

# 粘弹性流体的过渡流动

蔡 扶 时

(北京 大学)

**提要** 本文研究了两同轴圆筒之间的牛顿流体和 Oldroyd 流体,从圆筒开始旋转到剪切应力达到它的平衡值时,剪切应力的建立过程.讨论了“表观”和“真实”应力过量现象.结果表明 Oldroyd 流体呈现出“真实”应力过量现象,并且理论预示结果与实验资料符合很好.因此建议利用应力过量现象来确定粘弹性流体的弹性参量.

## 前 言

对处于静止状态的粘弹性流体突然施加一个定常剪切作用之后,粘弹体内各应力要经过一段时间之后才达到平衡状态,即各应力有一个建立过程,而且各应力在这过程中其量值还会在平衡值上、下振荡,出现“过量”现象.粘弹体的这种过渡流动是它的物质特性的表现,从理论上弄清产生过渡流动的原因,及粘弹体的各物质参量对过渡流动的影响,可以为确定物质的本构方程提供依据.

在某些情况下,牛顿流体也会出现过量现象.下面我们将看到,它们的这种过量现象与仪器设备参数有关,因此称为“表观”过量,而称粘弹体内的过量为“真实”过量.这样区分是十分必要的,它能更清楚地反映物质自身的特性.

近年来,一些作者研究过粘弹性流体的过渡流动<sup>[2]</sup>,本文选取了与他们不同的本构方程,得到第二法向应力差  $\nu_2$  不为零.由于我们目前还没有测量法向应力差的仪器,不能用仪器直接测量确定粘弹性流体的弹性参量,因而本文主要分析剪切应力的过渡流动,以便与实验结果进行比较,探寻利用应力过量现象确定粘弹性流体物质参量的方法.实验是在 Rotavisco RV3 (Federal Republic of Germany HAAKE) 和 Fann-50 (U. S. A. Fann Comp.) 上做出的.

## 理 论 分 析

考虑两圆筒间的剪切流动.如图 1 所示,假定内筒固连在恢复系数为  $\kappa$  的扭丝上,外筒以角速度  $\Omega$  突然转动.内筒半径为  $r_1$ ,外筒半径为  $r_2$ ,并假定  $\frac{r_2 - r_1}{r_1} \ll 1$ .

当  $t \geq 0$  时,边界条件为

$$\left. \begin{aligned} r = r_2: v(r) = v_{(z)} = 0, \quad v_{(\theta)} = r_2 \Omega \\ r = r_1: v(r) = v_{(z)} = 0, \quad v_{(\theta)} = r_1 \dot{\Psi} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中  $\Psi$  表示内筒的转角,字母上方的“ $\cdot$ ”表示对时间  $t$  的导数(下同).

本文于 1981 年 12 月收到.

可以得到两筒之间流体的速度分布为

$$\left. \begin{aligned} v_{(r)} = v_{(\theta)} = 0, \\ v_{(\theta)} = 0, \quad (t < 0) \\ v_{(\theta)} = \frac{r_1 \dot{\Psi}(r - r_2)}{r_1 - r_2} \\ + \frac{r_2 \Omega (r - r_1)}{r_2 - r_1} \quad (t \geq 0) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

### 1. 牛顿流体

此时剪切应力为

$$\sigma = \frac{\eta(r_2 \Omega - r_1 \dot{\Psi})}{r_2 - r_1} \quad (3)$$

式中  $\eta$  为粘度.

由动量矩定律可列出内筒运动方程为

$$I \ddot{\Psi} = -\kappa \Psi + 2\pi r_1^2 H \sigma \quad (4)$$

式中  $I$  为内筒的转动惯量,  $H$  为筒高.

初始条件为

$$t = 0: \Psi = \dot{\Psi} = 0 \quad (5)$$

将式(3)代入式(4), 并令

$$E = \frac{2\pi r_1^2 H \eta}{r_2 - r_1} \quad (6)$$

可得

$$I \ddot{\Psi} + E r_1 \dot{\Psi} + \kappa \Psi = E r_2 \Omega \quad (7)$$

方程(7)的解为

$$\Psi = \exp(-mt) [A \exp(nt) + B \exp(-nt)] + \frac{E r_2 \Omega}{\kappa} \quad (8)$$

式中  $A$ 、 $B$  为任意常数, 而

$$m = E r_1 / 2I, \quad n^2 = (E^2 r_1^2 - 4I\kappa) / 4I^2 \quad (9)$$

由于内筒转角  $\Psi$  的大小可以看成剪切应力  $\sigma$  大小的量度标志, 故可从对  $\Psi$  的分析中看出剪切应力  $\sigma$  的状况.

(a) 当  $E^2 r_1^2 > 4I\kappa$  时, 由式(8)和式(5)可得  $\Psi$  的解为

$$\Psi = \frac{E \Omega r_2}{\kappa} \left\{ 1 + \frac{1}{2n} \exp(-mt) [(m - n) \exp(-nt) - (m + n) \exp(nt)] \right\} \quad (10)$$

由式(10)可以看出, 随时间  $t$  由零增大,  $\Psi$  将由零逐渐增加到平衡值  $E r_2 \Omega / \kappa$ .

(b) 当  $E^2 r_1^2 < 4I\kappa$  时, 有

$$n = \pm i \sqrt{E^2 r_1^2 - 4I\kappa} / 2I \quad (11)$$

从而  $\Psi$  的解为

$$\Psi = \exp(-mt) [A \cos nt + B \sin nt] + \frac{E r_2 \Omega}{\kappa} \quad (12)$$

再利用初始条件(5)可得到

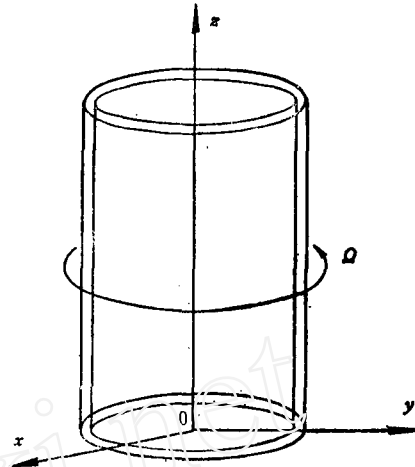


图 1 两圆筒间的剪切流动

$$\Psi = \frac{Er_2Q}{\kappa} \left[ 1 - \exp(-mt) \left( \cos nt + \frac{m}{n} \sin nt \right) \right] \quad (13)$$

从式(13)可知,  $\phi$  在达到平衡值之前会出现振荡过量现象, 并且第一个最大值发生在  $t = \frac{\pi}{n}$  处, 此时

$$\Psi_{\max} = \frac{Er_2Q}{\kappa} [1 + \exp(-m\pi/n)] \quad (14)$$

图2中画出了上面分析的(a)、(b)两种情形, 可以清楚地看到, (a)情形没有过量现象, (b)情形出现过量现象.  $4l\kappa$  大于  $E^2r_1^2$  是出现过量现象的条件, 所以牛顿流体的过量现象是与仪器参数有关的.

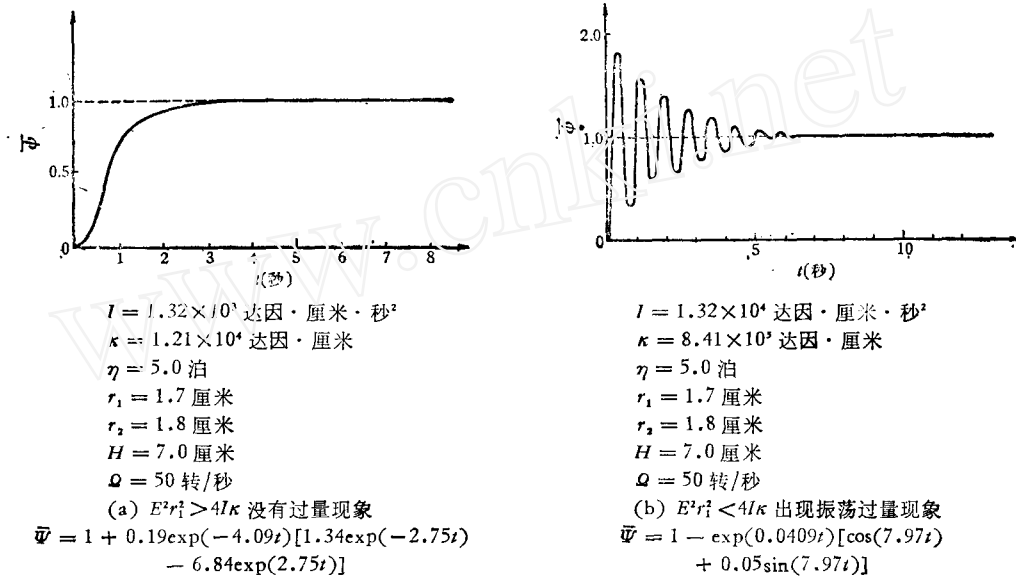


图2 牛顿流体应力建立过程的两种理论曲线

## 2. 粘弹性流体

为了更好地描述粘弹性流体的物质特性, 选用四参量 Oldroyd 流体, 其本构方程为

$$T^{ij} + \lambda_1 \frac{\delta T^{ij}}{\delta t} + \mu_0 (A_i^j T^{sj} + A_j^i T^{is}) = \eta_0 \left( A^{ij} + \lambda_2 \frac{\delta A^{ij}}{\delta t} \right) \quad (15)$$

式中  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ 、 $\eta_0$ 、 $\mu_0$  为物质参量,  $T^{ij}$  为偏应力张量的逆变分量,  $A^{ij}$  为应变率张量的逆变分量,  $\frac{\delta}{\delta t}$  为 Oldroyd 随动导数, 并且有

$$\begin{aligned} \frac{\delta T^{ij}}{\delta t} &= \frac{\partial T^{ij}}{\partial t} + v^s \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^s} - \frac{\partial v^i}{\partial x^s} T^{sj} - \frac{\partial v^j}{\partial x^s} T^{is} \\ \frac{\delta A^{ij}}{\delta t} &= \frac{\partial A^{ij}}{\partial t} + v^s \frac{\partial A^{ij}}{\partial x^s} - \frac{\partial v^i}{\partial x^s} A^{sj} - \frac{\partial v^j}{\partial x^s} A^{is} \end{aligned}$$

此时速度分布为

$$v^r = v^z = 0, \quad v^\theta = W(r, t) \quad (16)$$

将式(16)代入式(15)并化成物理分量形式, 得到

$$\left. \begin{aligned}
 T_{(rr)} + \lambda_1 \frac{\partial T_{(rr)}}{\partial t} + 2\mu_0 r \frac{\partial W}{\partial r} T_{(r\theta)} &= 0 \\
 T_{(\theta\theta)} + \lambda_1 \frac{\partial T_{(\theta\theta)}}{\partial t} - 2\lambda_1 r \frac{\partial W}{\partial r} T_{(r\theta)} + 2\mu_0 r \frac{\partial W}{\partial r} T_{(r\theta)} \\
 &= -2\eta_0 \lambda_2 r^2 \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 \\
 T_{(zz)} + \lambda_1 \frac{\partial T_{(zz)}}{\partial t} &= 0 \\
 T_{(r\theta)} + \lambda_1 \frac{\partial T_{(r\theta)}}{\partial t} - \lambda_1 r \frac{\partial W}{\partial r} T_{(rr)} + \mu_0 \left( r \frac{\partial W}{\partial r} T_{(\theta\theta)} + r \frac{\partial W}{\partial r} T_{(rr)} \right) \\
 &= \eta_0 r \frac{\partial W}{\partial r}
 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

由于  $t < 0$  时流体静止, 故有

$$\lim_{t \rightarrow +0} T = 0 \quad (18)$$

应用式(18), 可解得(17)的解为

$$T_{(zz)} = 0 \quad (19)$$

由于两圆筒之间缝隙很小, 故可假定剪切速率  $r \frac{\partial W}{\partial r} = k$  为常量. 我们还认为应力建立过程中, 应力分量  $T_{(rr)}$ ,  $T_{(\theta\theta)}$  和  $T_{(r\theta)}$  是由定常部分和过渡部分组成的, 即令

$$\left. \begin{aligned}
 T_{(rr)} &= \sigma_{1s} + \sigma_{1t} \\
 T_{(\theta\theta)} &= \sigma_{2s} + \sigma_{2t} \\
 T_{(r\theta)} &= \tau_s + \tau_t
 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式中下标含有  $s$  的量为定常部分, 下标中含有  $t$  的量为过渡部分.

将式(20)代入方程组(17)中, 并分开定常部分和过渡部分, 得到

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{1s} + 2\mu_0 k \tau_s &= 0 \\
 \sigma_{2s} - 2\lambda_1 k \tau_s + 2\mu_0 k \tau_s &= -2\eta_0 \lambda_2 k^2 \\
 \tau_s - \lambda_1 k \sigma_{1s} + \mu_0 k (\sigma_{2s} + \sigma_{1s}) &= \eta_0 k
 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

和

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{1t} + \lambda_1 \dot{\sigma}_{1t} + 2\mu_0 k \tau_t &= 0 \\
 \sigma_{2t} + \lambda_1 \dot{\sigma}_{2t} - 2\lambda_1 k \tau_t + 2\mu_0 k \tau_t &= 0 \\
 \tau_t + \lambda_1 \dot{\tau}_t - \lambda_1 k \sigma_{1t} + \mu_0 k (\sigma_{1t} + \sigma_{2t}) &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

容易求得方程组(21)的解为

$$\sigma_{1s} = \frac{2\eta_0 \mu_0 k^2 (1 + 2\mu_0 \lambda_2 k^2)}{1 + 4\mu_0 (\lambda_1 - \mu_0) k^2} \quad (23a)$$

$$\sigma_{2s} = \frac{2\eta_0 k^2 [(\lambda_1 - \mu_0)(1 - 2\mu_0 \lambda_2 k^2) - \lambda_2]}{1 + 4\mu_0 (\lambda_1 - \mu_0) k^2} \quad (23b)$$

$$\tau_s = \frac{\eta_0 k (1 + 2\mu_0 \lambda_2 k^2)}{1 + 4\mu_0 (\lambda_1 - \mu_0) k^2} \quad (23c)$$

若令

$$\omega = \frac{2k\sqrt{\mu_0(\lambda_1 - \mu_0)}}{\lambda_1}, \quad a = \sqrt{\frac{\lambda_1 - \mu_0}{\mu_0}} \quad (24)$$

则可求得微分方程组(22)的解为

$$\begin{bmatrix} \sigma_{1t} \\ \sigma_{2t} \\ \tau_t \end{bmatrix} = C_1 \exp\left(-\frac{t}{\lambda_1}\right) + C_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \sin \omega t \\ a \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{bmatrix} \exp\left(-\frac{t}{\lambda_1}\right) \\ + C_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \cos \omega t \\ -a \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{bmatrix} \exp\left(-\frac{t}{\lambda_1}\right) \quad (25)$$

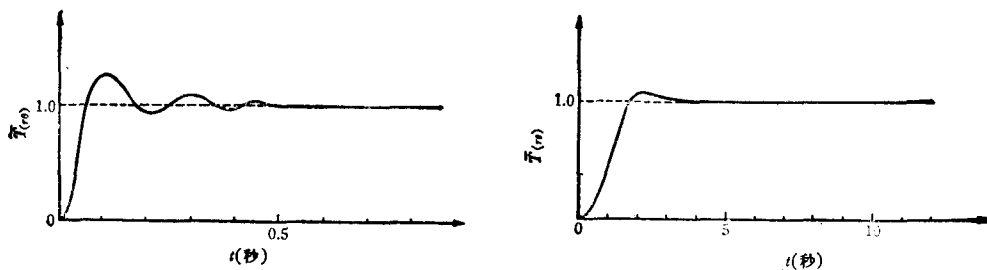
将式(23)、式(25)代入式(20),即得到  $T_{(rr)}$ 、 $T_{(\theta\theta)}$  和  $T_{(r\theta)}$ ,再应用式(18)定出常数  $C_1$ 、 $C_2$  和  $C_3$ ,最后得到

$$T_{(rr)} = \sigma_{1s} + \left[ \frac{\sigma_{2s}(a^2 - a - 1) - \sigma_{1s}a^2}{1 + a} - \left( \frac{\sigma_{1s}a^2 - \sigma_{2s}(a^2 - a - 1)}{a(1 + a)} - \frac{\tau_s}{a} \right) \sin \omega t \right. \\ \left. + \frac{\sigma_{2s} - \sigma_{1s}}{1 + a} \cos \omega t \right] \exp\left(-\frac{t}{\lambda_1}\right) \quad (26)$$

$$T_{(\theta\theta)} = \sigma_{2s} + \left[ \frac{\sigma_{2s}(a^2 - a - 1) - \sigma_{1s}a^2}{1 + a} + \left( \frac{\sigma_{1s}a^2 - \sigma_{2s}a(a^2 - a - 1)}{1 + a} - a\tau_s \right) \sin \omega t \right. \\ \left. - \frac{a^2(\sigma_{2s} - \sigma_{1s})}{1 + a} \cos \omega t \right] \exp\left(-\frac{t}{\lambda_1}\right) \quad (27)$$

$$T_{(r\theta)} = \tau_s + \left[ \frac{\sigma_{2s}(a^2 - a - 1) - \sigma_{1s}a^2}{1 + a} + \left( \frac{\sigma_{1s}a^2 - \sigma_{2s}(a^2 - a - 1)}{1 + a} - \tau_s \right) \cos \omega t \right. \\ \left. + \frac{a(\sigma_{2s} - \sigma_{1s})}{1 + a} \sin \omega t \right] \exp\left(-\frac{t}{\lambda_1}\right) \quad (28)$$

从式(19)及式(26)–(28)可以看出,第一法向应力差  $\nu_1 = T_{(\theta\theta)} - T_{(rr)}$  与第二法向应力差  $\nu_2 = T_{(rr)} - T_{(zz)}$  都不等于零,  $\nu_1$ 、 $\nu_2$  和  $T_{(r\theta)}$  都有建立过程和过量现象,并且它们的过量现象只与物质参量有关。图3中画出了不同物质参量,不同剪切速率下  $T_{(r\theta)}$



(a)  $\eta_0 = 1.0, \lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = 0.015,$   
 $\mu_0 = 0.01, \kappa = 145.8$   
 $\bar{T}(r, \theta) = 1 + [-0.14 - 0.86 \cos(87.48t) + 0.039 \sin(87.48t)] \exp(-10t)$

(b)  $\eta = 1.0, \lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 0.02,$   
 $\mu_0 = 0.01, \kappa = 1$   
 $\bar{T}(r, \theta) = 1 + [4.94 - 5.94 \cos(0.28t) + 0.84 \sin(0.28t)] \exp(-2t)$

图3 粘弹体应力建立过程的理论曲线

的建立过程。

## 实 验

### 1. 牛顿流体

用几种标准油, 在不同剪切速率下进行实验, 得到的结果类似, 图 4 中画出其中两种。

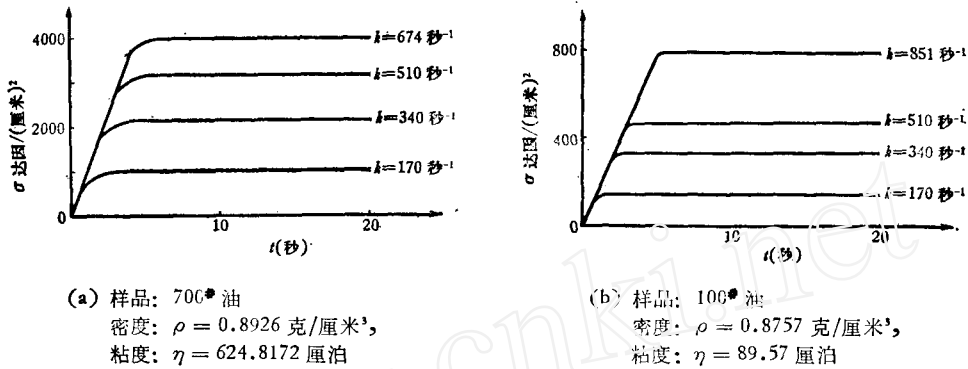


图 4 牛顿流体应力建立过程的实验曲线

从图 4 中可以看出, 两种样品都没有出现过量现象. 在进行这些实验的设备中  $\kappa = 2.2918 \times 10^6$  达因·厘米,  $I = 4.3185 \times 10^3$  达因·厘米·秒<sup>2</sup>,  $r_1 = 1.7245$  厘米,  $r_2 = 1.8415$  厘米,  $H = 7.62$  厘米, 可以算得, 在这种情形下  $E^2 r_1^2 > 4I\kappa$ , 故不出现过现象, 这是与上述理论分析相符合的(与图 2(a) 比较)。

### 2. 粘弹性流体

用羟乙基皂仁-硼砂冻胶、田菁-硼砂冻胶等多种样品, 在不同剪切速率下进行实验, 都看到了过量现象. 现以羟乙基皂仁-硼砂冻胶为例, 将其实验结果绘于图 5 中, 与图 3 比较, 可见与理论分析相符合. 由牛顿流体的实验可知, 仪器不会引起过量现象, 所以粘弹性流体实验中出现的过量现象是它的物质特性的表现。

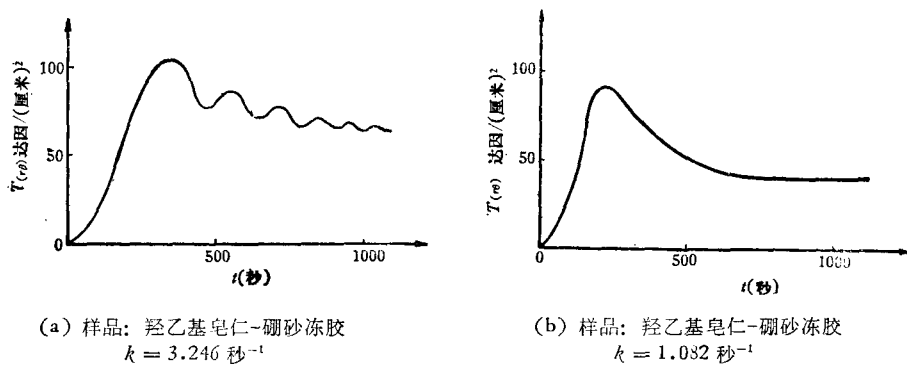
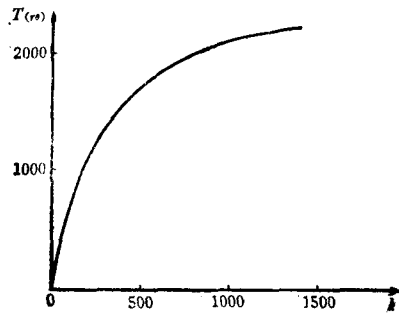


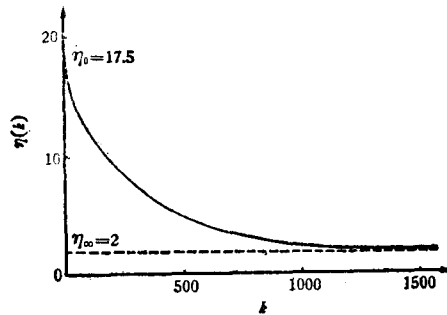
图 5 粘弹性应力建立过程的实验曲线

为了给出确定物质参量的例子, 我们还绘出了一种样品的剪切应力  $T(r, \theta)$  与应变速率  $k$  的关系曲线(见图 6) 和粘度函数  $\eta(k) (= T(r, \theta)/k)$  与应变速率  $k$  的关系曲线(见图 7)。



样品: 0.6% 羟乙基皂仁粉+0.6%  
硼砂, 交联比 100:25

图 6  $T(r, \theta)$  与  $k$  的关系曲线



样品: 0.6% 羟乙基皂仁粉+0.6%  
硼砂, 交联比 100:25

图 7  $\eta$  与  $k$  的关系曲线

### 物质参数的确定

在 (23c) 式中, 令

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 4\mu_0(\lambda_1 - \mu_0) \\ \sigma_2 &= 2\lambda_2\mu_0\end{aligned}\quad (29)$$

则可得粘度函数

$$\eta(k) = \frac{\eta_0(1 + \sigma_2 k^2)}{1 + \sigma_1 k^2}\quad (30)$$

由式(30)可知, 当  $k \rightarrow 0$  时,

$$\eta(k) \rightarrow \eta_0\quad (31)$$

以及当  $k \rightarrow \infty$  时

$$\eta(k) \rightarrow \eta_\infty = \frac{\eta_0 \sigma_2}{\sigma_1}\quad (32)$$

所以可将图 7 中的曲线向左延伸, 与  $\eta(k)$  轴的交点值就是  $\eta_0$ ,  $\eta_\infty$  可由曲线向右的渐近线来确定. 从而得到物质参量  $\lambda_1, \lambda_2, \eta_0, \mu_0$  满足的关系式之一

$$\eta_\infty = \frac{\eta_0 \lambda_2}{2(\lambda_1 - \mu_0)}\quad (33)$$

从物理特性上考虑, 对于大多数非牛顿流体, 可以得到下述关系式<sup>[1]</sup>

$$\sigma_1 > \sigma_2 > 0\quad (34)$$

$$\sigma_2 \geq \frac{1}{9} \sigma_1\quad (35)$$

$$\lambda_1 > \lambda_2 > 0\quad (36)$$

$$\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2) > \sigma_1 - \sigma_2\quad (37)$$

式(33)至式(37)是四个物质参量要满足的关系式, 由于其中一些是不等式, 所以它们仅给出一些限制条件, 还有一定的任意性, 只有将理论计算曲线与实验曲线拟合之后, 才能确定各物质参量.

我们用上述办法确定了前面提到的羟乙基皂仁-硼砂冻胶的物质参量, 得到  $\lambda_1 = 3$ ,

$\lambda_2 = 0.01$ ,  $\mu_0 = 2.9994$ ,  $\eta_0 = 17.5$ 。图 8 里绘出了羟乙基皂仁-硼砂冻胶的理论曲线与实验曲线, 从图中可以看到用上述方法确定的物质参量代入理论公式计算的结果与实验结果符合较好。

## 结 论

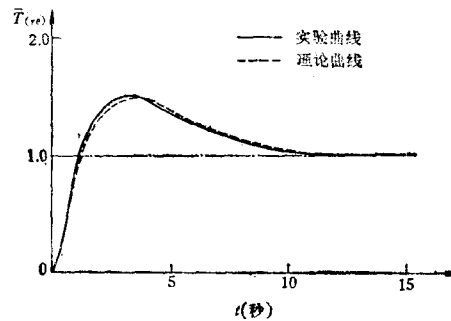
从上述理论分析与实验结果, 我们可以得出如下结论:

1. 牛顿流体里的过量现象是表观的, 它是由仪器设备的参数所引起的;

2. 粘弹性流体里的过量现象是真实的, 它是粘弹性流体物质特性的表现;

3. 可以利用应力过量现象来确定粘弹性流体的物质参量, 这是一个有效的方法。

感谢 Chan Man fong (陈文芳) 教授的热情指导; 感谢石油部石油勘探开发科学研究院开伐所压裂液组和钻井所泥浆室提供实验方便和部分实验资料, 一并致谢。



样品: 0.6% 羟乙基皂仁粉+0.6% 硼砂  
交联比 100:25

图 8 理论结果与实验结果的比较

## 参 考 文 献

- [1] 陈文芳, 非牛顿流体力学, 中译本即将由科学出版社出版。  
[2] Lockyer, M.A. & K., Walters, Rheol. Acta, 15 (1976), 179—188.

## TRANSIENT FLOW OF VISCOELASTIC FLUIDS

Cai Fushi

(Department of Mechanics, Peking University)

### Abstract

In this paper we examine the build up of the shear stress of a Newtonian and an Oldroyd Fluid flowing between two coaxial cylinders from the time the cylinders start to rotate till the time the shear stress reaches its equilibrium value. We also discuss the "apparent" and the "real" stress overshoot phenomenon. It is shown that an Oldroyd fluid does exhibit "real" stress overshoot phenomenon and the theoretical predictions are in good agreement with experimental data. We thus suggest that the stress overshoot phenomenon may be used to determine the elastic parameters of a viscoelastic fluid.