

计算三元自由表面孔口水流

丁 道 扬

(南京水利科学研究所)

摘要 假设为理想势流,应用有限单元法计算了三元孔口水流。基本函数是速度势,为确定自由表面位置、未知流量和孔口出流边线,本文提出了一种迭代解法。数值试验指出,当 $\alpha \leq 0.4$ 有好的收敛解,但 $\alpha > 0.4$ 则变差。算例表明,计算结果与试验值较吻合。

一、问题的提出

水利水电工程中,通常遇到的孔口水流可近似假设为理想势流,适合应用有限单元法求解。这类孔口常具有待定的自由表面和未知流量,具有非线性特征,要设法迭代求解。目前二元孔口的计算研究已取得不少成果^[1-5],但对于三元孔口问题,文献报道尚少。1976 年 Larock 和 Taylor 曾用三元方法计算了已知出流边线下的圆形薄壁孔口形状的出流问题^[6]。

对于三元孔口水流,各种基于流函数求解二元自由表面和未知流量的迭代方法已不能直接引用,应探求基于速度势求解的迭代方法。

由于自由表面边界应满足为流面(线)和压力为零两个条件,从如何满足这两个条件,通常可归纳成三种可能的迭代求解途径:

1. 先使假设的近似自由表面满足流面(线)条件,而后按压力条件调整得高一次近似自由表面。
2. 和上相反,先满足压力条件,按流面条件调整。
3. 自由表面两个条件在迭代时同时满足。

这三种求解途径,均应设法使之适应未知流量的求解和孔口出流边线的确定。第三种途径是从可变域变分原理出发,使自由表面两个条件能同时满足,由于非线性仍要迭代。二元水流可基于流函数求解,通过对自由表面的流函数取极值从而得到求解未知流量的方程^[5]。但对于三元水流应基于速度势求解,带有未知流量的可变域变分形式不易给出,同时还难以适应高次单元插值模式的采用。

Larock 和 Taylor 认为第一种求解途径无法给出近似自由表面调整的正确算式,仅适合渗流问题,因而他们在文献[6]中采用了第二种求解途径。这样在解近似流场时,要事先强迫出流边线上满足压力条件,只适合已知出流边线的求解,同时还会遇到在出流边线处出现两类边界条件衔接的困难^[4]。

本文提出了一种基于第一种求解途径的计算三元孔口水流的迭代计算方法。这种方

本文于 1982 年 4 月收到。

法的关键是给出近似自由表面的正确调整计算公式。

二、定解问题及求解过程

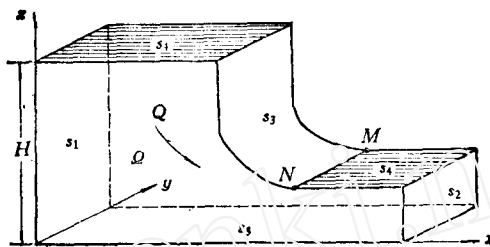


图 1 求解问题示意图

如图 1 所示,采用速度势 φ 求解,给定上游水深 H ,可给出如下定解问题:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (\text{在 } Q \text{ 内}) \quad (1)$$

$$\varphi_n|_{s_1} = \frac{Q}{A} = m \quad (2)$$

$$[I]: \begin{cases} \varphi|_{s_2} = 0 & (3) \\ \varphi_n|_{s_3} = 0 & (4) \\ \varphi_n|_{s_4} = 0 & (5) \end{cases}$$

$$\varphi_s|_{s_4} = \sqrt{2g(H + m^2/2g - z)} \quad (6)$$

式中 A 为 s_1 面积, n 为表面法线方向, s 为表面梯度方向。一旦 φ 解出,就不难求得全流场的流速及压力分布。为把表面结点流速和流量 Q 建立直接联系,以便未知流量的求解,同时也便于程序的编制,设:

$$\varphi = m\tilde{\varphi} \quad (7)$$

则定解问题 [I] 可转化为如下形式求解:

$$\nabla^2 \tilde{\varphi} = 0 \quad (\text{在 } Q \text{ 内}) \quad (8)$$

$$\tilde{\varphi}_n|_{s_1} = 1 \quad (9)$$

$$\tilde{\varphi}|_{s_2} = 0 \quad (10)$$

$$[II]: \begin{cases} \tilde{\varphi}_n|_{s_3} = 0 & (11) \\ \tilde{\varphi}_n|_{s_4} = 0 & (12) \end{cases}$$

$$\tilde{\varphi}_s|_{s_4} = \frac{1}{m}\sqrt{2g(H + m^2/2g - z)} \quad (13)$$

根据问题 [II] 的形式,采用上述第一种途径,其具体求解过程是:

1. 先假设初始近似自由表面 s_4 的位置、出流边线 MN 位置及流量 Q 。

2. 使 s_4 先满足流面条件式(12),求解(8)——(12)式所确定的定解问题,简称近似流场的求解。

3. 根据近似流场的解,确定高一次近似流量、孔口出流边线及自由表面位置。

以此重复 2、3 两步反复迭代求解,直到获得满意的收敛值为止。这种迭代求解的实质,是把具有待定自由表面和未知流量的可变域非线性问题,转化为已知自由表面位置和

流量的固定域的线性问题迭代求解。

三、等参元解近似流场

式(8)–(12)所确定的定解问题, 等价于下述泛函取极小值的变分问题:

$$J[\tilde{\varphi}] = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} (\nabla \tilde{\varphi})^2 dv - \iint_{\Gamma_1} \tilde{\varphi} ds = \min \quad (14)$$

采用 20 结点的空间等参元来离散流场解(14)式。这种单元容易实现自动编元, 用少量的单元即能较好地拟合弯曲的几何边界。

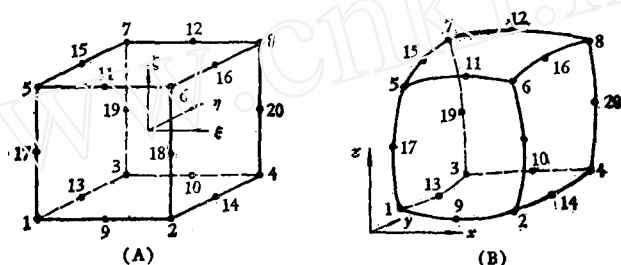


图 2 等参元示意图

如图 2(A) 所示, 为局部坐标 (ξ, η, ζ) 下的立方体单元, 棱上各结点为各棱中点。图 2(B) 为整体坐标 (x, y, z) 下的实际单元。建立下式的插值关系:

$$u = \sum_{i=1}^{20} N_i u_i \quad (15)$$

u 分别代表 $\tilde{\varphi}$ 及 x, y, z , u_i 为相应各结点值。形函数 N_i 为 (ξ, η, ζ) 的已知函数, 式(15)所确定的变换关系, 使正方体的局部单元和曲棱六面体的实际单元, 在几何形态上建立了明确的变换关系。应用一般的方法, 就不难形成单元矩阵, 通过叠加形成总体矩阵, 从而得到 n 阶的线性代数方程组:

$$[A]\{\tilde{\varphi}_i\} = \{B_i\} \quad (16)$$

$[A]$ 是正定对称的稀疏矩阵, 用 $L-R$ 法求解。在形成单元矩阵时涉及到数值积分, 采用通常的三维高斯数值积分方法, 积分点取 3^3 个。

四、高一次近似量的确定

1. 流量

文献[4]指出, 孔口附近流态对流量起直接控制作用, 故这里把孔口出流边线压力为零条件作为求解高一次近似流量 $Q^{(n+1)}$ 的物理依据。考查出流边线 $\widehat{MN}$ 上结点 i , 因 (n) 次近似流场下的自由表面及流量处于近似值状态, i 点压力不为零, 有一剩余压力水头 $\left(\frac{p}{\gamma}\right)_i$, 其值可由伯努里方程给出:

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right)_i = H - z_i - \frac{Q^2}{2gA^2} (\tilde{u}'_i - 1) \quad (17)$$

$\tilde{u}_i$ 为 (n) 次流场解得的 $\tilde{\varphi}_{i,n}^{(n)}$ 值. 若把 $\left(\frac{p}{\gamma}\right)_i$ 看成是 Q 的函数, 故上式以 Q 代替 $Q^{(n)}$. 让 $\widehat{MN}$ 上全部 K 个结点在平均意义下使压力为零, 设:

$$E = \sum_{i=1}^K \left(\frac{p}{\gamma}\right)_i^2 \quad (18)$$

从而根据 E 取极小值条件 $\frac{dE}{dQ} = 0$, 可得:

$$Q^{(n+1)} = \sqrt{2g} A \sqrt{\left[\sum_{i=1}^K (H - z_i)(\tilde{u}_i^2 - 1)\right] / \left[\sum_{i=1}^K (\tilde{u}_i^2 - 1)\right]} \quad (19)$$

2. 孔口出流边线

上面计算 $Q^{(n+1)}$ 是在已知 $\widehat{MN}$ 位置下讨论的, 严格讲 $\widehat{MN}$ 不一定是孔口出口上缘固定边界的横向边缘线, 应通过计算加以确定.

采取在每次迭代时, 先固定侧缘点 M , 由 M 点出发找一条等压线, 使其压力均为 M 点压力, 这条等压线即为高一次近似的孔口出流边线. 这样再用上节方法推求 $Q^{(n+1)}$, 便可保证新的出流边线上各结点 $\left(\frac{p}{\gamma}\right)_i$ 一致收敛于零.

应指出, 固定 M 点得到的收敛解有时还不一定是真正的出流边线. 这时应把 M 点逐渐向上游移动重复以上迭代, 直到收敛的自由表面刚刚不超过孔口上缘固定边界线为止, 才是最终解答.

3. 自由表面

考查真实自由表面某点, 流速水头及落差均应是该点法向位移 z_* 的函数, 分别记:

$$F(z_*) = \frac{V^2}{2g} \quad (20)$$

$$f(z_*) = H + \frac{Q^2}{2gA^2} - z \quad (21)$$

该点垂直位置坐标 z 与 z_* 关系为:

$$z_* = (z - z_0) / \cos \theta \quad (22)$$

z_0 为 $z_* = 0$ 时 z 值, θ 为自由表面法向与垂直坐标方向的夹角. 由伯努里方程知, 自由表面为零压, 有 $F(0) = f(0)$. 若在这种平衡状态下给一有限法向位移 x , 则处于不平衡状态, $F(x) \neq f(x)$. 因 x 是一小量, 对 $F(x)$ 及 $f(x)$ 分别 Taylor 展开, 略去高阶微量, 不难导得:

$$F(x) - f(x) = [F'(0) - f'(0)]x \quad (23)$$

上式表明, 给定 x 后, $F'(0)$ 与 $f'(0)$ 的不等式关系, 决定了 $F(x)$ 与 $f(x)$ 的不等式关系, 即决定了不同的自由表面的位移性质. 进而表明自由表面存在着某种流态的差异, 不同流态具有不同位移性质. $F'(0)$ 与 $f'(0)$ 的不等式关系, 即应是二元或三元自由表面重力流流态的判别准则. 沿用一元水流流态名词, 注意到 $F'(0)$ 、 $f'(0)$ 均为负值, 这种流态的判别准则为: $F'(0) < f'(0)$, 或 $|F'(0)| > |f'(0)|$ 为急流, $F'(0) > f'(0)$, 或 $|F'(0)| < |f'(0)|$ 为缓流, 二者相等为临界流. 容易证明, 对一元水平重力流动, 由上述

判别准则可求得通常以福氏数 F_r 所表示的相一致的流态判别数, 即 $F_r > 1$ 为急流, $F_r < 1$ 为缓流, $F_r = 1$ 为临界流。

不同流态具有不同的位移性质, 对近似自由表面的调整是重要的。若处于近似自由表面状态, 对某考查点, 其流速水头和落差显然也是法向位移 $\bar{z}_*$ 的函数, 记为 $\bar{F}(\bar{z}_*)$ 和 $\bar{f}(\bar{z}_*)$ 。由于 $\bar{F}(0) \approx \bar{f}(0)$, 调整 $\bar{x}$ 后, 使 $\bar{F}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x})$ 。认为近似自由表面位置与真实状态偏离不大, $\bar{F}'(0)$ 与 $\bar{f}'(0)$, 及 $F'(0)$ 与 $f'(0)$ 有着同号的不等式关系。容易证明, 调整值 $\bar{x}$ 由下式决定:

$$\bar{x} = -\frac{\bar{F}(0) - \bar{f}(0)}{\bar{F}'(0) - \bar{f}'(0)} \quad (24)$$

式(24)表明, 在急流时有 $\bar{F}'(0) < \bar{f}'(0)$, 当 $\bar{F}(0) > \bar{f}(0)$, 则 $\bar{x} > 0$; 当 $\bar{F}(0) < \bar{f}(0)$, 则 $\bar{x} < 0$ 。而缓流时调整值 $\bar{x}$ 的方向显然刚刚相反。说明近似自由表面的调整必须考虑到流态的差异。由上式还可见, 在临界流时, 分母为零, 不易得到收敛结果, 须作特别的处理^[7]。

要建立 $\bar{x}$ 的具体计算式, 关键是如何根据 (n) 次近似流场解, 给出表面结点流速的函数关系 $\bar{V}_i(\bar{z}_{i*})$ 。为简单起见, 这里仅讨论自由表面水平时情况, 即式(22)中 $\theta = 0$, 当 $\theta \approx 0$ 时只差一个角度关系, 可类推出来。

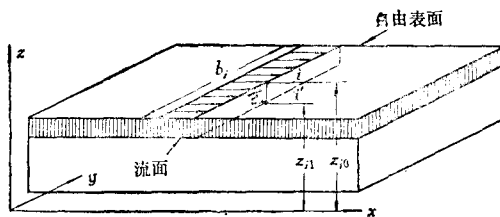


图 3 流面示意图

如图 3 所示, 在 (n) 次近似流场下设想有一流面, 形成图中阴影所示的表面流层。引入待定系数 α_i , 通过表面流层的流量 ΔQ 为:

$$\Delta Q = \alpha_i Q \quad (25)$$

考查 i 点, 因流量沿过水宽度 b_i 分配可能不均匀, 引入修正系数 α_{i2} , 则通过 $\bar{i}i'$ 的单宽流量 q_i 为:

$$q_i = \alpha_{i2} \frac{\Delta Q}{b_i} = \alpha_i \alpha_{i2} \frac{Q}{b_i} = \alpha_i \alpha_{i2} \bar{q}_i \quad (26)$$

又因流速沿 $\bar{i}i'$ 分布可能不均匀, 引入 α_{i3} , 则 (n) 次近似流场表面流速 V_{i0} 可表示为:

$$V_{i0} = \alpha_{i3} \frac{q_i}{h_i} = \alpha_i \alpha_{i2} \alpha_{i3} \frac{\bar{q}_i}{z_{i0} - z_{i1}} \quad (27)$$

认为近似自由表面由 z_{i0} 移到 z_i 处, 其表面流速 $\bar{V}_{oi}$ 仍具有上式类似关系, 并设 $\alpha_i = \alpha_i \alpha_{i2} \alpha_{i3}$, 有:

$$\bar{V}_{oi} = \alpha_i \frac{\bar{q}_i}{z_i - z_{i1}} \quad (28)$$

因近似自由表面法向位移 $\bar{z}_{i*}$, 水平时有如下关系:

$$\bar{z}_{i*} = z_i - z_{i0} \quad (29)$$

以式(29)代入式(28), 并考虑到式(27), 则得:

$$\bar{V}_i(\bar{z}_{i*}) = \alpha_i \bar{q}_i / \left(\frac{\alpha_i \bar{q}_i}{V_{i0}} + \bar{z}_{i*} \right) \quad (30)$$

从而有:

$$\bar{F}(\bar{z}_{i*}) = \frac{1}{2g} \left(\frac{\alpha_i \bar{q}_i}{V_{i0}} + \bar{z}_{i*} \right)^2 \quad (31)$$

不难给出:

$$\bar{f}(\bar{z}_{i*}) = H + \frac{Q^2}{2gA^2} - z_{i0} - \bar{z}_{i*} \quad (32)$$

因处于 (a) 次近似自由表面状态, $\bar{F}(0) \neq \bar{f}(0)$, 应给一法向调整值 $\bar{x}_i$ (即 $\bar{z}_{i*} = \bar{x}_i$), 使达平衡状态:

$$\bar{F}(\bar{x}_i) = \bar{f}(\bar{x}_i) \quad (33)$$

上式是 $\bar{x}_i$ 的三次代数方程, 存在两个有意义解, 即急流解和缓流解, 可用 (24) 式来推求 $\bar{x}_i$. 这里还可采用另一种方法, 对上游缓流, 有 $|\bar{F}'(0)| < |\bar{f}'(0)|$, 采用如下迭代方法:

$$\bar{F}(0) = \bar{f}(\bar{x}_i) \quad (34)$$

由此可解得缓流调整值 $\bar{x}_{i1}$:

$$\bar{x}_{i1} = H + \frac{Q^2}{2gA^2} - z_{i0} - \frac{V_{i0}^2}{2g} \quad (35)$$

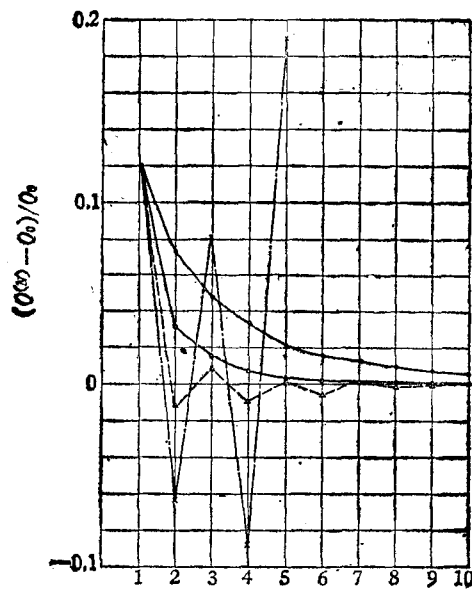


图4 α 值对收敛影响

—•— $\alpha = 0.1$ ---△--- $\alpha = 0.4$
—●— $\alpha = 0.2$ -·-×-·- $\alpha = 0.6$

同样孔口下游为急流, 有 $|\bar{F}'(0)| > |\bar{f}'(0)|$, 采用如下迭代方法:

$$\bar{F}(\bar{x}_i) = \bar{f}(0) \quad (36)$$

由此得急流调整值 $\bar{x}_{i2}$:

$$\bar{x}_{i2} = \frac{\alpha_i \bar{q}_i}{\sqrt{2g \left(H + \frac{Q^2}{2gA^2} - z_{i0} \right)}} - \frac{\alpha_i \bar{q}_i}{V_{i0}} \quad (37)$$

计算中要事先给出 α_i 值。通过数值试验表明, 对 α_i 值要求不严, 因此可以不区别结点影响, 仅需采用一个统一的 α 值表示, 这里称为综合调整系数, 类似迭代法求解中的松弛因子。图 4 是针对 V 号孔口的数值试验结果, 表示了 α 值对解的收敛影响。图中可见, $\alpha \leq 0.4$ 能得到收敛结果, α 值越小越保证收敛; α 值加大可提高收敛速度, 但过大, 如 $\alpha = 0.6$ 则发散了。

五、算 例

为验证计算方法, 分别对四个实际工程的泄流孔及我所深孔体型研究 23[#] 等五种不同孔口体型进行了计算, 分别编号为 I—V。各组均布置 120 个单元, 约 800 个结点, 流场各横断面均布置成相等的结点数, 以便自动编元, 每组计算仅需输入大约 350 个数据。因形成等参元单元矩阵占时间较多, 在每次迭代时只形成因自由面调整受影响的那些单元矩阵, 能有效地减少计算时间。全部计算在我所 TQ-16 机上进行。各组算例取 $\alpha = 0.1 \sim 0.2$, 具有较好的收敛结果。控制两次迭代的流量相对误差在 0.001 以内, 约需迭代 10 次, 总计算时间约三小时。

因篇幅所限, 这里仅给出部分典型计算结果。图 5 为 V 号孔的自由表面的计算结果, 系孔中心线的形状。计算表明, 对自由表面初值没有苛刻要求。在内图中还给出流量、自

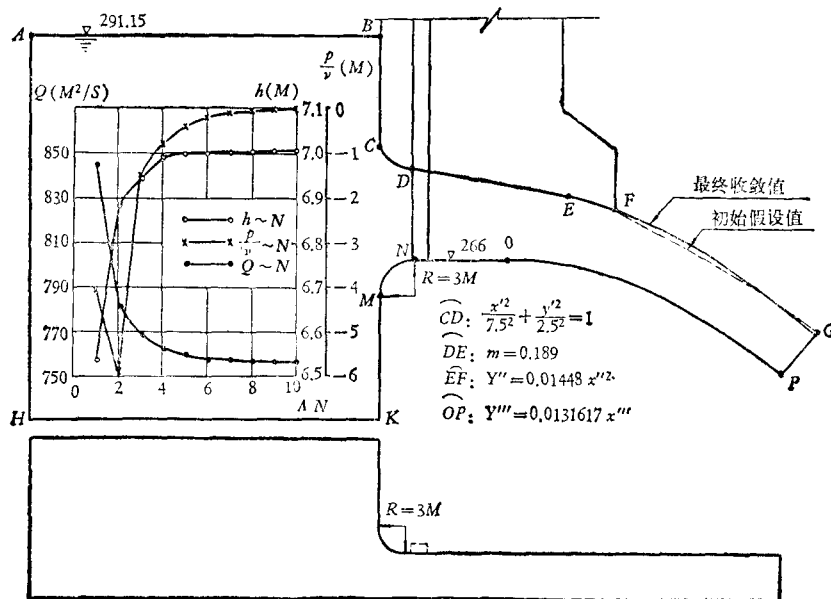


图 5 V 号孔自由表面计算结果

由表面位置及压力在固定考查点上的收敛情况,可见有较好的一致收敛性。

图 6 为 II 号孔自由表面计算结果,可见最终算得的孔口出流边线,并不是过 F 的横向边缘线,而是在侧边从 M 点即分离,中心线上从 N 点即分离。

各组流量的计算结果列于下表:

孔口编号	I	II	III	IV	V
相对有压长 L/D	0.33	0.55	1.00	1.75	3.70
$Q_{\text{计}}$ (方/秒)	968	1068	10.2	778	1512
$Q_{\text{试}}$	973	1670	9.97	760	1440
$(Q_{\text{计}} - Q_{\text{试}})/Q_{\text{试}}$	-0.5%	1.7%	2.2%	2.4%	5%

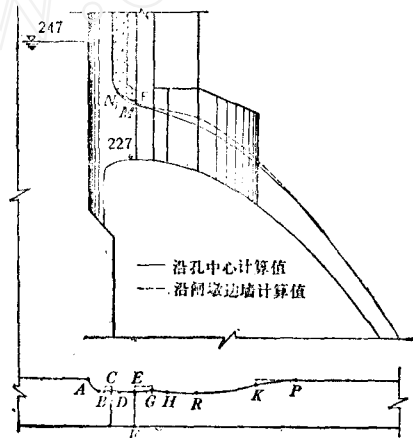


图 6 II 号孔自由表面计算结果

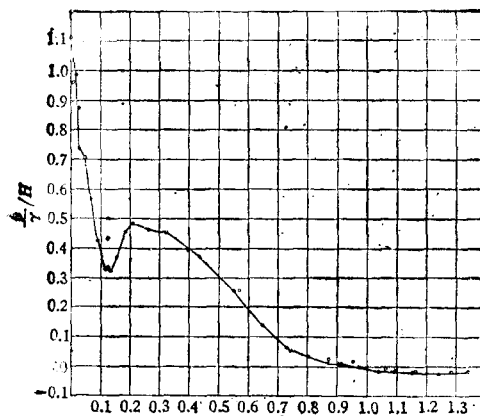


图 7 V 号孔坝面中心线压力计算结果

--- 三元计算
○ $L_r = 50$ 试验

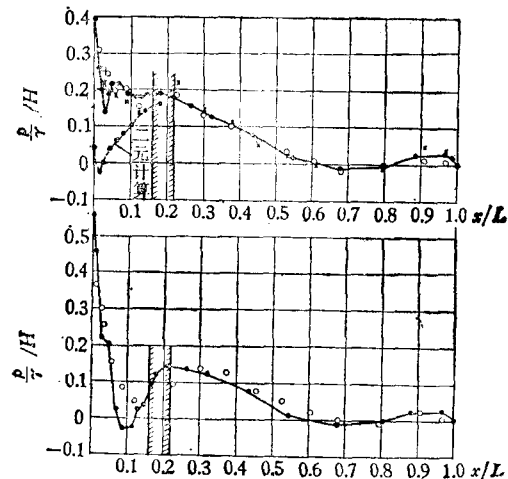


图 8 V 号孔孔顶中心线及角隅压力计算结果

--- 三元试验
○ $L_r = 50$ 试验
× $L_r = 100$ 试验

由表可见, 计算和试验相比, 流量误差一般不大, 仅 V 号孔偏大达 5%, 可能由于有压段长与孔高比较大, 以致阻力对流量有明显影响。

图 7 及图 8 为 V 号孔的坝面中心线及孔口顶部的压力分布计算结果。图 8 上图为孔顶中心线, 下图为孔顶角隅的压力分布。可见计算和模型试验结果二者基本吻合。图 8 上图还标明了二元和三元计算结果的差异。

参 考 文 献

- [1] Chan, S. T. K., Larock, B. E., Herrman, L. R., Free-surface ideal flows, *A. S. C. E.*, **99**, HY6 (1973).
- [2] Diersch, H. J., Schiremer, A., Busch, K. F., Analysis of flows with initially unknown discharge, *A. S. C. E.*, **103**, HY3 (1977).
- [3] 许协庆, 自由表面重力流的一种有限元解法, *水利学报*, 1 (1980).
- [4] 丁道扬, 具有未知流量的二元孔口水流数学模型, *水利水运科学研究*, 2 (1981).
- [5] 丁方中, 用有限单元法计算闸下自由出流, *水利水电科学研究院研究生毕业论文* (1981).
- [6] Larock, B. E., Taylor, C., Computing three-dimensional free surface flows, *Int. J. Num. Meth. in Engng*, **10**, 5 (1976).
- [7] 丁道扬, 刘曼聆, Mathematical model of flow over a spillway dam, *Transactions of the Thirteenth International Congress on Large Dams*, Q. 50, R. 55 (1979).

COMPUTATION OF THREE-DIMENSIONAL FREE SURFACE FLOWS THROUGH AN OUTLET

Ding Daoyang

(Nanjing Hydraulic Research Institute)

Abstract

Based on the assumption of ideal potential flow, the three-dimensional flow through an outlet has been computed by the use of the finite element method. The basic function is the velocity potential. A method of iteration for the determination of the free surface locations, unknown discharge, and the boundary of outflow is developed in this study. The results of numerical experiments indicate that convergence of the solution is very good at $\alpha \leq 0.4$ but deteriorates as α increases.

The computed results, as shown by the verification examples, agree well with the experimental values.