

撕裂模中一类常微分方程边值问题的数值解法

官 野 马 腾 才

(西 南 物 理 所)

1. 基本方程和边界条件

为了分析电流分布对破裂的影响,找出能抑制破裂不稳定性的有利的电流分布,文献[1]需要对下述方程进行数值求解:

$$\frac{d}{dx} \left(x^3 \frac{dB(x)}{dx} \right) - \left\{ (m^2 - 1)x + \frac{mx^4 f'(x)}{[m - nq(x)]F(x)} \right\} B(x) = 0 \quad (1)$$

和边界条件 ($m \geq 2$):

$$\left. \begin{aligned} B(0) &= 0 \\ B(b) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

并由此计算 Δ 量^[2]:

$$\Delta = \left(\frac{dB_{II}}{dx} - \frac{dB_I}{dx} \right) \Big|_{x_i} / B(x_i) \quad (3)$$

式中的 $f(x)$ 是选取的电流分布:

$$f(x) = \begin{cases} 2[1 + (1.5x)^4]^{-3/4} & 0 \leq x \leq 0.7 \\ 1.1824851[1 - \exp(-10.920015(1-x)^2)] & 0.7 \leq x \leq 1 \\ 0 & 1 \leq x \leq b \end{cases} \quad (4)$$

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad q(x) = \frac{1}{2} q_A x^2 / F(x)$$

一撇表示求导数, b 是导体壳的小半径, q_A 是代表安全因子的常数, B_I 、 B_{II} 分别表示区域 $0 < x < x_i$ 和 $x_i < x < b$ 上方程(1)的解, x_i 为共振点, 满足共振条件:

$$m - nq(x_i) = 0$$

2. 数值解法

显然(1)和(2)式, 是带有两个奇点的二阶常微分方程的两点边值问题, 我们将其化为初值和边值问题拟合求解。为克服奇点带来的计算困难, 在奇点 $x = 0$ 和 $x = x_i$ 附近, 采用局部近似, 将方程简化, 从而得到解析解。在奇点 x_i 附近, 除给出解的解析表达式外, 还证明了计算 Δ 的一个等价公式。

1. 在 $x = 0$ 附近, 由

本文于 1981 年 1 月收到。

1) 撕裂模不稳定性的条件^[3-7]是 $\Delta > 0$ 。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^4 f'(x)}{(m^2 - 1)x[m - nq(x)]F(x)} = \frac{m}{m^2 - 1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[xf''(x) + 3f'(x)]}{mf(x) - nq_A} = 0$$

于是, 在 $x = 0$ 附近, (1) 式可简化成

$$x^3 \frac{d^2 B(x)}{dx^2} + 3x^2 \frac{dB(x)}{dx} - (m^2 - 1)x B(x) = 0 \quad (5)$$

通解 $B(x) = C_1 x^{m-1} + C_2 x^{-m-1}$, 利用条件(2)中 $B(0) = 0$, 知 $C_2 = 0$, 不妨取 $C_1 = 1$, 于是得 $B(x) = x^{m-1}$.

2. 正如在下面将看到的, 导数 B'_I 和 B'_{II} 在 x_i 处都有对数奇异性. 因此, 直接用(3)式计算 Δ 是有困难的. 这里采用计算 Δ 的一个等价公式:

$$\Delta = \frac{A_1 - A_2}{x_i B(x_i)} \quad (3')$$

式中的 A_1, A_2 是常数, 它们通过在计算机上算出 x_i 附近的值 B_I 和 B_{II} , 拟合后面将提到的解析表达式(7)和(8)来确定.

在 $x = x_i$ 附近, (1) 式的近似方程为:

$$\frac{d^2 B(y)}{dy^2} - \frac{K(x_i)}{y} B(y) = 0 \quad (6)$$

式中

$$y = \frac{x - x_i}{x_i}, \quad K(x_i) = - \frac{mx_i^2 f'(x_i)}{nq'(x_i)F(x_i)}$$

式(6)在 $y = 0$ 的邻域 $0 < |y| < R$ 内有两个正则解^[4]:

$$B_1(y) = y^{\rho_1} \sum_{n=0}^{\infty} C_n y^n \quad (C_0 \neq 0)$$

$$B_2(y) = g B_1(y) \ln |y| + y^{\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n y^n \quad (d_0 \neq 0)$$

这里的 C_n, d_n 和 g 是待定系数, ρ_1 和 ρ_2 是指标方程 $\rho(\rho - 1) + a_0 \rho + b_0 = 0$ 的两个根. 又因此时有关系式:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k = 0 \quad \text{和} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^k = -Ky$$

所以有 $a_0 = b_0 = 0$, 由指标方程得 $\rho_1 = 1$ 和 $\rho_2 = 0$, 于是, 式(6)的两个特解是:

$$B_s(y) = y \sum_{n=0}^{\infty} C_n y^n \quad (C_0 \neq 0)$$

$$B_r(y) = g B_s(y) \ln |y| + \sum_{n=0}^{\infty} d_n y^n \quad (d_0 \neq 0)$$

将它们代入(6)式, 比较系数得:

$$B_s(y) = y + \frac{1}{2} K y^2 + \frac{1}{12} K^2 y^3 + \frac{1}{144} K^3 y^4 + \frac{1}{2880} K^4 y^5 + \dots$$

$$B_r(y) = K B_s(y) \ln |y| + 1 - \frac{3}{4} K y^2 - \frac{14}{72} K^2 y^3 - \frac{35}{1728} K^3 y^4 - \frac{202}{172800} K^4 y^5 - \dots$$

因此,式(6)的解可写成:

$$B_I = B(x_i)B_s(y) + A_1 B_n(y) \quad (7)$$

$$B_{II} = B(x_i)B_s(y) + A_2 B_n(y) \quad (8)$$

由(7)和(8)式得:

$$A_2 - A_1 = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{B_{II} - B_I}{B_n}$$

所以,

$$\frac{A_2 - A_1}{x_i B(x_i)} = \frac{1}{x_i B(x_i)} \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{B'_{II} - B'_I}{B'_n} = \left(\frac{dB_{II}}{dx} - \frac{dB_I}{dx} \right) \Big|_{x_i} / B(x_i) = \Delta, \text{ 此即(3')式.}$$

综上所述,整个求解步骤是:

在 x_i 左边,在区域 $[0, x_0]$ 中,取 $B(x) = x^{m-1}$, 在区域 $[x_0, x_i - \sigma]$ 中,求解带有初值条件 $B(x_0) = \sigma_0^{m-1}$ 和 $B'(x_0) = (m-1)\sigma_0^{m-2}$ 的方程(1),再利用(7)式,就可确定值 $B(x_i)$ 和 A_1 .

在 x_i 右边,在区域 $[x_i, b]$ 中,求解带有边值条件: $B(x_i)$ 已知和 $B(b) = 0$ 的方程(1),这是二阶线性常微分方程的两点边值问题,可采用差分法,算出 $B(x_i + \sigma)$, 利用(8)式可确定 A_2 , 再利用(3')式就可确定值 Δ .

下面是 $m/n = 2/1$, $b = 1.2$, $q_A = 2.1$, $\sigma_0 = \sigma = 10^{-3}$ 时, Δ 的部分计算结果:

表 1

Δ 方案 \ σ	10^{-1}	1.1×10^{-1}	10^{-2}	1.1×10^{-2}	10^{-3}	1.1×10^{-3}	10^{-4}	1.1×10^{-4}
I	8.75	8.79	8.89	8.82	18.58	17.69	103.07	94.58
II	-1.95	-1.93	-2.07	-2.08	-0.944	-1.045	8.55	7.59
III	18.77	18.86	18.68	18.57	27.65	26.86	103.21	95.62

从表 1 看出, σ 在 10^{-3} 到 10^{-2} 的范围里取值时,得到稳定解 Δ .

表 1 中的方案 I 相应电流分布为(4)的情形, II 和 III 是相应图 1 的电流分布的情形.

II 和 III 分别对应的结果 $\Delta = -2.07 < 0$ 和 $\Delta = 18.68 > 0$, 与文献[1]定性分析所得到的结论一致.

为了进一步检验方法的可靠性,我们与解析解作比较.

电流分布取成图 2 形状,此时方程(1)变为:

$$\frac{d}{dx} \left(x^3 \frac{dB(x)}{dx} \right) - (m^2 - 1)x B(x) = 0 \quad (9)$$

边界条件是

$$\left. \begin{aligned} B(x \rightarrow 0) &\sim x^{m-1} \\ B(x = b, \text{ 或 } x \rightarrow \infty) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

各个区域之间解的对接条件是

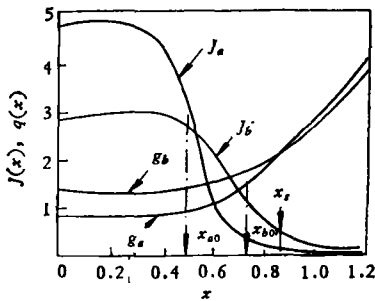


图1 电流密度的径向分布

$J = J_0[1 + (x/x_0)^2]^{-1/2}$, $x_s = 0.54$ ($q=2$ 的奇异面位置), $x_{s0} = 0.54$ (J_s 电流通道的宽度), $x_{b0} = 0.72$ (J_b 电流通道的宽度)

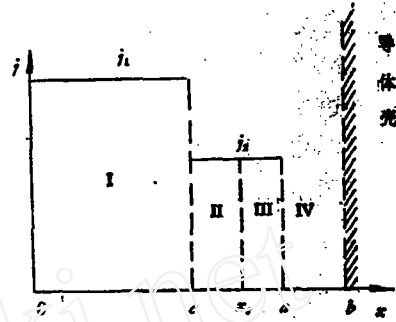


图2 电流的阶梯式分布

$$\left. \begin{aligned} B^I(c) &= B^{II}(c); \left[\left(\frac{dB}{dx} \right)_c^{II} - \left(\frac{dB}{dx} \right)_c^I \right] / B(c) = -\frac{2m(1-p)}{C(m-nq_c)} \\ B^{II}(x_s) &= B^{III}(x_s); \left[\left(\frac{dB}{dx} \right)_{x_s}^{III} - \left(\frac{dB}{dx} \right)_{x_s}^{II} \right] / B(x_s) = \Delta \\ B^{III}(a) &= B^{IV}(a); \left[\left(\frac{dB}{dx} \right)_a^{IV} - \left(\frac{dB}{dx} \right)_a^{III} \right] / B(a) = -\frac{2mpq_a}{aq_c(m-nq_a)} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

经过演算, 容易得到无导体壳(即 $b \rightarrow \infty$)时, Δ 的解析表达式:

$$\begin{aligned} -a\Delta &= \left\{ 1 - \frac{1-p}{m-nq_c} - \frac{q_ap}{q_c(m-nq_a)} \right\} \left\{ 1 - \frac{1-p}{m-nq_c} \left[1 - \left(\frac{c}{a} \right)^{2m} \right] \right\} / \\ &\quad \left\{ \frac{1}{2m} \frac{r_s}{a} \left\{ 1 - \frac{1-p}{m-nq_c} \left[1 - \left(\frac{c}{x_s} \right)^{2m} \right] \right\} \left[1 - \left(\frac{x_s}{a} \right)^{2m} \right] \right\} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{1 - \left(\frac{x_s}{a} \right)^{2m}} - \frac{q_ap}{q_c(m-nq_a)} \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $p = J_2/J_1$, $\left(\frac{x_s}{a} \right)^2 = \left(\frac{q_c - p}{\frac{n}{m}q_c - p} \right)$, $\left(\frac{c}{x_s} \right)^2 = \left(\frac{\frac{n}{m}q_c - p}{1-p} \right)$

在 $m/n = 2/1$, $q_c = 1.05$, $q_a = 2.1$, $p = 0.3$, $a = 1$ 时, (12) 式的解析解与本文方法计算结果的比较如下:

表 2

方 法	Δ 的 值
解 析 法	-12.1932811
本文方法	$\epsilon = 10^{-5}$ -12.1930225
	$\epsilon = 10^{-4}$ -12.1907360
	$\epsilon = 10^{-3}$ -12.1678471

当解在 x_s 处没有对数奇异性时, 从表 2 看出挖去的 ϵ 越小越逼近真解。但当解在 x 处有对数奇异性时, 挖去的 ϵ 受到限制。因为这时挖去的 ϵ 和选取的电流分布位形以及

耗散层宽度等因素有关。挖去的 σ 越小, 对数奇异性越强(对数奇异性还取决于计算机的字长), 给数值计算带来的困难越大。另一方面, 从物理问题本身看, 近似方程(6)的解是耗散层外边的解, 所以挖去的 σ 应与耗散层的宽度的量级大体相当。在我们的情况下, 耗散层宽度大约是 10^{-3} 的量级, 因此挖去的 σ 为 $10^{-3} \sim 10^{-2}$ 就得到了稳定解。

本工作得到曲文孝同志的帮助, 特此感谢。

参 考 文 献

- [1] 马腾才、宫野, 电流分布对破裂不稳定性的影响, 核聚变, 1(1981), 1—8.
- [2] Furth, H. P. et al., *Phys. Fluids*, 6 (1963), 459.
- [3] Furth, H. P. et al., *Phys. Fluids*, 16 (1973), 1054.
- [4] 王竹溪, 郭敦仁, 特殊函数论, 科学出版社(1965), 57—68.

A NUMERICAL METHOD FOR CALCULATING A KIND OF TWO-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN TEARING MODES

Gong Ye Ma Tengcai

(Southwestern Institute of Physics, China)

Abstract

A numerical method for calculating a kind of two-point boundary value problems with singularities in tearing modes is presented in this paper. Calculations are based on analytical representations of the approximate solution given in neighbouring regions of the singular points. Calculated results are in good agreement with that by analytical method.