

无限长带状收缩的磁流体力学 平衡和稳定

唐福林 薛明伦

(中国科学院力学研究所)

一、引言 由于拉长截面环形等离子体在实验中有较好的稳定性,因此不少受控理论工作者对它的磁流体力学平衡、稳定进行了研究。因其几何形态复杂,在过去的工作中都认为等离子体紧贴导体壁^[1,2],实际上在等离子体与导体壁之间总有一低密度区——“真空区”存在,本文的目的就是讨论这种自由边界等离子体的平衡、稳定性质。因为在带状收缩演化早期,本质上是一个一维问题^[3],其半高与半宽之比也很大,有的达10—14^[4],因此文中取一无限长的中空圆管作为高度拉长带状收缩的近似,并根据[4]中的实验结果,取等离子体环向电流密度 $j_\varphi = 2\pi r a + \frac{\mu}{4\pi r} b$,再按求得的平衡位形,用差分方法在 TQ-16 机上计算了有真空区存在时的不稳定性增长率及角向比压 β_φ 对不稳定性的影响,不稳定性增长率的量级为 10^5 1/s,和文献[2,5]的实验结果接近。

二、平衡 无限长带状收缩的各物理量在柱坐标中 $\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$ 。分别在等离子

体区和内外真空区 I、II 求平衡解。

1. 等离子体区 等离子体与真空交界的边界为 $r = r_a$ 和 $r = r_b$ 。作为高度拉长带状收缩的近似,在 (r, z) 平面,磁场和电流分别满足角向磁通守恒和总角向电流守恒。令 ψ 和 I 相应为角向磁通流函数和总角向电流流函数,且

$$2\pi r B_\varphi = \frac{d\psi}{dr}, \quad 2\pi r B_\varphi = \mu I \quad (1)$$

其中 B_φ 、 B_z 相应为环向、轴向磁感应强度, μ 为真空磁导率。

再用半径 r_b 及此处的磁感应强度 $B_{\varphi b}$ 、密度 ρ_b 来进行无量纲化,由压力平衡方程可得

$$\frac{d}{d\bar{r}} \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{\psi}}{d\bar{r}} \right) = -2\pi \left(2\pi \bar{r} \frac{d\bar{p}}{d\bar{\psi}} + \frac{1}{4\pi \bar{r}} \frac{d\bar{I}^2}{d\bar{\psi}} \right) \quad (2)$$

其中 $\bar{p}$ 为无量纲化的等离子体压力。

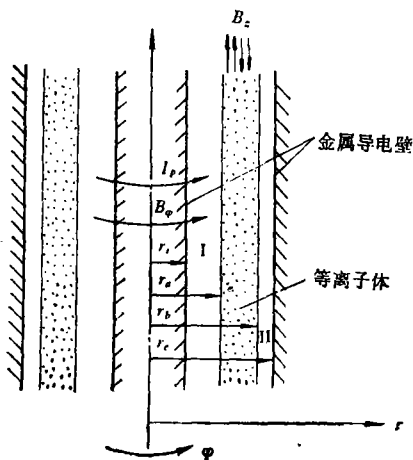


图1 无限长带状收缩简图

本文于1981年2月收到。

因 $j_\varphi = 2\pi\bar{r}a + \frac{1}{4\pi\bar{r}}b$, 故 $\frac{d\bar{p}}{d\bar{\phi}} = a$, $\frac{d\bar{I}^2}{d\bar{\phi}} = b$. 取等离子体内外边界处的 $\bar{\phi} = 0$, 由方程(2)解得

$$\bar{\phi} = -\frac{\pi^2 a \bar{r}^4}{2} - \frac{b \bar{r}^2}{2} \left(\frac{\ln \bar{r}}{2} - \frac{1}{4} \right) + \bar{C}_1 \bar{r}^2 + \bar{C}_2 \quad (3)$$

总角向电流 $\bar{I}_\text{总} = 2\pi$, 由无量纲化后的方程(1)可得

$$\bar{B}_z = -\pi a \bar{r}^2 - \frac{b}{4\pi} \ln \bar{r} + \frac{C_1}{\pi}, \quad \bar{B}_\varphi = \frac{1}{2\pi\bar{r}} \sqrt{\bar{I}_\text{总}^2 + b\bar{\phi}} \quad (4)$$

其中 $\bar{C}_1 = \frac{\pi^2 a}{2} (1 + \bar{r}_a^2) - \frac{b}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{\bar{r}_a^2 \cdot \ln \bar{r}_a}{1 - \bar{r}_a^2} \right)$, $\bar{C}_2 = \frac{\bar{r}_a^2}{2} \left[\frac{b \cdot \ln \bar{r}_a}{2(1 - \bar{r}_a^2)} - \pi^2 a \right]$ 由给定的单位高度等离子体总环向电流 $\bar{I}_p = \int_{\bar{r}_a}^1 j_\varphi d\bar{r}$ 和角向比压 $\beta_p = \frac{\hat{p}}{\bar{B}_{z\text{轴长平均}}^2/2} = \frac{\hat{p}}{\bar{I}_p^2/8}$, $\hat{p}$ 为截面平均压力, 可确定系数

$$\left. \begin{aligned} a &= f_3(\bar{r}_a, \beta_p) \cdot \bar{I}_p \\ b &= -\frac{4\pi}{\ln \bar{r}_a} [1 - \pi(1 - \bar{r}_a^2) \cdot f_3(\bar{r}_a, \beta_p)] \cdot \bar{I}_p \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中
$$f_3(\bar{r}_a, \beta_p) = \frac{-f_4(\bar{r}_a) \pm \sqrt{f_4^2(\bar{r}_a) + \frac{1}{2} \beta_p (1 - \bar{r}_a) \cdot f_3(\bar{r}_a)}}{2 \cdot f_3(\bar{r}_a)}$$

而
$$f_3(\bar{r}_a) = f_1(\bar{r}_a) + \frac{4\pi^2(1 - \bar{r}_a^2)}{\ln \bar{r}_a} \cdot f_2(\bar{r}_a), \quad f_4(\bar{r}_a) = -\frac{4\pi f_2(\bar{r}_a)}{\ln \bar{r}_a}$$

$$f_1(\bar{r}_a) = \frac{\pi^2}{3} \left[\frac{1 - \bar{r}_a^2}{5} + \bar{r}_a^2 (\bar{r}_a - 2) \right]$$

$$f_2(\bar{r}_a) = \frac{1}{12} \left[\frac{1}{3} + \bar{r}_a^2 \left(\ln \bar{r}_a - \frac{1}{3} \right) \right] + \frac{1 - \bar{r}_a^2}{24} - \frac{1 - \bar{r}_a^2}{12(1 - \bar{r}_a^2)} \left[\bar{r}_a^2 \left(\ln \bar{r}_a - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \right] + \frac{\bar{r}_a^2 \ln \bar{r}_a}{4(1 + \bar{r}_a)}$$

当等离子体内没有角向电流, 即 $b = 0$ 时

$$\beta_{p_0} = f_1(\bar{r}_a) \cdot \frac{8}{\pi^2(1 - \bar{r}_a^2)^2 \cdot (1 - \bar{r}_a)} \quad (6)$$

在等离子体内侧环向电流 j_φ 不为负时的最高角向比压

$$\beta_{p\text{max}} = \frac{8}{\pi(1 - \bar{r}_a)(2\bar{r}_a^2 \ln \bar{r}_a + 1 - \bar{r}_a^2)} \cdot \left\{ f_4(\bar{r}_a) + \frac{f_3(\bar{r}_a)}{\pi(2\bar{r}_a^2 \ln \bar{r}_a + 1 - \bar{r}_a^2)} \right\} \quad (7)$$

由(5)~(7)可知, 在 j_φ 为线性分布时, 平衡的特点是:

- (1) β_p 和 $\bar{r}_a$ 一定时, a 、 b 与 $\bar{I}_p$ 成线性关系;
- (2) β_{p_0} 和 $\beta_{p\text{max}}$ 都只是 $\bar{r}_a$ 的函数, 分布见图 2.

2. 真空区 $\bar{B}_{z\text{I}} = \bar{B}_{z\text{II}} = \text{常数}$, $\bar{B}_{z\text{I}} = \bar{B}_{z\text{II}} = \text{常数}$, $\bar{B}_{\varphi\text{I, II}} = \frac{1}{r}$, 下标 I、II 表明

在真空区 I、II 的值, 而 a 、 b 、 i 、 c 表明在 $\bar{r}$ 为 $\bar{r}_a$ 、1、 $\bar{r}_i$ 、 $\bar{r}_e$ 处的值.

三、局域稳定性 如等离子体是局域稳定的, 按 Suydam 准则, 要求

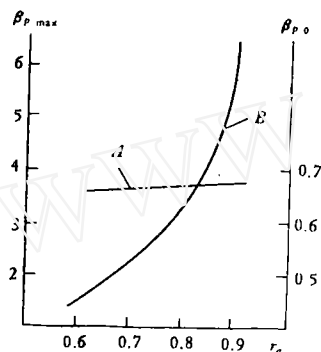


图2 A. $b=0$ 时,角向比压 $\beta_{p,0}$ 与半径 $\bar{r}_a$ 的关系;
B. $\bar{I}_p$ 不为负时的最高比压 $\beta_{p,max}$ 与半径 $\bar{r}_a$ 的关系

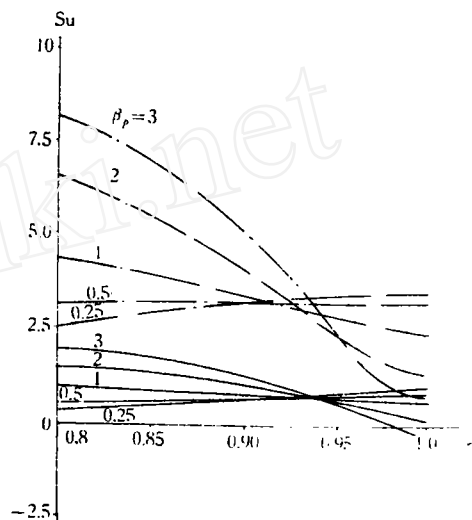


图3 数 Su 随半径 $\bar{r}$ 的分布
—— $\bar{I}_p = 0.1885$, - - - $\bar{I}_p = 0.377$

$$Su = \frac{\bar{r}}{8} \bar{B}_z^2 \left(\frac{M'}{M} \right)^2 + \frac{d\bar{p}}{d\bar{r}} > 0 \quad (8)$$

其中

$$M = \frac{\bar{B}_\varphi}{\bar{r} \bar{B}_z}, \quad M' = \frac{dM}{d\bar{r}}$$

其分布见图3. 当 $\bar{I}_p$ 的值不大时,随着 β_p 升高,等离子体中出现 $Su < 0$ 的区域,即局域不稳定,但随着 $\bar{I}_p$ 的增大, $Su < 0$ 的区域消失.

四、自由边界扭曲模 等离子体的扰动为 $\xi = \xi(\bar{r})e^{i(m\theta + \bar{k}z) + \bar{\omega}t}$, 在线性化近似下,径向扰动 $\xi_r(\bar{r})$ 的方程为

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\bar{r}} \left\{ \frac{\bar{\rho}\bar{\omega}^2(\nu\bar{p} + \bar{B}^2) + \nu\bar{p}A^2}{\Delta} \frac{\bar{\rho}\bar{\omega}^2 + A^2}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \eta \right\} \\ & + \left\{ -\frac{\bar{\rho}\bar{\omega}^2}{\bar{r}} - \frac{A^2}{\bar{r}} - \frac{d}{d\bar{r}} \left(\frac{\bar{B}_\varphi}{\bar{r}} \right)^2 + 4\bar{k}^2 \frac{\bar{B}_\varphi^2}{\bar{r}^3} \frac{\bar{\rho}\bar{\omega}^2\bar{B}^2 + \nu\bar{p}A^2}{\Delta} \right. \\ & \left. - \frac{d}{d\bar{r}} \left[\frac{\bar{\rho}\bar{\omega}^2(\nu\bar{p} + \bar{B}^2) + \nu\bar{p}A^2}{\Delta} \frac{2\bar{k}\bar{B}_\varphi D}{\bar{r}^2} \right] \right\} \eta = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

其中 ν 为定压比热与定容比热之比, $\eta = \bar{r}\xi_r(\bar{r})$

$$A = \frac{m}{\bar{r}} \bar{B}_\varphi + \bar{k}\bar{B}_z, \quad D = \frac{m}{\bar{r}} \bar{B}_z - \bar{k}\bar{B}_\varphi, \quad \bar{B}^2 = \bar{B}_z^2 + \bar{B}_\varphi^2$$

$$\Delta = \bar{\rho}\bar{\omega}^4 + \beta^2[\bar{\rho}\bar{\omega}^2(\bar{B}^2 + \nu\bar{p}) + \nu\bar{p}A^2], \quad \beta^2 = \frac{m^2}{\bar{r}^2} + \bar{k}^2$$

而(9)中的 $\bar{B}_z$, $\bar{B}_\varphi$, $\bar{p}$, $\bar{\rho}$ 等值均取自平衡解.

真空区 I、II 的扰动磁势 $\bar{\phi}_I$ 、 $\bar{\phi}_{II}$ 可由磁势的拉普拉斯方程及导电壁上法向磁场为零和等离子体与真空交界处法向磁场连续的条件解得

$$\bar{\phi}_{I,II} = C_{I,II} \{ K_m(\bar{k}\bar{r}) + M(\bar{r}_{i,e}) I_m(\bar{k}\bar{r}) \} \quad (10)$$

其中

$$M(\bar{r}_{ie}) = \frac{K_{m+1}(\bar{k}\bar{r}_{ie}) + K_{m-1}(\bar{k}\bar{r}_{ie})}{I_{m+1}(\bar{k}\bar{r}_{ie}) + I_{m-1}(\bar{k}\bar{r}_{ie})}$$

$$C_{1,3} = \frac{i \cdot 2\bar{\xi}_{a,b} \left[\frac{m}{\bar{r}_{a,b}} \bar{B}_{\varphi 1,11}(\bar{r}_{a,b}) + \bar{k} \bar{B}_{z1,11}(\bar{r}_{a,b}) \right]}{\bar{k} \{ M(\bar{r}_{e,i}) [I_{m+1}(\bar{k}\bar{r}_{a,b}) + I_{m-1}(\bar{k}\bar{r}_{a,b})] - K_{m+1}(\bar{k}\bar{r}_{a,b}) - K_{m-1}(\bar{k}\bar{r}_{a,b}) \}}$$

这里 $\bar{\xi}_{a,b}$ 相应为 $\bar{r} = \bar{r}_a$ 或 $\bar{r} = \bar{r}_b = 1$ 处的等离子体径向扰动 $\bar{\xi}_r(\bar{r})$, I_{m+1} , I_m , I_{m-1} , K_{m+1} , K_m , K_{m-1} 分别为 $(m+1)$ 阶, m 阶及 $(m-1)$ 阶的第一、二类修正贝塞尔函数.

由等离子体与真空交界处总压连续条件, 得

$$\frac{d\bar{\eta}}{d\bar{r}} \left\{ -\bar{B}^2 + \frac{D^2 [\bar{\rho} \bar{\omega}^2 (\bar{B}^2 + \nu \bar{p}) + \nu \bar{p} A^2]}{\Delta} \right\} \frac{K}{zz} + \left\{ \left[\frac{2\bar{k} D \bar{B}_\varphi (\bar{\rho} \bar{\omega}^2 \bar{B}^2 + \nu \bar{p} A^2)}{\Delta} + 2\bar{B}_\varphi^2 \right] \frac{K}{\bar{r} \cdot zz} + 1 \right\} \bar{\eta} = 0 \quad (11)$$

$$K = \bar{k} \{ M(\bar{r}) [I_{m+1}(\bar{k}\bar{r}) + I_{m-1}(\bar{k}\bar{r})] - K_{m+1}(\bar{k}\bar{r}) - K_{m-1}(\bar{k}\bar{r}) \}$$

$$zz = 2A^2 [K_m(\bar{k}\bar{r}) + M(\bar{r}) I_m(\bar{k}\bar{r})]$$

(11) 中所有参数都相应取 $\bar{r} = \bar{r}_a$ 或 $\bar{r} = 1$ 处的值, 而 $M(\bar{r})$ 则相应取 $M(\bar{r}_i)$ 或 $M(\bar{r}_e)$ 的值.

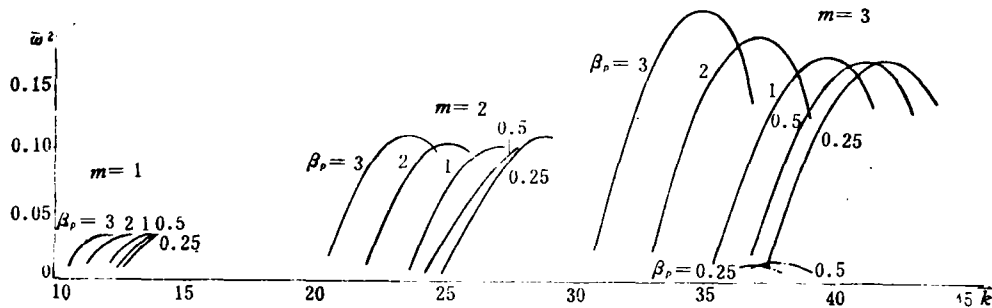


图 4 在不同的 m 数下, 不稳定性增长率 $\bar{\omega}^2$ 与轴向波数 $\bar{k}$ 的关系

$\bar{r}_a = 0.8$, $\bar{I}_p = 0.1885$, $B_0 = 2$ 韦/米², $r_0 = 1$ 米, — 自由边界, - - - 固定边界

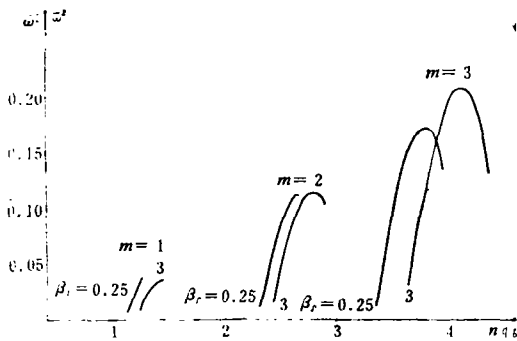


图 5 在不同的 m 数下, 不稳定性增长率 $\bar{\omega}^2$ 与安全因子 nq_b 的关系 (所取计算参数同图 4)

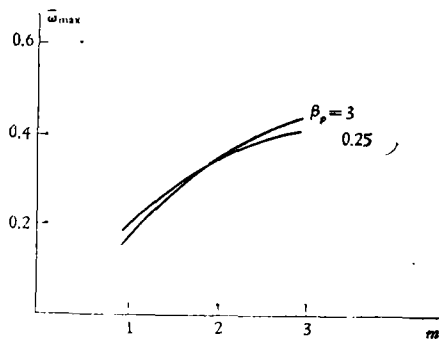


图 6 最高不稳定性增长率 $\bar{\omega}_{max}$ 与 m 数的关系 (所取计算参数同图 4)

这样,自由边界扭曲模不稳定性问题归结为方程(9)及边界条件(11)的本征值问题.由于这时 ω^2 以复杂的形式进入方程,故为了求得不稳定性增长率,将方程(9)及边界条件(11)化为中心差分,并对 ω^2 进行 $\omega^2 = (1-x)/x$ 的转换,然后在 x 为 $[0,1]$ 用对分区间套法求得最不稳定的增长率 ω^2 .

当 $\bar{r}_i = \bar{r}_a$, $\bar{r}_e = 1$ 时 $K = 0$,边界条件退化为 $\bar{\xi}_a = 0$, $\bar{\xi}_b = 0$,即由自由边界问题退化至固定边界问题.

不稳定性增长率 ω^2 的计算结果见图4、5、6.

五、几点讨论 在以上的平衡分析中,根据给定的 $\bar{I}_p$ 和 β_p 直接求得等离子体的平衡解.其结果与[6]一致,但方法较[6]简单,并不受 $(r_b - r_a)/\frac{1}{2}(r_a + r_b)$ 值的限制.

在求自由边界扭曲模的增长率时,由于对 β_p 、 m 及 $\bar{k}$ 等的值未作限制,因此在此计算方法中可扩大讨论范围.由计算得出的,在一定的 m 数下, ω^2 随 $\bar{k}$ 的变化规律以及当 m 数增大时, $\omega_{\max}^2$ 渐近地趋向一定值,均与[2]一致,但由于用解析方法求得了边界条件(11),因此只需求解等离子体中的扰动方程,缩小了计算区域,减少了计算工作量.此外由计算还可得出

1. 角向比压 β_p 对 ω^2 的影响随 m 数的增大而使 ω^2 略有增加;

2. 在不同的 m 数下,随着 β_p 的增加,不稳定出现范围向 $\bar{k}$ 及 $nq_b = \bar{k}\bar{B}_{zb}\bar{r}_b/\bar{B}_{\phi b}$ 的增大方向偏移,但范围的宽度无甚变化;

3. 在此种位形中,不稳定性出现的范围不是如[7]中指出的那样为 $m-1 + \left(\frac{r_b}{r_c}\right)^{2m} < nq_b < m$,而是向 nq_b 增大的方向偏移,如 $m=3$, $\beta_p=3$ 时,不稳定性出现范围为 $3.6 < nq_b < 4.3$.

参 考 文 献

- [1] Schneider, W., Bateman, G., Nuclear Fusion Research (Proc. 5th Int. Conf. Tokyo, 1974), IAEA, Vienna, 1 (1975), 429.
- [2] Hofmann, F., Appert, K., Gruber, R., Nuclear Fusion, 16 (1976), 337.
- [3] Hofmann, F., Nuclear Fusion, 13 (1973), 297.
- [4] Becker, G., Eberhagen, A., Gruber, O., Herold, H., Peiry, J. M., Rohr, H., Wilhelm, R., Zwicker, M., Nuclear Fusion Research (Proc. 5th Int. Conf. Tokyo, 1974), IAEA, Vienna, 9 (1975), 47.
- [5] Becker, G., Lackner, K., Nuclear Fusion, 17 (1977), 903.
- [6] Becker, G., Nuclear Fusion, 18 (1978), 9.
- [7] Шафранов, В. Д., ЖТФ, 40(1970), 241.

THE MHD EQUILIBRIUM AND INSTABILITY OF INFINITELY LONG BELT-PINCH

Tang Fulin Xue Minglun

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

In this paper the highly elongated belt-pinch is taken as an infinitely long tubular under the conditions that both the poloidal magnetic flux and current are conservative in plasma. The poloidal plasma current density is described by $j_{\phi} = 2\pi r a + \frac{\mu}{4\pi r} b$

Equilibrium relations are derived analytically. For given m the instability growth rate ω calculations are performed, and the effect of the poloidal beta β_p is considered when the plasma is surrounded by vacuum. When $\bar{k}$ is varied at a fixed m , the growth rate runs through a maximum. The maximum growth rate increases with increasing m and the poloidal beta β_p has a little influence on maximum growth rate. The order of the calculated ω is 10^5 1/sec which is consistent with experimental findings.