

Curle 边界层的一个新的级数解

刘 钺

(西北工业大学)

提要 本文以文献[4]所给出的变换为基础,导出了 Curle 边界层摩擦应力的一个新的级数解。和 Blasius 级数解相比,新级数有着较好的规律性和较快的收敛速度。本文根据已知项所提供的信息和分离点的特性,得出了级数通项的表达式。以这一通项估计余项,所得结果与 Curle 的准确解相当吻合。本文实际上以一个简明的实例,说明文献[4]所提出的变换将会给边界层的研究和计算带来一定的好处。

一、引言

Curle 在文献[1]中对主流速度为 $U(\bar{x}) = U_0(\bar{x} - \bar{x}^3)$ 时的边界层求出了摩擦应力和位移厚度的准确解。它是具有驻点和分离点的边界层的为数不多的准确解之一。由于这一边界层与一般绕流柱体的边界层有着一些类似之处,所以, Curle 的准确解,特别是摩擦应力的准确解,可用作检查某些近似解法近似程度的标准^[2,3]。Curle 在求解这一边界层时,应用了著名的 Blasius 级数。由于该级数仅有六项为已知,所以需要对其余项进行合理的估计。Curle 所处理的级数为

$$\begin{aligned} T &= \sum_0^{\infty} \bar{x}^{2n+1} F''_{2n+1}(0) = \left(\frac{\nu l}{U_0^3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \\ &= 1.232588\bar{x} - 2.89779\bar{x}^3 + 0.71509\bar{x}^5 - 0.06111\bar{x}^7 \\ &\quad - 0.3079\bar{x}^9 + 0.6187\bar{x}^{11} + R_c \end{aligned} \quad (1)$$

其中 T 为摩擦应力, ν 为运动粘性系数, l 为某一特征长度, U_0 为某一特征速度, u 为纵向速度, x, y 分别为纵向和横向坐标, R_c 为余项, $\bar{x} = \frac{x}{l}$ 。

在压力最低点, $\bar{x} = 1/\sqrt{3}$,

$$T = 0.7116 - 0.5577 + 0.0459 - 0.0013 - 0.0022 - 0.0015 - \dots \quad (2)$$

在分离点的临近,例如 $\bar{x} = 0.66$ 处,

$$T = 0.8135 - 0.8331 + 0.0896 - 0.0033 - 0.0073 - 0.0064 - \dots \quad (3)$$

文献[4]引入了新的变量,将边界层方程变为一种新的形式。本文以这一变换为基础,得出了摩擦应力因子的一个新的级数解。它显示出明显的规律性和收敛趋势。文中根据其已知项所提供的信息和分离点的特性,对余项进行了估计。此外,新级数的收敛速度较之 Blasius 级数也有了明显的提高。

本文于 1981 年 10 月收到。

二、新的级数解法

文献[4]在引入新的自变量之后,将经典的边界层方程式变为

$$f_{\eta\eta\eta} + \frac{1}{2}(\xi + 1)ff_{\eta\eta} + \xi(1 - f_{\eta}^2) = \zeta(\xi)[f_{\xi\eta}f_{\eta} - f_{\xi}f_{\eta\eta}] \quad (4)$$

边界条件为

$$f(\xi, 0) = f_{\eta}(\xi, 0) = 0, f(\xi, \infty) = 1 \quad (5)$$

其中

$$\zeta(\xi) = x \frac{d\xi}{dx} = \frac{x^2}{U} \frac{d^2U}{dx^2} + \xi - \xi^2 \quad (6)$$

$$\xi = \frac{x}{U} \frac{dU}{dx}, \quad \eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \quad (7)$$

函数 $f(\xi, \eta)$ 以下面的形式与流函数相联系

$$\phi = \sqrt{\nu U x} f(\xi, \eta) \quad (8)$$

纵向速度的无因次形式为

$$\frac{u}{U} = f_{\eta} \quad (9)$$

摩擦应力的无因次形式为

$$c_f = \frac{\tau_0}{\rho U^2} = \sqrt{\frac{\nu}{xU}} f_{\eta\eta}(\xi, 0) = R_x^{-\frac{1}{2}} \varphi \quad (10)$$

其中 τ_0 为壁面摩擦应力, R_x 为当地雷诺数, φ 为摩擦应力因子。

对于 Curle 边界层,

$$U = U_0(\bar{x} - \bar{x}^3) \quad (11)$$

$$\xi = 1 - \frac{2\bar{x}^2}{1 - \bar{x}^2} \quad (12)$$

$$\zeta(\xi) = -(\xi^2 - 4\xi + 3) \quad (13)$$

如设

$$f(\xi, \eta) = \sum_0^{\infty} (1 - \xi)^i f_i(\eta) = \sum_0^{\infty} \lambda^i f_i(\eta) \quad (14)$$

则

$$\varphi = f_{\eta\eta}(\xi, 0) = \sum_0^{\infty} \lambda^i f_i''(0) \quad (15)$$

本来,将(13)、(14)式代入(4)式,得出一系列常微分方程式,在边界条件(5)下求解这一方程组,即可得出 $f_i(\eta)$ 、 $f_i'(\eta)$ 和 $f_i''(0)$,从而得出所需要的级数解。但是,对于本文所讨论的具体问题,利用“对比法”^[5],即可十分方便地根据 Blasius 级数的各个系数求得新级数的各个系数。显然,这样还可以保证所得的系数与 Blasius 级数的系数具有同样的准确度,从而更为清楚的显示出新自变量所带来的好处。

比较(10)式和(1)式,可得

$$T = \sqrt{\frac{U^3}{xU_0^3}} \quad \varphi = \sqrt{\frac{U^3}{x}} f_{\eta\eta}(\xi, 0) \quad (16)$$

或者

$$\sum_0^{\infty} \bar{x}^{2n+1} F_{2n+1}''(0) = \bar{x}(1 - \bar{x}^2)^{\frac{1}{2}} \sum_0^{\infty} \lambda^i f_i''(0) \quad (17)$$

将 λ 表示为 λ 的级数, 比较(17)式两端 λ 同次项的系数, 可得

$$\left. \begin{aligned} f_0''(0) &= F_1''(0) = 1.232588 \\ f_1''(0) &= \frac{1}{2} \left[F_3''(0) + \frac{3}{2} f_0''(0) \right] = -0.524453 \\ f_2''(0) &= \frac{1}{4} \left[F_5''(0) + \frac{3}{8} f_0''(0) + f_1''(0) \right] = -0.067895 \\ f_3''(0) &= -0.016683 \\ f_4''(0) &= -0.006266 \\ f_5''(0) &= -0.002763 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

由此可有

$$\varphi = \sum_0^{\infty} \lambda^i f_i''(0) = 1.232588 - 0.524453\lambda - 0.067895\lambda^2 - 0.016683\lambda^3 - 0.006266\lambda^4 - 0.002763\lambda^5 + R_L \quad (19)$$

其中 R_L 表示余项.

在压力最低点 ($\lambda = 1, \xi = 0$)

$$\begin{aligned} p &= 1.232588 - 0.524453 - 0.067895 - 0.016683 - 0.006266 \\ &\quad - 0.002763 - \dots \end{aligned} \quad (20)$$

在分离点的临近(例如 $\lambda = 1.5$ 处)

$$\begin{aligned} \varphi &= 1.232588 - 0.78668 - 0.15276 - 0.05631 - 0.03172 - 0.02098 - \dots \\ &= 1.232588 - 1.04845 = 0.18414 - \dots \end{aligned} \quad (21)$$

可以看出, 与(1)~(3)相比, (19)~(21)显示出良好的规律性和收敛趋势, 便于我们进行余项估计.

如所周知, 由于在分离点处出现奇点^[6], 级数将不再收敛. 在估计余项时, 除了已知各项所提供的信息之外, 这一事实应作为一个重要的条件.

仔细考察(19)式, 发现该级数的通项可以表示为

$$\lambda^i f_i''(0) = \frac{k\lambda^i}{(i-1)^s r^{i-2}}, \quad i > 2 \quad (22)$$

其中 k, s, r 为待定常数. 这样, (19)式即可写成

$$\begin{aligned} \varphi &= 1.232588 - 0.524453\lambda - 0.067895\lambda^2 - 0.016683\lambda^3 - 0.006266\lambda^4 \\ &\quad - 0.002763\lambda^5 + \lambda^2 \sum_6^{\infty} \frac{k}{(i-1)^s} \left(\frac{\lambda}{r}\right)^{i-2} \end{aligned} \quad (23)$$

显然, 当 $s > 1$ 时, 上式是一个收敛级数, 其收敛半径为 $\lambda = r = \lambda_{sep}$.

我们根据已知的系数和分离点的条件

$$f_2''(0) = -0.067895, \quad f_3''(0) = -0.016683 \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \varphi &= 1.232588 - 0.524453r - 0.067895r^2 - 0.016683r^3 - 0.006266r^4 \\ &\quad - 0.002763r^5 + r^2 \sum_6^{\infty} \frac{k}{(i-1)^s} = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

求得

$$k = -0.067895, \quad s = 1.4371, \quad r = 1.503 \quad (26)$$

另外两个已知系数可以用来检查通项表达式的准确程度。为此,将(26)代入(22)式,并令 $i = 4, 5$, 可得

$$f_4'(0) = -0.006198, \quad f_5'(0) = -0.002727 \quad (27)$$

与已知的准确值 -0.006266 、 -0.002763 相比,误差仅约 1.5%。由(21)可知,即使在级数收敛速度最差的分离点临近,余项也只占级数 $\sum_1^{\infty} \lambda_{sep}^i f_i''(0) = 1.232588$ 的一小部分(约

18%)。这样,余项估计中 2% 的误差只能给级数 $\sum_1^{\infty} \lambda^i f_i''(0)$ 带来大约 0.4% 的最大误差。考虑到这样的情况 and 级数的美好规律性,我们可以相信

$$\begin{aligned} \varphi = & 1.232588 - 0.524453\lambda - 0.067895\lambda^2 - 0.016683\lambda^3 - 0.006266\lambda^4 \\ & - 0.002763\lambda^5 - \lambda^2 \sum_0^{\infty} \frac{0.067895}{(i-1)^{1.431}} \left(\frac{\lambda}{1.503}\right)^{i-2} \end{aligned} \quad (28)$$

是摩擦应力因子的一个比较准确的表达式。

三、三种级数解的比较

除了 Blasius 级数之外,另一个著名的级数解法是以 Görtler-Meksyn 变换为基础的 Görtler^[7] 级数解法。对于 Curle 边界层,按照 Görtler 级数,我们有

$$\begin{aligned} \varphi \sqrt{\frac{2\xi}{xU}} = & \sum_0^{\infty} \xi^k F_k''(0) \\ = & 1.232587 - 1.481520\xi - 6.733865\xi^2 - 29.82269\xi^3 \\ & - 131.8693\xi^4 - 586.3911\xi^5 - \dots, \end{aligned} \quad (29)$$

其中

$$\xi = \int_0^{\bar{x}} \bar{U}(\bar{x}) d\bar{x} = \frac{1}{2} \bar{x}^2 - \frac{1}{4} \bar{x}^4 \quad (30)$$

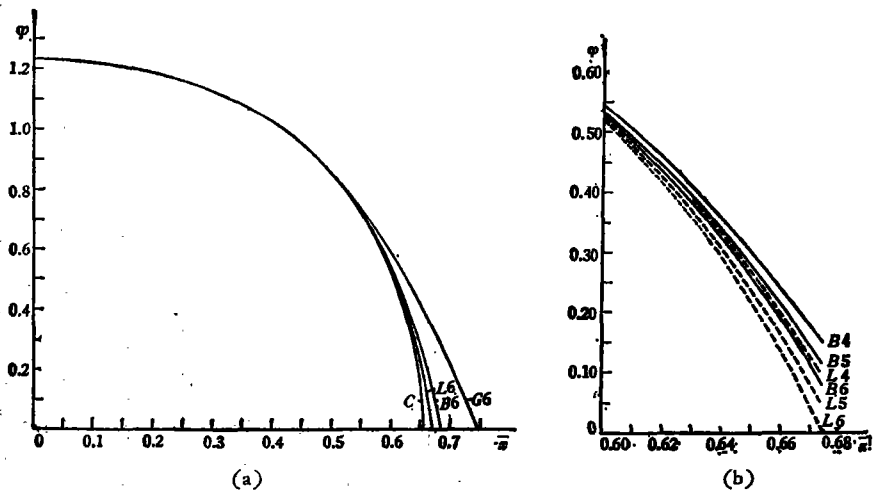


图1 三种级数解的比较

C ——Curle 准确解, $B6$ ——Blasius 六项级数,
 $G6$ ——Görtler 六项级数, $L6$ ——本文六项级数,余类推

$$\bar{U}(\bar{x}) = \bar{x} - \bar{x}^3 \quad (31)$$

我们将按照(1) Blasius 级数, (2) Görtler 级数, (3) 本文提出的新级数, 三种方法所求得的结果加以比较, 示如图 1 和表 1.

表 1 三种级数解的比较

$\bar{x}$	Blasius	Görtler	本 文 级 数			准确解	(28) 式
	φ_{B6}	φ_{G6}	φ_{L4}	φ_{L5}	φ_{L6}	φ_C	φ_L
0.100	1.22197	1.22197	1.22197	1.22197	1.22197	1.22197	1.22197
0.200	1.18838	1.18841	1.18840	1.18838	1.18838	1.18838	1.18838
0.300	1.12604	1.12622	1.12606	1.12605	1.12605	1.12604	1.12605
0.400	1.02189	1.02259	1.02202	1.02189	1.02187	1.02186	1.02187
0.500	0.84690	0.85429	0.84783	0.84660	0.84623	0.84604	0.84606
0.550	0.71344	0.73604	0.71572	0.71217	0.71081	0.70973	0.70979
0.600	0.52793	0.58981	0.53290	0.52286	0.51787	0.51078	0.51116
0.610	0.48210	0.55631	0.48784	0.47548	0.46902	0.45835	0.45888
0.620	0.43261	0.52306	0.43923	0.42399	0.41559	0.39915	0.39999
0.640	0.32019	0.45131	0.32961	0.30638	0.29217	0.24820	0.25026
0.650	0.25787	0.41422	0.26758	0.23886	0.22033	0.13511	0.13861
0.652	0.24458	0.40655	0.25452	0.22455	0.20500	0.10205	0.10671
0.654	0.23106	0.39889	0.24123	0.20995	0.18933	0.05969	0.06303
0.655	0.22421	0.39480	0.23450	0.20254	0.18137	0.02052	0.02063
0.655 ₁	—	—	—	—	—	0.000—	0.000—

由表 1 可以看出, 由本文 (28) 式所得结果与 Curle 的准确解基本一致. 由表 1 和图 1 可知, 如果均取前六项和, 则本文级数的准确度最高. 按前六项和所得分离点位置分别为 $\bar{x}_{sepB} \approx 0.684$, $\bar{x}_{sepG} \approx 0.749$, $\bar{x}_{sepL} \approx 0.675$, 也以后者与 Curle 的准确值 0.6551 最为接近. 考虑到 Görtler 级数的收敛性较差, 图 1(b) 只对 Blasius 级数和本文级数在分离点临近的情况进行比较. 可以看出, 不仅 $L6$ 的准确度高于 $B6$, 而且 $L5$ 的准确度也高于 $B6$, 甚至 $L4$ 的准确度也与 $B6$ 相近. 这表明新级数的收敛速度明显地高于 Blasius 级数. 由图 1(b) 粗略估计, $B8$ 曲线约可与 $L6$ 重合, 亦即为了达到 $L6$ 的准确度, Blasius 级数尚需增加两项. 这需要在已经解出 19 个微分方程式的基础上再逐次求解 18 个常微分方程式.

四、结 语

以上的分析计算表明:

1. 新级数显示出良好的规律性和收敛趋势, 便于进行余项估计, 以提高解的精确度.
2. 对于所讨论的问题或与之类似的问题, 本文级数的收敛速度高于 Blasius 级数和 Görtler 级数.
3. 根据新级数已知项所提供的信息和分离点的条件构造通项, 以此通项估计级数余项, 所得结果与 Curle 准确解基本一致. 这种方法似可考虑用于类似问题.
4. 本文以一个明显的例证说明文献 [4] 所提出的变换可以给边界层的研究和计算带来一定的好处.

本工作是在中国船舶工业总公司科技局的支持下进行的,曾得到吴耀祖教授的关心和指导,作者在此表示感谢.

参 考 文 献

- [1] Curle, N., *Rep. Memor. Aero. Res. Coun., Lond.*, 3164 (1960).
- [2] Rosenhead, L., *Laminar boundary Layer*, Oxford University Press (1963).
- [3] Curle, N., *J. Roy. Aero. Soc.*, 71(1967).
- [4] 刘钰, *力学学报*, 4 (1981).
- [5] Hori, Ei-ichi., *Bull. JSME*, 5, 18(1962).
- [6] Goldstein, S., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 26(1930).
- [7] Görtler, H., *J. Math. Mech.*, 6, 1(1957).

A NEW SERIES SOLUTION OF CURLE'S BOUNDARY LAYER

Liu Yu

(North-Western Polytechnical University)

Abstract

On the basis of the transformation of laminar boundary layer equations given in the author's previous paper[4], a new series solution of the Curle's boundary layer is derived in this paper. Compared with the well-known Blasius series and Görtler series, the new one consists of terms which can be expressed analytically and has improved convergence rate. By means of the information provided by the known terms of the series and the characteristic at separation point, an approximate representation of the remainder of the series by a common term is given. The skin friction factor calculated by the new series with it's residual terms estimated by this common term agrees well with the Curle's accurate solution.

This paper presents, in fact, an example to illustrate that the transformation given in [4] will perhaps lead to a new way for boundary layer research and computation.