关于理想弹塑性介质中 III 型稳恒扩展裂纹位移场

黄克智　戴　耀

（清　华　大　学）

Chitaley 与 McClintock[1] 给出了理想弹塑性介质中 III 型稳恒扩展裂纹的应力渐近解和小范围屈服情况的数值解．Rice[2] 曾指出文献［1］数值解所给出的位移是错误的．本文将给出变形与位移的渐近解．

引入应力函数 φ

$$\tau_x = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad \tau_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \tag{1}$$

记剪应变 γ_{xz}、γ_{yz} 为 γ_x、γ_y，并分为弹性与塑性部分，各服从虎克定律与 Prandtl-Reuss 关系：

$$\gamma_x = \frac{\partial W}{\partial x} = \gamma_x^e + \gamma_x^p, \qquad \gamma_y = \frac{\partial W}{\partial y} = \gamma_y^e + \gamma_y^p \tag{2}$$

$$\gamma_x^e = \tau_x/G, \qquad \gamma_y^e = \tau_y/G \tag{3}$$

$$d\gamma_x^p = \lambda\tau_x da, \qquad d\gamma_y^p = \lambda\tau_y da \tag{4}$$

式中 W 为位移，da 表示裂纹扩展距离，$\lambda \geqslant 0$．

对于稳恒扩展状态，我们有

$$\frac{\partial}{\partial a} = -\frac{\partial}{\partial x} \tag{5}$$

设平面分区如图 1，由式（4）、（5）可得

$$\gamma_x^p = \int_x^{x_A} \lambda\tau_x dx, \qquad \gamma_y^p = \int_x^{x_A} \lambda\tau_y dx \tag{6}$$

式中 x_A 表示弹塑性边界 Γ_1 上 A 点的坐标值 $x_A(y)$．

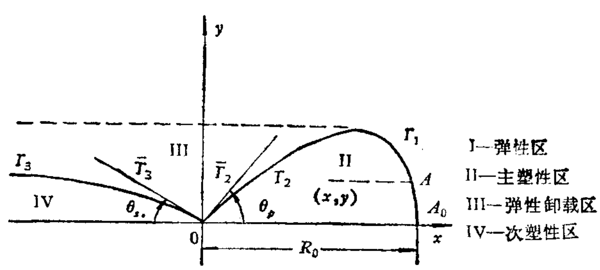

图 1　平面分区

本文于 1981 年 2 月收到．

协调方程与其对 x 的导数各为

$$\frac{1}{G}\Delta\varphi+\frac{\partial}{\partial x}\gamma_y^p-\frac{\partial}{\partial y}\gamma_x^p=0 \tag{7}$$

$$\frac{1}{G}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\varphi-\lambda\Delta\varphi-\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \tag{8}$$

理想塑性材料的屈服条件为

$$\tau_x^2+\tau_y^2=k^2 \tag{9}$$

式中 k 为剪切屈服极限.

以 Γ 表示两相邻区域的交界曲线，取 Γ 的平行曲线族及其法线族为坐标线，并以坐标 s、n 各表示沿 Γ 和沿法线的距离，$\vartheta(s)$ 表示法线与 x 轴的夹角(图 2)，则可证明(见文献[3])，在 Γ 处必须满足的三个连接条件依次为

$$[\varphi]_\Gamma=0,\qquad \left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]_\Gamma=0 \tag{10}$$

$$\frac{1}{G}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2}\right]_\Gamma=-\frac{[\lambda]_\Gamma}{\cos\vartheta}\tau_s+\tan\vartheta\cdot\frac{d\vartheta}{ds}\cdot[\gamma_n^p]_\Gamma-\frac{d}{ds}[\gamma_n^p]_\Gamma \tag{11}$$

式中 $[\ ]_\Gamma$ 表示通过 Γ 时的间断量，即

$$[P]_\Gamma=(P)_{n=+0}-(P)_{n=-0}$$

对于弱间断情况，$[\gamma_n^p]_\Gamma=0$. 可以证明，强间断 ($[\gamma_n^p]_\Gamma\neq 0$) 只可能出现于特征线 ($\tau_s=0$). 利用屈服条件 (9) 和关于 x 轴的反对称条件，可得在主塑性区 II 内之解

$$\varphi=-kr,\quad \tau_x=-k\sin\theta,\quad \tau_y=k\cos\theta \tag{12}$$

同样，利用裂纹表面自由的边界条件，可得次塑性区 IV 内之解

$$\varphi=ky,\quad \tau_x=k,\quad \tau_y=0 \tag{13}$$

式 (12) 与 (13) 不仅适用于裂纹尖端附近，而且各适用于全 II 区和全 IV 区.

为了求弹性卸载区 III 内的渐近解，只保留裂纹尖端附近的主项，可设

$$\varphi=rF(\theta) \tag{14}$$

$$\tau_\theta^2+\tau_r^2=\{F(\theta)\}^2+\{F'(\theta)\}^2\equiv K(\theta) \tag{15}$$

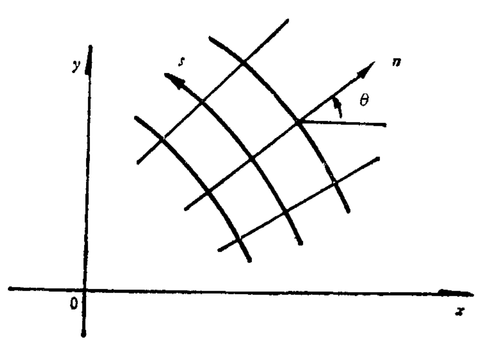

图 2　n、s 曲线坐标

根据在卸载边界 $\bar{\Gamma}_2$ 处的卸载条件 ($K''(\theta_p+0)\leqslant 0$) 与塑性功率恒正的条件:

$$\tau_n\{\gamma_n^p(\theta_p+0)-\gamma_n^p(\theta_p-0)\}\geqslant 0$$

并利用第三连接条件式 (11) 可证卸载边界 $\bar{\Gamma}_2$ 必为弱间断线，因而 $[\Delta\varphi]_{\bar{\Gamma}_2}=0$[1)]. 于是，卸载区 III 内的协调方程式 (7) 可以写成如下的渐近形式

$$\Delta\varphi=-\frac{k}{y}\sin\theta_p \tag{16}$$

文献 [1] 给出了满足 $\bar{\Gamma}_2$、$\bar{\Gamma}_3$ 处连接条件式 (10) 的卸载区 III 中之解:

1) 顺便指出，文献 [1] 所给出的关于 $[\Delta\varphi]_{\bar{\Gamma}_2}=0$ 的证明是不正确的.

$$\varphi = -k\sin\theta_p\cdot\{A\sin\theta + B\cos\theta + f(\theta)\} \tag{17}$$

$$\tau_x = -k\sin\theta_p\cdot(A + \ln\sin\theta),\quad \tau_y = k\sin\theta_p\cdot\left\{B + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right\} \tag{18}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} f(\theta) &= \sin\theta\ln\sin\theta + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\cos\theta \\ \theta_p &\approx 0.344026, \qquad \theta_s \approx 0.006398 \\ A &\approx 2.0868, \qquad B \approx 1.5644 \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

下面我们来计算各区的塑性应变.

由式(8)并利用式(12)，可得 II 区内的 λ：

$$\lambda = \frac{1}{Gr}(-\cos\theta\ln r + \bar{K}(\theta)) \tag{20}$$

将第三连接条件式(11)用于图 1 中的 A_0 点可得

$$\bar{K}(0) = 1 + \ln R_0 \tag{21}$$

将式(20)代入式(6)，并利用式(21)，略去繁长的运算，可得 II 区内塑性应变的渐近表达式(当 $r\to 0$)：

$$\left.\begin{aligned} \gamma_x^p &= \frac{k}{G}\{\sin\theta\ln r + O(1)\} \\ \gamma_y^p &= \frac{k}{G}\left\{\frac{1}{2}\left(\ln\frac{R_0}{r}\right)^2 + \left(\cos\theta - 2\ln\cos\frac{\theta}{2}\right)\ln\frac{R_0}{r} + O(1)\right\} \end{aligned}\right\}(0\leqslant\theta\leqslant\theta_p) \tag{22}$$

由于卸载边界 Γ_2 为弱间断线，故 III 区内($\lambda = 0$)塑性应变渐近表达式应为(当 $r\to 0$)

$$\left.\begin{aligned} \gamma_x^p &= \frac{k}{G}\left\{\sin\theta_p\ln\frac{y}{\sin\theta_p} + O(1)\right\} \\ \gamma_y^p &= \frac{k}{G}\left\{\frac{1}{2}\left(\ln\frac{R_0\sin\theta_p}{y}\right)^2 + \left(\cos\theta_p - 2\ln\cos\frac{\theta_p}{2}\right)\ln\frac{R_0\sin\theta_p}{y} + O(1)\right\} \end{aligned}\right\}$$

$$(\theta_p\leqslant\theta\leqslant\pi - \theta_s) \tag{23}$$

由于 Γ_3 非特征线，故必为弱间断线，由第三连接条件式(11)，其中令 $[\gamma_n^p]_{\Gamma_2} = 0$，可求得 $[\lambda]_{\Gamma_2}$. 然后由式(8)，利用式(13)可得在次塑性区 IV 内的 λ：

$$\lambda = -\frac{\sin\theta_p}{Gx} \qquad \pi - \theta_s\leqslant\theta\leqslant\pi \tag{24}$$

将式(24)代入式(6)，可得 IV 区内塑性应变的渐近表达式($r\to 0$)

$$\left.\begin{aligned} \gamma_x^p &= \frac{k}{G}\sin\theta_p\left\{\ln\frac{-x}{\sin\theta_p\cdot\mathrm{ctg}\theta_s} + O(1)\right\} \\ \gamma_y^p &= \frac{k}{G}\left\{\frac{1}{2}\left(\ln\frac{R_0\sin\theta_p}{y}\right)^2 + \left(\cos\theta_p - 2\ln\cos\frac{\theta_p}{2}\right)\ln\frac{R_0\sin\theta_p}{y} + O(1)\right\} \\ &\qquad (\pi - \theta_s\leqslant\theta\leqslant\pi) \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

将塑性应变与弹性应变求和可得应变表达式，并利用

$$W = \int_0^\theta r\gamma_\theta d\theta$$

可得各区的位移表达式

$$W=\frac{k}{G}r\left\{\frac{1}{2}\sin\theta\cdot\left(\ln\frac{R_0}{r}\right)^2+\sin\theta\left[1-2\ln\cos\frac{\theta}{2}\right]\ln\frac{R_0}{r}+O(1)\right\}$$

$$0\leqslant\theta\leqslant\theta_p \tag{26}$$

$$W=\frac{k}{G}r\left\{\frac{1}{2}\sin\theta\cdot\left(\ln\frac{R_0}{r}\right)^2+\left[\sin(\theta-\theta_p)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sin\theta\cdot\left(1-\ln\frac{\sin\theta}{\sin\theta_p}-2\ln\cos\frac{\theta_p}{2}\right)\right]\ln\frac{R_0}{r}+O(1)\right\}\quad \theta_p\leqslant\theta\leqslant\pi \tag{27}$$

裂纹两岸的位移为

$$W|_{\theta=\pi}=-W|_{\theta=-\pi}=\frac{k}{G}r\left\{\sin\theta_p\ln\frac{R_0}{r}+O(1)\right\} \tag{28}$$

显然，如文献 [2] 所指出，在裂纹尖端（$r\to 0$）处，扩展裂纹的张开位移为零．因此，文献 [1] 中所给的张开位移值 $0.15k_{\rm III}^2/kG$ 是错误的．

参 考 文 献

[1] Chitaley, A. D. and McClintock, F. A., *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **19** (1971), 147—163.

[2] Rice, J. R., Elastic-plastic models for stable crack growth, in "Mechanics and Mechanisms of Crack Growth" (Proc. Conf. at Cambridge, England, April 1973), ed. M. J. May, British Steel Corporation Physical Metallurgy Centre Publication (1975), 14—39.

[3] 高玉臣，张晓堤，黄克智，幂强化材料 III 型稳恒扩展裂纹奇异场，力学学报，5 (1981)，452—464.

THE NEAR-TIP DISPLACEMENT FIELDS FOR MODE-III CRACK IN STEADY GROWTH IN ELASTIC PERFECTLY-PLASTIC MEDIUM

Hwang Kehchih Dai Yao

(*Tsinghua University*)

Abstract

Chitaley and McClintock[1] have given the asymptotic near-tip stress field, expressions for strains in integrals and a numerical solution for small-scale yielding for the mode-III crack growing steadily in elastic perfectly-plastic medium. As pointed out by Rice[2], the numerical results for the crack-opening displacements, equal to $0.15\,k_{\rm III}^2/kG$ at the tip ($k_{\rm III}$—stress intensity factor, k—shear yield stress, G—shearing modulus), are questionable. In this brief note the asymptotic expressions for the plastic strains γ_x^p、γ_y^p and W are given, (22), (26) for the active loading zone ($0\leqslant\theta\leqslant\theta_p$), (23), (27) for the unloading zone ($\theta_p\leqslant\theta\leqslant\pi-\theta_s$) and (25), (27) for the reloading zone ($\pi-\theta_s\leqslant\theta\leqslant\pi$).