)^{(k+1)} &= \sqrt{\left[\frac{(L_{\sigma_k} + L_{\delta_k}) \left(\sum_{i \in 1} l_i \right)^{(k)}}{(L_{\sigma_1} + L_{\delta_1}) \left(\sum_{i \in k} l_i \right)} \right]} \\ A_1^{(k+1)} &= W^{(k)} / \sum_{p=1}^s (A_p l_p / A_1)^{(k+1)} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

其中 $\sum_{i \in 1}$ 表示对第 1 类杆件求和,

$$\left. \begin{aligned} L_{\sigma_k} &= \sum_{i \in k} \sum_{j=1}^R \sum_{p=1}^s \frac{\eta_{jp}}{[\sigma_{jp}]} \frac{N_{ji}^r N_{pi}^v l_i}{l_p} \\ L_{\delta_k} &= \sum_{i \in k} \sum_{j=1}^R \sum_{r=1}^Q \eta_{ji} N_{ji}^r N_{ri}^v l_i / E \Delta_{ji} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

式中下标 $k(k=1, 2, \dots, n)$ 表示杆件组号。 n 为设计变量数; N_{ji}^r 表示第 i 工况下第 i 杆的内力; N_{pi}^v 表示第 p 杆二端沿杆向一对虚单位拉力在第 i 杆中引起的虚内力; N_{ri}^v 为第 r 个位移约束上的虚载荷在第 i 杆内引起的虚内力; Q 为位移约束数; E 为材料的弹模量; Δ 表示容许位移。

2. 加快收敛的措施

1) 尽快去掉松约束 将约束分为可能有效约束和可能松约束。前者指各工况下同类型杆件中(对位移约束为同节点)约束函数值最大的那个约束。其余皆为可能松约束。迭代过程中这二类约束往往很少互换。

将松约束分为二类：第一类松约束为迭代收敛时的可能松约束；第二类松约束为存在于可能有效约束中的松约束。后者较难与有效约束区分开。

尽快去掉松约束方法之一——正规法。

对主约束(拟乘子最大的约束,其拟乘子取 1)射线步后,松约束的函数值一般都小于 1。所以只要加大步长指数就可将它们尽快去掉。

将可能松约束的初始步长指数取为 2,以后凡遇到可能松约束,将其步长指数加倍。则第一类松约束很快被去掉。

为了将第二类松约束与有效约束分开,考察下式:

$$V_e^{(k)} = \frac{\alpha_e^{(k)} - \alpha_e^{(k-1)}}{1 - \alpha_e^{(k-1)}} \quad (3.3)$$

式中 α_e 表示可能有效约束的函数值。接近收敛时,上式分子总是趋于零的。对分母,则有效约束的趋于零而松约束的趋于有限值。因此可以用 V_e 的大小区分有效约束和第二类松约束。我们规定,当 $V_e \leq 0.25$ 时,其步长指数增加半倍。其余可能有效约束的步长指数取 1。此外规定,当 $\alpha_e \geq 0.99$ 时,步长指数也取 1。

拟乘子初值的选取为:

$$\eta_{ip} = \frac{A_p^{(0)} l_p}{A_i^{(0)} l_i} \frac{\sigma_{ip}^{(0)}}{\sigma_{ij}^{(0)}} [\sigma_{ij}] \quad (3.4)$$

$$\eta_{ii} = \frac{\delta_{ii}^{(0)}}{\Delta_{ii}} \frac{\sigma_{ii}^{(0)}}{[\sigma_{ii}]} \quad (3.5)$$

尽快去掉松约束方法之二——满应力因子法。

这一方法是干脆将第一次结构分析时的可能松约束定为第一类松约束而令它们的拟乘子为零。以后迭代中若发现其中某一个可能是有效约束,就将该迭代步的满应力因子作为此约束的拟乘子值。这一处理方法可不必求第一类松约束的偏导数,既省机时又省内存。对于有位移约束的结构来说,由于位移约束往往比应力约束严,所以开始可以将所有应力约束作松约束处理。

2) 加速收敛步 利用已有数据近似计算约束函数值,用以改进拟乘子的精度实施迭代过程,达到减少结构分析次数的目的,称为加速收敛步。

利用关系式:

$$\frac{\partial \delta_{ij}}{\partial A_k} = - \sum_{i \in k} \frac{N_{ij}^r N_{ij}^s l_i}{E A_k^2} \quad (3.6)$$

$$\sigma_{ip} = \frac{E \delta_{ip}}{l_p} \quad (3.7)$$

式中 δ_{ip} 表示第 i 工况下第 p 杆两端的相对位移。应用泰勒展开,位移的近似公式为:

$$\delta_{ijn} = \delta_{ijo} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \delta_{ij}}{\partial A_k} \right)_0 \Delta A_k \quad (3.8a)$$

将结构“静定化”有:

$$\delta_{ijn} = \sum_{k=1}^n \sum_{i \in k} \frac{(N_{ij}^r N_{ij}^s l_i)_0}{E A_k} = - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \delta_{ij}}{\partial A_k} \right)_0 \frac{A_{k0}^2}{A_k} \quad (3.8b)$$

取二者的平均值为位移的近似值,于是位移和应力的近似值分别为:

$$\bar{\delta}_{ji} = \frac{1}{2} \left[\delta_{ji0} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \delta_{ji}}{\partial A_k} \right)_0 \left(\frac{A_k^2 - A_k A_{k0} - A_{k0}^2}{A_k} \right) \right] \quad (3.9)$$

$$\bar{\sigma}_{jp} = \frac{1}{2} \left[\sigma_{jp0} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \sigma_{jp}}{\partial A_k} \right)_0 \left(\frac{A_k^2 - A_k A_{k0} - A_{k0}^2}{A_k} \right) \right] \quad (3.10)$$

上述各式中下标“0”表示原来的量。后二式中的偏导数在形成迭代式(3.1)时已求出。

迭代过程的一般格式为:

结构分析 → 数次加速步 → (一维搜索) → 结构分析

一次结构分析后,加速步可做五次左右,若近似值的误差较大

$$\left(\text{取决于 } D_A = \max \left| \frac{\Delta A}{A_0} \right| \right),$$

则不宜实施加速步(如当 $D_A \geq 0.6$ 时)。但当 D_A 不大及某有效约束值在对主约束射线步后大于 1 时,加速步可增加些。具体可这样处理:使用加速步至该约束值降低到 1.05 后再使用五次。

一维搜索是以结构分析点 A_0 和最后一次加速步求得的点 A_1 为有利方向,求约束函数近似值中最大者取极小值的点。一维搜索可使迭代过程的重量下降稳定,且有可能减少结构分析次数。这是因为若 A^* 是最优点而拟乘子为非最优值,则只要经过若干次加速步就可收敛于最优值。但是只有在存在加速步时才能收敛到最优值,否则 A^* 点的约束函数值对有效约束的拟乘子无改进作用,反而不利于收敛。所以只有在 D_A 不大(可取 $D_A \leq 0.4$)或估计重量会上升较多时(用近似式估计)使用。

加速收敛步时,可能有效约束的步长指数可略减小些。

四、例

应用上述方法编制了程序,计算了三个结构四种情况,收敛速度都是很快的。所有算例初始截面积都取 1;后面表中的数据都为每次结构分析后经射线步得到的值,但截面积等于最小面积约束(0.1)的数据未作射线步处理。表中 A 、 B 分别表示用正规法和满应力因子法处理松约束。

例 1. 三杆桁架(图 1)

工况: 1) $p_1 = \sqrt{2}$,

2) $p_2 = \sqrt{2}$ 。

许用应力: $[\sigma_{\text{E}}] = \sqrt{2}$,

$$[\sigma_{\text{E}}] = -1.$$

α 点垂直容许位移:

$$E\Delta = 1/\sqrt{2}.$$

材料容重:

$$\rho = 1.$$

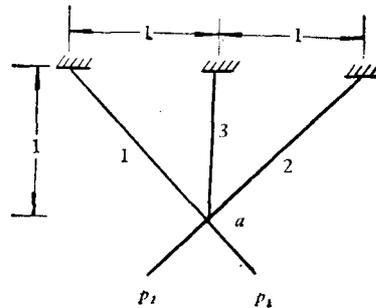


图 1

迭代结果列于表 1. 有效约束为杆 1、2 的拉应力及 a 点的垂直位移。

表 1

	A_1	A_3	W
初始方案	0.8284	0.8284	3.1716
一次迭代	0.6646	0.9578	2.8375
二次迭代	0.6666	0.9432	2.8287
三次迭代	0.6666	0.9428	2.8285
精确解	0.6667	0.9428	2.8284

例 2. 十杆平面桁架(图 2).

工况: 一个, 在 2、4 节点上各作用一个垂直向下的 10^5 磅的外载荷。

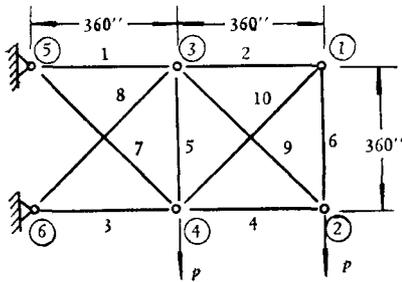


图 2

许用应力: $[\sigma_{\text{拉}}] = 25000$ 磅/(英寸)²,

$[\sigma_{\text{压}}] = -25000$ 磅/(英寸)².

弹性模量: $E = 10^7$ 磅/(英寸)².

材料容重: $\rho = 0.1$ 磅/(英寸)³.

容许变位: 节点 2、4 皆有 ± 2 英寸的位移约

束。

本例分二个情况: 情况 1 只考虑应力约束;

情况 2 考虑应力和位移约束。

表 2 列出情况 2 用正规法计算的迭代过程。

表 3 列出拟乘法法和国内外其他方法结果的比较。

表 2

杆号 \ 迭代次数	初方案	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	19.698	28.945	27.750	29.288	30.314	30.655	30.829	30.145	30.126	30.126
2	19.698	6.393	5.203	3.452	1.508	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100
3	19.698	30.036	30.003	27.838	25.178	23.277	23.388	22.945	22.931	22.931
4	19.698	9.172	10.762	12.702	14.203	14.898	15.445	15.405	15.394	15.394
5	19.698	4.041	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100
6	19.698	6.393	5.203	3.452	1.508	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100
7	19.698	20.382	19.409	14.749	11.030	7.543	7.485	7.425	7.424	7.424
8	19.698	18.860	16.530	18.073	20.087	21.153	21.273	20.765	20.751	20.751
9	19.698	12.970	15.219	17.964	20.087	21.069	21.843	21.786	21.771	21.771
10	19.698	9.041	7.359	4.881	2.133	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100
W (磅)	8266.15	6177.73	5822.97	5599.92	5336.59	5026.35	5100.18	5026.08	5022.94	5022.94
$\sigma_s/[\sigma_s]$	0.07207	0.15446	0.20493	0.32728	0.54175	0.99138	1.	1.	0.99999	1.00000
δ_2/Δ_2	1.	1.	1.	1.	1.	1.	0.98423	0.99935	1.	1.

用满应力因子法计算时, 除位移约束外, 仅处理了杆 5 的应力约束, 它是在第 6 次迭

表 3

方 法	情 况 1				情 况 2			
	ACCESS1 NEW- SUMT ^[4]	加速应力 比法 ^[3]	Berke 等人 ^[3]	A	ACCESS1 双精度	DDDU ^[2]	A	B
重量(磅)	1593.23	1593.18	1593.18	1593.19	5076.85	5069.40	5022.94	5022.94
分析次数	16	10	16	11	13	11	10	10

代时成为可能有效约束的。

情况 1 中，面积非 0.1 的杆都是有效约束。情况 2 的有效约束为节点 2 的位移及杆 5 的应力约束。

例 3. 七十二杆空间桁架(图 3)。

此桁架共有 20 个节点，其中第 17、18、19、20 号节点为固定铰支座。

工况：工况一为 1 号节点上作用三个载荷：

$$p_x = p_y = 5000 \text{ 磅,}$$

$$p_z = -5000 \text{ 磅}$$

工况二为 1、2、3、4 号节点上分别作用 $p_z = -5000$ 磅。

容许变位：1 至 4 号节点 x 、 y 方向各有 ± 0.25 英寸的位移约束。

许用应力、弹性模量和材料容重同例 2。

表 4 列出拟乘子法与国内外其他方法结果的比较；有效约束为第一工况下节点 1 的位移约束和第二工况下 1 至 4 杆的应力约束。

用满应力因子法计算时，除位移约束外，仅处理了上面四个有效应力约束。它们是在第一次迭代时进入可能有效约束的。

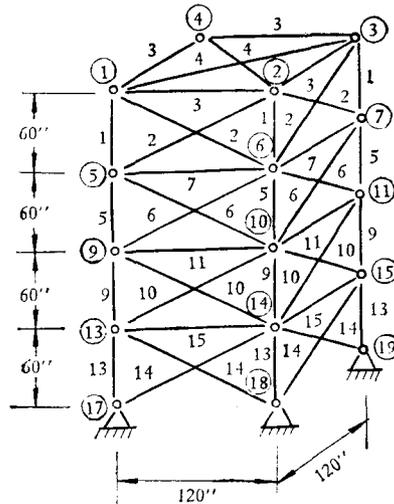


图 3

表 4

方 法	ACCESS1 NEWSUMT	Berke 等人	DDDU	A	B
重量(磅)	379.64	379.67	379.62	379.65	379.68
分析次数	9	6	8	7	7

五、结 束 语

1. 以上讨论的优化技术不受工况数、变量和约束数的限制，且总收敛于一个最优点。由于基本上是一种数学处理方法，所以对其他类型的结构优化问题也有参考价值。

2. 从算例可知，用满应力因子法处理松约束的确可使大多数约束不必处理，从而大大

节省机时,所以这是一种值得进一步研究的方法。

3. 对于不同的结构和约束情况,有效约束的步长指数应该有所不同. 为实现这一点,只需根据同次结构分析的不同加速步上得到的变量值是否有摆动给计算机一个控制信息就行了。

钱令希教授对本工作给予了热情指导在此表示深切的感谢。

参 考 文 献

- [1] 李康元,拟乘法及其在结构优化设计中的应用,1980年全国计算力学会议文集.
- [2] 钱令希、钟万镒、隋允康、张近东,多单元、多约束、多工况的结构优化设计——DDDU 程序系统,1980年全国计算力学会议文集.
- [3] 唐燮燮,一个新的满应力设计方法,1980年全国计算力学会议文集.
- [4] Schmit, L. A. and Miura, H., NASA, CR-2552 (1976).
- [5] Berke, L. and Khot, N. S., AGARD-LS-70 (1974), 1-29.

THE RELATION BETWEEN F. S. M. AND P. M. AND THE APPLICATION OF Q-M. M. IN OPTIMIZATION DESIGN OF LARGE STRUCTURES

Li Kangyuan

(Shanghai Science and Technology University)

Abstract

This paper is the development of the paper [1]. In it two problems are presented: 1) to show that the Full Stress Method (F.S.M.) is an approximate evaluation of the Program Method (P.M.), which provides an evidence for the use of F.S.M. 2) a procedure, which is efficient for optimization design of large structure, is advanced by means of Quasi-Multiplier Method (Q-M.M.). The process of the optimization is full-automatic.