

关于两端固定柱抗失稳优化问题的注记

程 耿 东 钟 万 颢

(大连工学院工程力学研究所)

提要 本文研究两端固定、端部受轴压的柱的抗失稳优化问题。对和重模式最优设计邻近的设计运用瑞雷驻值原理,并引入极限模式的概念后我们的分析表明,只要附加一些条件和作一定解释,Olhoff^[1]给出的最优解应满足的必要条件(以下简称为 Olhoff 条件)仍然是正确的。推广本文思想可以建立起序列二次规划及序列线性规划算法用来求解多重模式的最优化问题。

一、引 言

轴向受压柱的抗失稳优化,即在给定柱材料总体积的条件下寻求最优断面积分布,使柱能承受的轴压临界力尽可能地高,或其对偶问题,即在给定临界力条件下寻求最优断面积分布,以使柱的总体积尽可能地小,是一个近年来引起广泛注意的课题。这个课题之所以吸引人,不仅是因为它具有实用价值,还因为虽然对这个问题进行了很长时间的研究,但仍存在一些未解决的问题,特别是两端固定、端部受到集中力的柱的抗失稳优化。

早在 1770 年,拉格朗日就研究过这个问题,遗憾的是他给出的解是错误的。1851 年, Clausen 又研究了两端简支柱的抗失稳优化问题。但是真正近代的研究是 1960 年 Keller 所完成的^[1],他采用变分方法研究了两端简支、给定了材料和长度的弹性柱体断面积分布,目标是最大化柱的临界力。Keller 和 Tadjbakhsh^[2]接着又研究了其它边条件的情况。这些工作,不仅在柱的抗失稳优化方面,也在整个优化领域内,是属于早期的工作,他们的结果在相当长的时间内被公认为是经典的。

1976 年 Olhoff 和 Rasmussen^[3]对两端固定柱的抗失稳优化重新进行了研究,他们发现 Keller 求得的“最优”柱的反对称失稳形式具有比对称失稳形式低得多的临界力,而 Keller^[2]只注意了对称失稳的可能,实际临界力远低于 Keller 求得的。Olhoff 等指出,最优柱(在一定的最小断面积约束范围内)的临界力对应于两个失稳波形,整个优化问题因而要采用重模式提法。根据这个新提法,Olhoff 给出了最优断面积应当满足的必要条件(以下简称为 Olhoff 条件),并给出了一系列数值解。

1980 年以来, Haug 等^[4]研究了结构特征值的可微性,给出了不同于 Olhoff 条件的必要条件,但是,他们的数值计算并未给出新的结果。虽然如此,在重模式优化问题中是否还能采用传统的变分方法却成为一个有待进一步研究的问题^[5]。

本文对该问题进行了分析。分析表明,只要附加一些条件,用传统的变分方法仍给出

1982 年 9 月 1 日收到。

正确的敏度, Olhoff 条件也仍然正确. 而这些附加条件, 在文[3]的数值求解格式中是满足的.

二、最优化问题的重模式提法及 Olhoff 条件

考虑一根两端固定的弹性柱, 柱的材料体积 V 、柱的长度 L 及柱材料的弹性模量 E 均已给定, 该柱在其端部受到一个集中力 P 作用 (见图 1). 柱的断面积 $A(x)$ 沿柱长度方向是允许变化的, 柱横断面积 $A(x)$ 与惯性矩 $I(x)$ 具有关系:

$$I(x) = CA^p(x) \quad (1)$$

其中, 常数 C 、 p 取决于断面形状及允许的变化方式. 具有固定宽度、沿柱长度方向高度可以改变的矩形断面柱, $p = 3$; 沿柱长度方向其断面形状相似变化的柱, $p = 2$; 具有固定高度, 宽度沿柱长可以改变的矩形断面柱, $p = 1$.

我们的最优化问题要求寻找断面积 $A(x)$ 的最优分布使柱的抗失稳临界力尽可能地高.

引入无量纲断面积 $\alpha(x)$ 及无量纲临界力 λ :

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= A(x) \cdot L/V \\ \lambda &= PL^{p+2}/ECV^p \end{aligned} \quad (2)$$

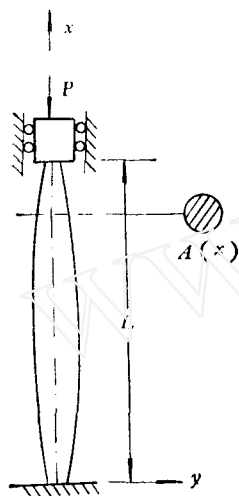


图 1

这儿坐标 x 也已经用柱长 L 无量纲化. 无量纲的失稳模式 $y(x)$ 满足下列微分方程及边条件:

$$\begin{cases} (\alpha^p y'')'' = -\lambda y'' \\ y(0) = y(1) = 0 \\ y'(0) = y'(1) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

柱的失稳临界力 λ 是上列特征值问题的最小特征值, 但也可以根据失稳形式 $y(x)$ 用瑞利商计算:

$$\lambda = \int_0^1 \alpha^p (y'')^2 dx / \int_0^1 (y')^2 dx \quad (4)$$

所讨论的最优化问题数学上便可提成为: 求设计变量 $\alpha(x)$, 使得由方程(4)给出的最小特征值最大但满足约束条件:

$$\int_0^1 \alpha(x) dx = 1 \quad (5)$$

Keller^[2] 的解是基于失稳时的失稳模式是单重的(单模式失稳), 因而可以构造拉格朗日增广泛函:

$$\mathcal{L} = \int_0^1 \alpha^p (y'')^2 dx - \beta p \left\{ \int_0^1 \alpha dx - 1 \right\} - \eta \left\{ \int_0^1 (y')^2 dx - 1 \right\} \quad (6)$$

其中最后一项是反映了失稳模式应该归一化. 根据 $\mathcal{L}$ 对于 α 的变分应该为零可以求出最优化必要条件:

$$\alpha^{p-1} (y'')^2 = \beta \quad (7)$$

将(7)和(3)、(4)、(5)联合便得到确定最优设计 $\alpha(x)$ 及相应失稳模式 y 、临界力 λ 的

控制微分方程组.

实践证明,由(7)式给出的解是可疑的. 对于最优柱,失稳时的失稳模式可能是重模式,即存在两个线性独立的失稳模式 y_1 和 y_2 , 它们对应于同一失稳临界力 λ . 根据这种想法, Olhoff 将问题提法修改为: 求设计变量 $\alpha(x)$, 使得对应于失稳模式 y_1 的临界力

$$\lambda = \int_0^1 \alpha^p (y_1'')^2 dx \rightarrow \max, \quad (8)$$

且模式 y_1 和 y_2 具有相同的临界力

$$\int_0^1 \alpha^p (y_1'')^2 dx = \int_0^1 \alpha^p (y_2'')^2 dx \quad (9)$$

采用变分方法构造拉格朗日增广泛函 $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \int_0^1 \alpha^p (y_1'')^2 dx - \gamma \left\{ \int_0^1 \alpha^p (y_1'')^2 dx - \int_0^1 \alpha^p (y_2'')^2 dx \right\} \\ & - \sum_{i=1}^2 \eta_i \left\{ \int_0^1 (y_i')^2 dx - 1 \right\} - \beta p \left\{ \int_0^1 \alpha dx - 1 \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

$\mathcal{L}$ 对于设计变量 $\alpha(x)$ 的变分为零给出最优化必要条件:

$$\alpha^{p-1} \{ (1-\gamma)(y_1'')^2 + \gamma(y_2'')^2 \} = \beta \quad (11)$$

这个条件在本文中称为 Olhoff 条件. 利用这个条件构造迭代格式, Olhoff 求得柱的最优形式如图 2 所示.

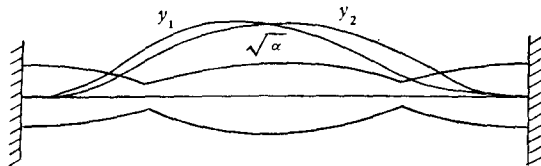


图 2

重模式提法的重要性很快为实践所证明. 不仅是抗失稳优化, 而且在振动优化的研究中也很快发现了一系列问题必须采用重模式提法. 但是, 与此同时, 人们也注意到 Olhoff 条件是不够确切的. 最显然的一个含糊之处是在条件(11)中对 y_1 和 y_2 并无任何限制. 如所周知, 根据特征值问题理论, 当特征函数 y_1 和 y_2 对应于同一特征值 λ 时, y_1 和 y_2 的任意线性组合 $\tau y_1 + \beta y_2$ 也是对应同一特征值 λ 的失稳模式, 因此, 对 y_1 和 $\tau y_1 + \beta y_2$, (11) 式也应满足. 以图二给出的失稳波形为例, 简单的验算可以证明, 不可能对任意的 τ, β , (11) 式均满足.

三、重模式设计的敏度分析与极限波形

设想已求得一个重模式设计 $\alpha(x)$, 其相应临界力为 λ , 失稳模式为 y_1 和 y_2 及它们的任意线性组合. 为了明确起见, 从这些失稳模式中取出满足正交化条件及归一化条件的两个, 记作 y_1^0 及 y_2^0 :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (y_1^0)'^2 dx &= 1 & \int_0^1 (y_2^0)'^2 dx &= 1 \\ \int_0^1 y_1^0 y_2^0 dx &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

则临界力可以写成

$$\lambda = \int_0^1 \alpha^p (y_1^{(0)})^2 dx = \int_0^1 \alpha^p (y_2^{(0)})^2 dx \quad (13)$$

虽然 y_1^0 及 y_2^0 的任意线性组合 $\tau y_1^0 + \beta y_2^0$ 也是失稳模式, 但为了确定起见, 这儿只考虑那些满足归一化条件的:

$$\int_0^1 (\tau y_1^{(0)} + \beta y_2^{(0)})^2 dx = \tau^2 + \beta^2 = 1 \quad (14)$$

该式是对 τ 和 β 加上的限制.

现在设想设计 $\alpha(x)$ 得到一个小扰动 $\delta\alpha$, 产生一个新设计 α_N :

$$\alpha_N = \alpha + \delta\alpha \quad (15)$$

相应于这个设计的临界力 $\lambda(\alpha_N)$, 一般地说, 已经不再是重特征值, 即, 它对应于唯一的失稳模式 y_N (在满足归一化条件下). 几何上可以说, 对设计 α_N 来说, 失稳模式 y_N 在函数空间里表现为一个矢量, 但一旦 $\delta\alpha = 0$, 或者当 α_N 成为 α , 失稳模式就从空间的一个矢量分裂为由矢量 y_1^0 及 y_2^0 张成的平面. 这种改变是不连续的. 但另一方面, 只要 $\delta\alpha$ 充分小, 应当可以在精确到高阶小量的范围内将 y_N 表示成 y_1^0 与 y_2^0 的线性组合:

$$y_N = \tau y_1^0 + \beta y_2^0 + o(\|\delta\alpha\|) \quad (16)$$

τ 和 β 可以由瑞利商的驻值原理来决定, 即

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha_N) &= \lambda(\alpha + \delta\alpha) \\ &\doteq \min_{\substack{\tau, \beta \\ \tau^2 + \beta^2 = 1}} \left\{ \int_0^1 (\alpha + \delta\alpha)^p (\tau y_1^{(0)} + \beta y_2^{(0)})^2 dx \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

展开 (17) 式, 忽略高阶小量并引入记号

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 p\alpha^{p-1} (y_1^{(0)})^2 \delta\alpha dx \\ B &= \int_0^1 p\alpha^{p-1} y_1^{(0)} y_2^{(0)} \delta\alpha dx \\ C &= \int_0^1 p\alpha^{p-1} (y_2^{(0)})^2 \delta\alpha dx \end{aligned} \quad (18)$$

则 (17) 式可以近似为

$$\lambda(\alpha_N) = \min_{\substack{\tau, \beta \\ \tau^2 + \beta^2 = 1}} \{ \lambda(\alpha) + A\tau^2 + 2B\tau\beta + C\beta^2 \} \quad (19)$$

为了求得这个条件极值, 构造拉格朗日函数

$$\mathcal{L} = \lambda(\alpha) + A\tau^2 + 2B\tau\beta + C\beta^2 + \mu(\tau^2 + \beta^2 - 1) \quad (20)$$

式中, μ 为拉格朗日乘子. 由 $\mathcal{L}$ 对 τ 、 β 的驻值条件可知

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tau} = 2A\tau + 2B\beta + 2\mu\tau = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = 2B\tau + 2C\beta + 2\mu\beta = 0 \quad (22)$$

或写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} A + \mu & B \\ B & C + \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau \\ \beta \end{Bmatrix} = 0 \quad (23)$$

这是一个特征值问题, 特征值 μ 可以由行列式为零的条件求得

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{-(C+A)}{2} + \sqrt{\left(\frac{C-A}{2}\right)^2 + B^2} \\ \mu_2 &= \frac{-(C+A)}{2} - \sqrt{\left(\frac{C-A}{2}\right)^2 + B^2}\end{aligned}\quad (24)$$

相应于 μ_1 的特征向量记成 τ_1, β_1 , 相应于 μ_2 的特征值记成 τ_2, β_2 , 它们是满足正交化条件的, 即

$$\tau_1 \tau_2 + \beta_1 \beta_2 = 0 \quad (25)$$

另外, 归一化条件 (14) 要求

$$\tau_1^2 + \beta_1^2 = 1, \quad \tau_2^2 + \beta_2^2 = 1 \quad (26)$$

利用这样求得的 τ_1, β_1 和 τ_2, β_2 , 精确到 $\|\delta\alpha\|$ 的高阶小量, 就可以求得设计 α_N 的相应于失稳模式 $y_N^1 = \tau_1 y_1^0 + \beta_1 y_2^0$ 及 $y_N^2 = \tau_2 y_1^0 + \beta_2 y_2^0$ 的临界力:

$$\lambda(\alpha_N) = \lambda(\alpha) + \{\tau\beta\} \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau \\ \beta \end{Bmatrix} \quad (27)$$

或临界力的增量

$$\delta\lambda = \lambda(\alpha_N) - \lambda(\alpha) = \{\tau\beta\} \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau \\ \beta \end{Bmatrix} \quad (28)$$

注意到 (23) 式,

$$\delta\lambda = -\mu \quad (29)$$

即 $-\mu$ 为从设计 α 改变成设计 α_N 时, 失稳临界力的增量. μ 具有两个根的事实很合理, 因为对于设计 α_N , 最低的两个特征值 λ 已经不同. 当然, 我们只关心其中较小的一个. 敏度 $\delta\lambda$ 依赖于 $\delta\alpha$ 的事实也就是通常在泛函分析中所讲的方向可导 (directional differentiability).

观察系数 A, B 和 C 的计算公式 (18) 及特征方程 (23), 可见对不同的 ε (ε 为很小的、任意给定的常数), 不同的设计 $\alpha + \varepsilon\delta\alpha$ 导致相同的特征向量 τ, β , 而特征值 μ 却和 ε 成正比地变化, 进而, 相同的 τ, β 导致相同的失稳模式 y_N^1 和 y_N^2 . 这个事实几何上可解释为, 在函数空间里沿着通往重模式设计 α 的射线上的各个设计点都具有相同的一对失稳模式 (精确到高阶小量), 而临界力随 ε 而线性变化. 我们定义这样的一对失稳模式为从 α 出发沿 $\delta\alpha$ 方向的极限模式. 引入极限模式的概念后可以看出, 相应于重模式设计 α 的失稳模式虽然有无限多个, 但是可以从中选出一对又一对的极限模式. 易于证明, 极限模式中的每一对均满足归一化条件且彼此之间正交.

如何选取成对的极限模式? 看来似乎很困难, 实质不然. 在数值优化时, 经验^[4]表明, 很难真正求得重模式设计 α 这一点, 实际求得的总是 $\alpha + \delta\alpha$ 这样的设计, 它具有确定的、不同的失稳模式, 对应于两个稍稍不同的失稳临界力, 这两个失稳模式就是一对极限失稳模式 (精确到高阶小量).

四、用极限模式表达的临界力敏度及最优化必要条件

在三中, 由 (29)、(24) 和 (18) 式给出的临界力敏度是以任意一对满足正交、归一一条

件的失稳模式 y_1^0 和 y_2^0 为基来描写的. 现在设想根据从 α 出发的 $\delta\alpha$ 方向, 已经确定了一对极限波形 y_1 和 y_2 ,

$$y_1 = \tau_1 y_1^0 + \beta_1 y_2^0 \quad y_2 = \tau_2 y_1^0 + \beta_2 y_2^0 \quad (30)$$

则以 y_1 和 y_2 为基时系数 A^* 、 B^* 和 C^* 可计算为:

$$\begin{aligned} A^* &= p \int_0^1 \alpha^{p-1} (y_1'')^2 \delta\alpha dx \\ &= p \int_0^1 \alpha^{p-1} (\tau_1 y_1^{0''} + \beta_1 y_2^{0''})^2 \delta\alpha dx = A\tau_1^2 + 2B\tau_1\beta_1 + C\beta_1^2 \\ &= -\mu_1 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} B^* &= p \int_0^1 \alpha^{p-1} y_1'' y_2'' \delta\alpha dx \\ &= p \int_0^1 \alpha^{p-1} (\tau_1 y_1^{0''} + \beta_1 y_2^{0''}) (\tau_2 y_1^{0''} + \beta_2 y_2^{0''}) \delta\alpha dx \\ &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

$$C^* = -\mu_2 \quad (33)$$

由式 (32) 可见, 对设计增量 $\delta\alpha$ 及与它相应的极限模式 y_1 、 y_2 , 下式恒成立:

$$p \int_0^1 \alpha^{p-1} y_1'' y_2'' \delta\alpha dx = 0 \quad (34)$$

这个条件在文献中 [4] 曾经认为是很难满足的, 但我们在前面已指出, 数值计算中得到的 y_1 、 y_2 和 $\delta\alpha$ 总是相应的, 而由 (31)、(33) 及 (29) 式可见, 临界力的敏度仍可如经典变分法给出的那样表示为:

$$\begin{aligned} \delta\lambda_1 &= -\mu_1 = \int_0^1 p\alpha^{p-1} (y_1'')^2 \delta\alpha dx \\ \delta\lambda_2 &= -\mu_2 = \int_0^1 p\alpha^{p-1} (y_2'')^2 \delta\alpha dx \end{aligned} \quad (35)$$

只是要强调一下, y_1 和 y_2 是与 $\delta\alpha$ 相应的极限模式. 当然, 值得注意的是对于一对给定的极限模式 y_1 及 y_2 , 和它们相应的设计增量 $\delta\alpha$ 并不局限于如三中所定义的从 α 出发的一根射线, 实质上它们构成一个很大的集合. 事实上, 作为定义在区间 $[0, 1]$ 上的函数 $\delta\alpha(x)$, 只要满足一个等式 (34), 它们都具有相同的极限模式.

得到敏度表达式 (35) 后, 重复 Olhoff 采用的变分方法和采用重模式提法, 就可以求出最优化必要条件为对任意的设计增量 $\delta\alpha$, 有

$$\int_0^1 \{ \alpha^{p-1} \{ (1-r)(y_1'')^2 + r(y_2'')^2 \} - \beta \} \delta\alpha dx = 0 \quad (36)$$

但是, 由 (36) 不能马上推出 (11), 其原因是在 (36) 中, 被积函数中与 $\delta\alpha$ 的乘数项是依赖于 $\delta\alpha$ 的, 而经典的变分方法中约定这样的项应与 $\delta\alpha$ 无关. 但是, 在目前的具体问题中, 可以论证, 积分形式的必要条件 (36) 的确可以归结为逐点形式的 Olhoff 条件 (11).

首先, 我们指出存在着一对极限模式, 其中一个是对称模式 y_s , 另一个是反对称模式 y_a . 事实上, 由于边界条件是对称的, 最优重模式设计 α , 如果存在, 必然是对称的. 给 α 一个对称的设计增量 $\delta\alpha$, 得到一个对称的新设计 $\alpha_N = \alpha + \delta\alpha$, 适当选择 $\delta\alpha$ 可以使 α_N 的失稳模式是单模式的. 由力学知识可知, 作为对称设计 α_N , 它的两个最小特征值 λ 所

相应的特征模式中一个为对称,另一个为反对称. 这样,对于这对特殊的极限模式,条件(36)可写为:

$$\int_0^1 \{ \alpha^{p-1} [(1-\gamma)(y_a'')^2 + \gamma(y_s'')^2] - \beta \} \delta \alpha dx = 0. \quad (37)$$

下面考虑特殊的设计增量 $\delta \alpha$:

$$\delta \alpha = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \xi - \eta \\ M & \xi - \eta \leq x \leq \xi + \eta \\ 0 & \xi + \eta < x < 1 - \xi - \eta \\ M & 1 - \xi - \eta \leq x \leq 1 - \xi + \eta \\ 0 & 1 - \xi + \eta < x \leq 1 \end{cases} \quad (38)$$

式中, M 为常数, η 为任意小的指定常数,任意常数 $\xi \in [0, 1]$. 易于验证,对这样的 $\delta \alpha$, 极限模式 y_a 和 y_s 满足

$$\int_0^1 \alpha^{p-1} y_a'' y_s'' \delta \alpha dx = 0 \quad (39)$$

因而 y_a 和 y_s 是和该 $\delta \alpha$ 相应的极限模式, (37) 式成立. 将 (38) 代入 (37), 忽略高阶小量后得到

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \{ \alpha^{p-1} [(1-\gamma)(y_a'')^2 + \gamma(y_s'')^2] - \beta \} \delta \alpha dx \\ &= 4M\eta \{ \alpha^{p-1}(\xi) \{ (1-\gamma)(y_a''(\xi))^2 + \gamma(y_s''(\xi))^2 \} - \beta \} = 0 \end{aligned}$$

该式对任意的 ξ 和不为零的 M 和 η 均成立, 所以有逐点的必要条件:

$$\alpha^{p-1} \{ (1-\gamma)(y_a'')^2 + \gamma(y_s'')^2 \} = \beta \quad (40)^*$$

现在的问题是对任意两个相应于重模式设计 α 的失稳模式 y_1 和 y_2 (各自满足归一化条件), 是否可以从积分形式的必要条件 (36) 导出逐点形式的必要条件 (11)? 换言之, Olhoff 条件是否对任意的两个失稳模式 y_1 和 y_2 都成立? 取 y_1 和 y_2 为基 (约定它们是不同的), 则 y_a 和 y_s 可以表成:

$$\begin{aligned} y_a &= \tau_1 y_1 + \beta_1 y_2 \\ y_s &= \tau_2 y_1 + \beta_2 y_2 \end{aligned} \quad (41)$$

将 y_a 和 y_s 代入 (40), 求得

$$\begin{aligned} & \alpha^{p-1} \{ [(1-\gamma)\tau_1^2 + \gamma\tau_2^2](y_1'')^2 + 2y_1'' y_2'' [\tau_1\beta_1(1-\gamma) + \tau_2\beta_2\gamma] \\ &+ [(1-\gamma)\beta_1^2 + \gamma\beta_2^2](y_2'')^2 \} = \beta \end{aligned} \quad (42)$$

和 (11) 式相比较可见, 一般地说, 对任意的一对失稳模式 y_1 和 y_2 , 逐点形式的必要条件 (11) 中应当增加交叉项, 即形为:

$$\alpha^{p-1} \{ (1-\gamma')(y_1'')^2 + \gamma'(y_2'')^2 + \eta y_1'' y_2'' \} = \beta' \quad (43)$$

其中 γ' , β' 和 η 为常数. 该式也可以从条件 (36) 及 (34) 用变分法中常用的演算方法导出. 为了节省篇幅, 这儿从略. 注意, 如果 $\gamma = 0.5$ (γ 是出现在逐点形式的必要条件 (40) 中表示对称与反对称失稳模式参与组合的系数), 而且 y_1 和 y_2 正交, 则 (43) 中的交叉项消失, 条件 (43) 恢复为 Olhoff 条件. 换言之, 当 $\gamma = 0.5$ 时, 对任意一对正交、归一

* 将 (40) 式双方乘以 α , 并对 x 积分, 可知 $\beta = \lambda$.

的失稳模式, Olhoff 条件均成立. 当 $\gamma \approx 0.5$ 时, 除了对称与反对称这两个失稳模式可以满足逐点形式的 Olhoff 条件外, 从 (42) 式可以看出, 也可以找到无穷多对失稳模式 y_1 和 y_2 满足逐点形式的必要条件, 只要它们的组合系数 τ_1 、 β_1 、 τ_2 和 β_2 , 见 (41), 满足

$$\tau_1\beta_1(1-\gamma) + \tau_2\beta_2\gamma = 0 \quad (44)$$

文献[3]中, 在寻求重模式最优设计时采用的数值方法就是使用迭代格式搜索这样一对失稳模式, 而不出现交叉项. 换言之, 条件(44)是自动满足的. 不过, 这样的 y_1 与 y_2 并不一定互相正交.

五、结 束 语

本文说明了在重模式最优设计条件下, 经典变分方法给出的临界力敏度公式 (35) 仍然可以使用, 但要注意该式中的失稳模式 y_1 和 y_2 是和设计增量 $\delta\alpha$ 相应的极限模式; 虽然对任意的一对失稳模式, 应在 Olhoff 条件中补充进交叉项, 但存在着某些对失稳模式, 使没有交叉项的原 Olhoff 条件成立. 在文献[3]中的数值方法中, 求得的就是这样的一对失稳模式. 推广本文思想到多重模式最优设计是直接了当的. 根据本文思想, 作者们已经提出用来求解多重模式最优设计的十分一般的序列线性规划及序列二次规划算法, 算法的程序实现及数例将是下一步的工作.

感谢: 钱令希先生仔细地阅读了本文, 并提出了宝贵意见, 我们在此表示感谢.

参 考 文 献

- [1] Keller, J. B., *Arch. Rational Mech. Anal.*, 5(1960), pp. 275—285.
- [2] Tadjbakhsh, I. and Keller, J. B., *J. Appl. Mech.*, 9(1962), pp. 159—164.
- [3] Olhoff, N. and Rasmussen, S. H., *Int. J. Solids Structures*, 13(1977), pp. 605—614.
- [4] Choi, K. K. and Haug, E. J., *Optimization of Distributed Parameter Structures*, Sijthoff & Noordhoff (1981), pp. 219—277.
- [5] Armand, J.-L., Lurie, K. A. and Cherkasov, A. V., *Optimum Structural Design*, John Wiley and Sons, New York and Chichester (1982).

NOTE ON THE OPTIMAL DESIGN TO THE STABILITY OF CLAMPED COLUMN UNDER AXIAL COMPRESSION

Cheng Kengtong Zhong Wanxie

(Research Institute of Engineering Mechanics Dalian Institute of Technology)

Abstract

The optimal design of clamped column under axial compression is a classical problem. Instead of the single buckling mode criterion, as Olhoff and Rasmussen (1976) pointed out that therein two buckling modes associated with the criterion of the degenerate case must be considered. Olhoff has also deduced the necessary condition for this criterion [(11) in text] and solved the clamped optimum column problem.

But one can find that the Olhoff necessary condition is somewhat vague. According to the theory of eigenvalue problems, if eigenvectors y_1 and y_2 correspond to the same eigenvalue λ , then any linear combination of them $\tau y_1 + \beta y_2$ is also an eigenvector. But if $y_{1a}=y_1$ and $y_{2a}=\tau y_1 + \beta y_2$ are substituted into (11), it is found that the equality will be violated in some cases.

In this paper, the sensitivity analysis to the optimal degenerate design is carried out first. Based on the extremum Rayleigh quotient principle, the trial functions can be selected in the degenerate eigenfunction subspace when the cross-section distribution [(15) in text] is very close to the optimal design $\alpha(x)$, the perturbed eigenpairs can be expressed as [(27) in text] and [(30) in text].

The perturbed eigen-functions are independent on the small parameter ε , and are termed as limiting modes to the perturbation $\delta\alpha$. It can be verified that [(34), (35) in text] and the optimum criterion becomes [(36) in text].

The braced term can not be taken out of the integral directly, for y_1 and y_2 depend also on $\delta\alpha$. Only when condition (34) is satisfied, the braced term in (36) keeps unvaried with $\delta\alpha$. So the Olhoff condition must be revised as [(43) in text].

Only when y_1 and y_2 are specially selected, such that [(44) in text] can then (43) reduces to Olhoff condition. In Olhoff's paper the iterating algorithm just ensures the eq. (44) be satisfied.