

光学的反演变换测量

王 润 文

(上海光机所)

提要 利用倒易空间方法处理了光栅的级联衍射与云纹测量,证明了云纹图案就是倒易空间的映象,从而处理了形变与应变的测量。

一、引 言

空间的变换方法用来作光学测量通常会带来很大方便,并且有清楚的物理图象。本文利用光学的空间反演变换使得力学量从所分布的空间转换到测量的空间,后者容易进行光学测量,将已测量的数量再利用反变换从而获得力学的空间分布。倒易空间是固体物理和晶体X射线测量常用的分析方法,引用这一概念很容易用图解法作出平面平行光栅的级联衍射,特别是处理两刻线不平行光栅的级联衍射更显有效。这是对 G. L. Rogers 工作^[1]的推广。另外,证明了云纹(Moiré)是倒易空间的周期结构的图象,便可较直观地处理云纹的测量结果。

二、级联衍射的矢量分析

利用解析方法来计算多个平面光栅的级联衍射是很复杂的^[2],从而使其应用受到一定限制。矢量图解法是解决这一问题的捷径。设一等距平面光栅,其间距用矢量 α 来表示,这矢量在光栅面上且与光栅刻线垂直, α 的绝对值即为光栅间距。今设另一倒易矢量 α^* ,它与 α 同向,但满足如下关系

$$|\alpha^*| = 1/|\alpha| \quad (1)$$

若有波长为 λ 的光波沿 t_0 方向投射,并朝 t 方向衍射, t_0 与 t 皆为单位矢,则光栅方程式为

$$\alpha \cdot (t - t_0) = n\lambda \quad (2)$$

用 α^* 乘上式两边,并令 $T = \frac{1}{\lambda}t$, $T_0 = \frac{1}{\lambda}t_0$, 便得

$$\frac{\alpha^*}{a^*} \cdot (T - T_0) = na^* \quad (3)$$

上式中记 $a^* = |\alpha^*|$, 故 α^*/a^* 代表沿 α^* 方向单位矢。(3)式表明了衍射方向矢 T 与入射方向矢之差在倒易基矢上投影值为 na^* , n 为整数。 T 与 T_0 之绝对值皆等于波长倒数 $\frac{1}{\lambda}$ 。

本文于 1981 年 5 月 13 日收到。

图 1(a)(b)是利用(3)式对单片光栅的衍射图解,(a)图是当投射垂直入射的情况,(b)图是斜入射的情况,圆的半径为 $\frac{1}{\lambda}$, MN 为光栅面, a^* 、 $2a^*$... 为倒易光栅的间距, T_n 、 T_{-n} 代表正序与负序衍射谱方向。在多块光栅级联衍射的情况,前一块光栅的衍射谱方

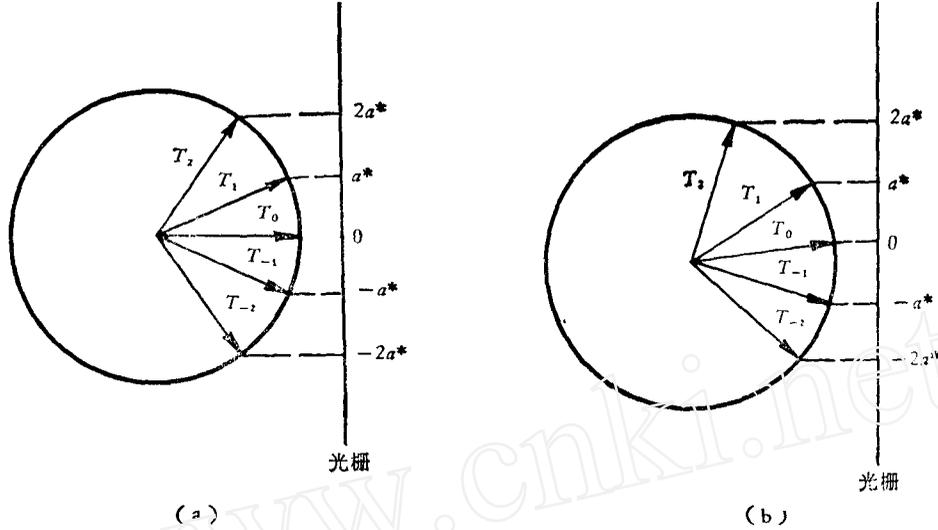


图 1

向矢可作为下一光栅的入射方向矢,于是多级衍射图解就可获得。图 2(a) T_{11} 代表 (1.1) 级衍射,即第一块光栅一级谱在第二块光栅衍射后的一级谱。因此不难作出 (p, q) 谱序的衍射方向。图 2(b) 代表 (p, q, s) 谱序的矢量图。这里考虑的是刻线平行的平面平行

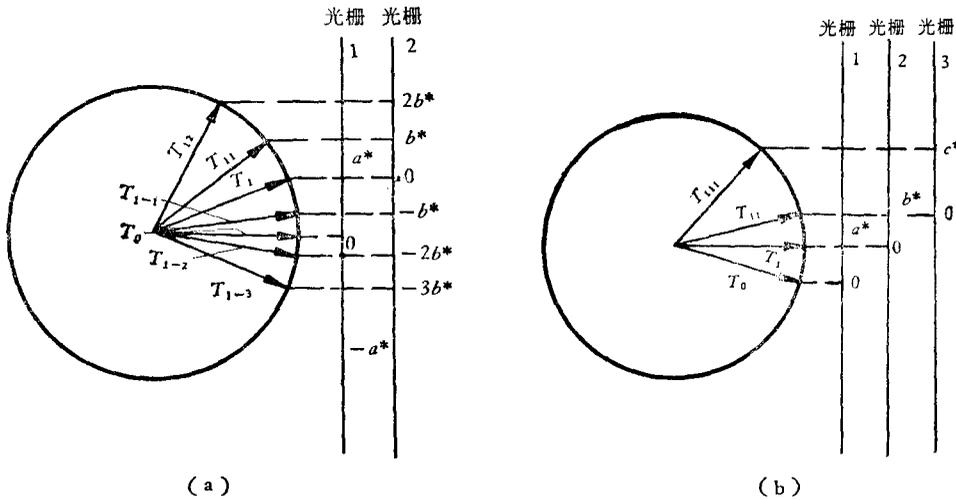


图 2

光栅的级联衍射,当 a^* 不平行于 b^* 时, T 圆要用 T 球来代替。图 3 为刻线交角为 θ 的两相贴的平面光栅级联衍射图解。(a) 图是投影几何的作图法,(b) 图是立体几何的图解。 T_0 为入射光方向, T_1 为在 A 光栅的一级衍射方向, T_{11} 为级联衍射后的最后 (1.1)

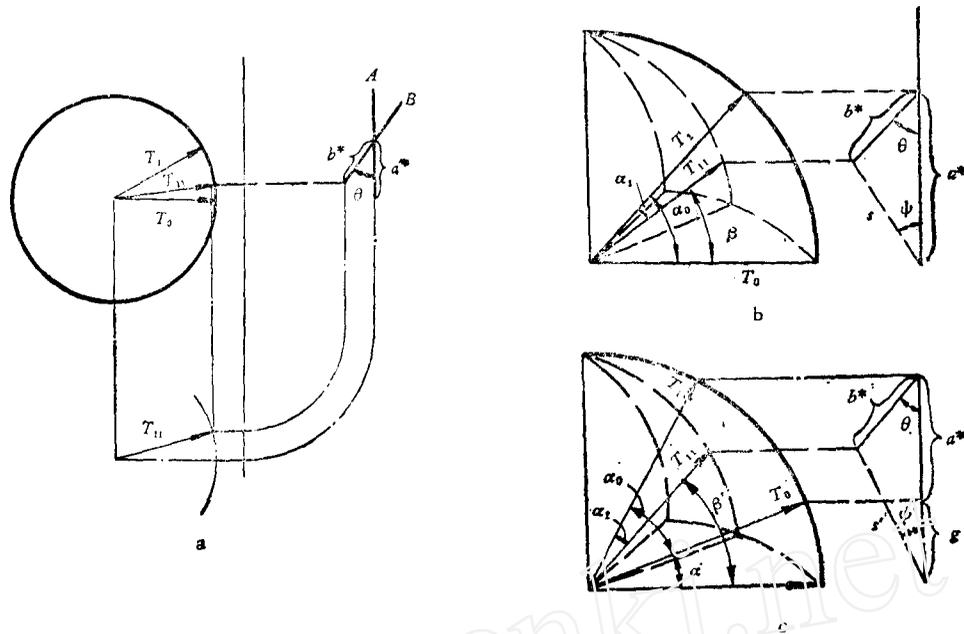


图 3

级衍射方向。投影几何作图容易确定级衍射的空间方向。从图 3(b) 的参量关系, 运用球面三角学也不难求得 T_{11} 的方向:

$$\alpha_0 = \arcsin(\lambda a^*) \quad (4)$$

$$\beta = \arcsin(\lambda s) \quad (5)$$

$$\cos \alpha_1 = \cos \alpha_0 \cos \beta + \sin \alpha_0 \sin \beta \cos \phi \quad (6)$$

其中

$$s = (a^{*2} + b^{*2} + 2a^*b^* \cos \theta)^{1/2} \quad (7)$$

$$\cos \phi = \frac{a^* - b^* \cos \theta}{s} \quad (8)$$

因为 a^* , b^* , θ , λ 皆为已知, 由式 (4) (5) (6) 即可求得 α_0 , β 及 α_1 , 于是 T_1 与 T_{11} 方向完全确定。对于投射光 T_0 方向不与第一块光栅面垂直的情况, 而假定与第二块光栅表面的法线夹 $\bar{\alpha}$ 角, 则仍可由已知的 $\bar{\alpha}$, a^* , b^* , θ , λ 的参数求得 T_1 与 T_{11} 的诸方向角:

$$\alpha_0 = \arcsin(\lambda a^* + \sin \bar{\alpha}) \quad (9)$$

$$\beta' = \arcsin(\lambda s') \quad (10)$$

$$\cos \alpha_1 = \cos(\alpha_0 + \bar{\alpha}) \cos \beta' + \sin(\alpha_0 + \bar{\alpha}) \sin \beta' \cos \phi' \quad (11)$$

其中

$$g = \frac{1}{\lambda} \sin \bar{\alpha} \quad (12)$$

$$s' = [(a^* + g)^2 + b^{*2} + 2(a^* + g)b^* \cos \theta]^{1/2} \quad (13)$$

$$\cos \phi' = \frac{a^* + g - b^* \cos \theta}{s'} \quad (14)$$

当 $\bar{\alpha} = g = 0$ 即为垂直入射的情况, (9)–(14) 式便退化为垂直入射情况下的 (4)–(8) 式。

三、云纹图的分析

云纹图就是上节所讨论的级联衍射光相干涉的结果。例如，对于平行的两光栅间距相等的平面光栅， T_{11} 、 T_{02} 和 T_{20} 的取向相同就会引起干涉。最早认为同向谱序干涉形成云纹图案的是 Guild, J.^[2]，他首先导得了云纹图案强度分布的很复杂的公式。通常我们可以忽略强度的微小变化，而只要观察其峰值强度周期分布，这实质可以通过求解两交叉光栅最可几的交线的几何关系导得^[3]，但通过衍射图的分析也可证明周期物体与其衍射结构互为倒易关系。

如图 4 所示，有一小孔板沿 x 方向间距为 a ，即基矢为 \mathbf{a} ，沿 y 方向基矢为 \mathbf{b} ，一束平行光 I_0 沿 z 轴入射，按衍射规律，在透镜 L 的后焦面上产生水平和垂直两方向的周期衍射斑点结构。设沿 x 方向周期为 \bar{a} ，则

$$a \sin \theta = \lambda, \quad f \sin \theta = \bar{a} \quad (15)$$

式中 θ 为衍射角。将上两式消去 $\sin \theta$ 便得

$$a \cdot \bar{a} = f\lambda \quad (16)$$

式中 f 为透镜焦距。若以 $(f\lambda)^{1/2}$ 作为基本长度单位，或用 $a/\sqrt{f\lambda}$ 代 a ， $\bar{a}/\sqrt{f\lambda}$ 代 \bar{a} ，便得 $a \cdot \bar{a} = 1$ ，因为 a 与 \bar{a} 取向相同，因此得 $\bar{a} \equiv a^*$ 即

$$a \cdot a^* \equiv 1 \quad (17)$$

这就证明了衍射斑点的基矢是衍射板结构基矢的倒易基矢。由于衍射斑点是衍射板的富氏变换，因此也可以说富氏谱基矢与物结构基矢成互逆关系。这与晶体结构的衍射图象是其倒易结构的映象一样^[4]，云纹图就是倒易光栅的映象。 y 方向的衍射结构也可如上述的处理，即 $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^* \equiv 1$ 。显然斜方向的衍射结构周期 d^* 为

$$d^* = a^* + b^* \quad (18)$$

(18) 式是衍射基矢的叠加关系式，即使衍射板的基矢 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 互不垂直，产生的衍射斑也

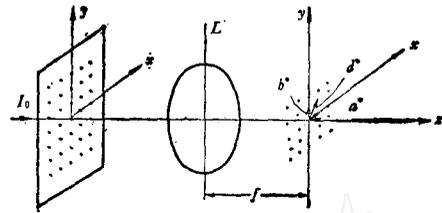


图 4

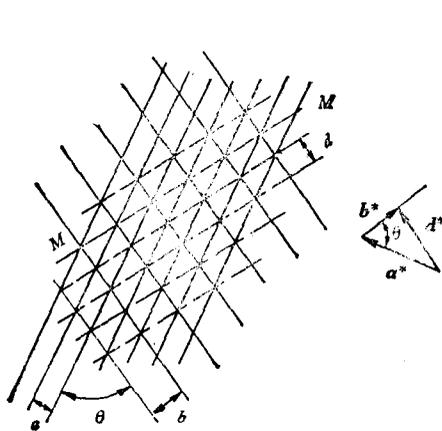


图 5

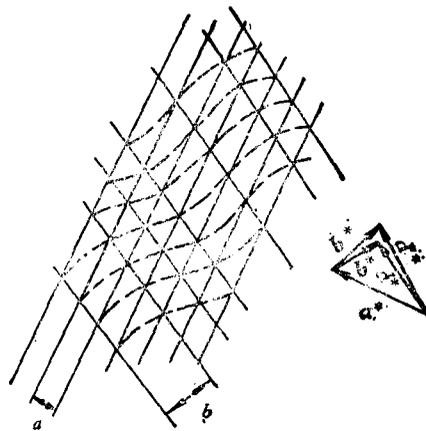


图 6

必然满足(18)式的关系。 \mathbf{d}^* 代表了一个新的衍射板结构基矢的倒易矢量,即衍生的云纹图案的周期。图5中两组实线为两交叉光栅, \mathbf{a}^* 及 \mathbf{b}^* 为各自的倒易矢。由矢量三角形可求出 \mathbf{d}^* ,于是便得到云纹图周期 $d = 1/d^*$ 。

根据云纹图案的变化可以反推出叠合光栅间距的变化。若一块间距均匀的标准光栅与一块要检验的光栅叠合一起,如图6所示,如果云纹图不是直线,则从弯曲云纹图的倒易矢量 $\mathbf{d}^{*'}$ 与理想矢量 \mathbf{d}^* 比较就能确定被检光栅间距与刻线倾斜的误差了。图6中 \mathbf{a}^* 为标准光栅倒易矢, \mathbf{b}^* 为没有误差时被检光栅的倒易矢,可见弯曲云纹倒易矢 $\mathbf{d}^{*'}$ 是可逐点由作图求得。又因 \mathbf{a}^* 已知,由(18)式的矢量三角形便可反推于 $\mathbf{b}^{*'}$,它与标准的 \mathbf{b}^* 就不再重合了。 $\mathbf{b}^{*'}$ 与 \mathbf{b}^* 的取向不同代表刻线的倾斜误差,大小不同代表周期误差。

如果把被检光栅贴在工件上,工件受力的形变与应变亦将反映在云纹上,由倒易矢量三角形的运算,可获得力学参量改变的知识。如标准光栅与贴在被测件上光栅的周期相同,即 $a = b = p$,则其倒易矢量 $p^* = \frac{1}{p} = \nu$,与光栅空间频率一致。当被测件受力后,间距 p 变为 $p'(x)$,则该点形变及应变量为:

$$u(x) = p'(x) - p = \frac{p^* - p^{*'}(x)}{p^{*2}} = \frac{\nu - \nu'(x)}{\nu^2} \quad (19)$$

$$\epsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{p'(x) - p}{p} = \frac{p^* - p^{*'}(x)}{p^*} = \frac{\nu - \nu'(x)}{\nu} \quad (20)$$

因此用矢量方法求出 $p^{*'}(x)$,或测量云纹图的频率,便可求得受载件每点的形变及应变。

参 考 文 献

- [1] Rogers, G. L., *Proc. Phys. Soc. (London)*, **73**, 142 (1959).
- [2] Guild, J., *The Interference Systems of Crossed Diffraction Gratings*, London, Oxford University Press, (1956).
- [3] Oster, G., Wasserman, M. and Zwerling, C., *J. O. S. A.*, **54**, 169 (1964).
- [4] 基泰尔, C., 固体物理导论, 杨顺华等译, 科学出版社, (1979).

OPTICAL MEASUREMENT USING INVERSE TRANSFORMATION

Wang Runwen

(Shanghai Institute of Optical and Fine Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

Cascade diffraction and Morie' pattern are treated using the method of reciprocal space. It is shown that Morie' pattern is the image of reciprocal space and a measurement method is developed for deformation and strain.