汇流的周向不稳定性

——汇流成涡机理

张 涤 明
(中 山 大 学)

提要 1. 研究了轴对称汇流的周向稳定性,得到了稳定性的频散关系.

2. 在汇流周向不稳定性研究的基础上，对汇流成涡的机理提出了不同见解,得到汇流周向失稳的临界雷诺数.

汇流在流至中心出口处时形成旋涡(俗称浴盆涡)的现象，Sibulkin[1] 在 1962 年，D. L. Kelly[2] 等在 1964 年进行过实验,分析过形成涡流的原因,1979 年上海交通大学杨文熊同志[3]也进行了实验,还提出了理论的计算.

汇流中心成涡的问题实际上是一个汇流周向不稳定性的问题. 本文对轴对称汇流的周向不稳定性作了计算,结论与文 [3] 有所不同. 在理论计算的基础上,我们分析了汇流成涡的机理,提出汇流成涡必须具备两个条件,这是和以前的分析所不同的. 此外，在基本方程的推导中，我们得到结论：汇流的周向稳定性独立于径向和轴向稳定性，与之无关,而径向和轴向稳定性却是互相关联,耦合在一起的. 对于汇流径向与轴向稳定性的求解,我们将另行提出.

1. 汇流稳定性的基本方程　设 r, φ, z 分别表示圆柱坐标系的径向，周向和轴向坐标，V_r, V_φ, V_z 分别表示相应方向的流动速度分量. 设流体不可压,不计重力，流动轴对称. 我们研究定常径向流动的稳定性,主流定常,径向,设速度分量为 $U(r, z)$，则有

$$V_r = U + V'_r,\quad V_\varphi = V'_\varphi,\quad V_z = V'_z,\quad p = \bar{p} + p'$$

其中带一撇的量为扰动量. 将它们代入 Navier-Stokes 方程,考虑到主流本身满足方程

$$U\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} = 0 \tag{2}$$

于是经线性化后,得扰动量满足的方程为

$$\frac{\partial V'_r}{\partial t} + U\frac{\partial V'_r}{\partial r} + V'_r\frac{\partial U}{\partial r} + V'_z\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 V'_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V'_r}{\partial r} - \frac{V'_r}{r^2} + \frac{\partial^2 V'_r}{\partial z^2}\right) \tag{3.1}$$

本文于1981年4月22日收到.

$$\frac{\partial V'_\varphi}{\partial t}+U\frac{\partial V'_\varphi}{\partial r}+\frac{UV'_\varphi}{r}=\nu\left(\frac{\partial^2 V'_\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V'_\varphi}{\partial r}-\frac{V'_\varphi}{r^2}+\frac{\partial^2 V'_\varphi}{\partial z^2}\right) \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t}+U\frac{\partial V'_z}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 V'_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V'_z}{\partial r}+\frac{\partial^2 V'_z}{\partial z^2}\right) \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial V'_r}{\partial r}+\frac{V'_r}{r}+\frac{\partial V'_z}{\partial z}=0 \tag{3.4}$$

在上述式子中,扰动速度分量独立地取决于方程(3.2),可见周向稳定性与径向和轴向的稳定性无关,周向稳定性的问题是单独求解的.

由(2)式有

$$U=\frac{u(z)}{r}$$

将它代入(3.2),并为方便起见,略去各扰动量记号上的一撇,只须记住此后不带撇的量是代表扰动量就是,得到

$$\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2}+\left(1-\frac{u}{\nu}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial r}-\left(1+\frac{u}{\nu}\right)\frac{V_\varphi}{r^2}=\frac{1}{\nu}\frac{\partial V_\varphi}{\partial t} \tag{4}$$

令

$$V_\varphi=\hat{V}(r,z)e^{-\sigma t}$$

(4)式变为:

$$\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial r^2}+\left(1-\frac{u}{\nu}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial \hat{V}}{\partial r}-\left(1+\frac{u}{\nu}\right)\frac{\hat{V}}{r^2}=-\frac{\sigma}{\nu}\hat{V} \tag{5}$$

方程(4)或(5)就是轴对称汇流周向稳定性的基本方程.记住其中 u 只是 z 的函数.

径向稳定性和轴向稳定性相互关联,耦合在一起.由连续性方程(3.4),引进流函数 ψ,速度分量(已略去记号上的一撇)

$$V_r=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(r\psi),\quad V_z=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\psi) \tag{6}$$

将(6)式分别代入(3.1)和(3.2)式,然后令

$$\psi=-i\hat{\psi}(r)e^{(\sigma t+i\lambda z)}$$

并由两式消去压力 p,得到

$$(L-\lambda^2)^2\hat{\psi}=\frac{\sigma}{\nu}\frac{d\hat{\psi}}{dr}-\frac{\sigma}{\nu}\lambda^2\hat{\psi}-\frac{\sigma}{r^2}\hat{\psi}+\frac{C}{r} \tag{7}$$

其中

$$L=\frac{d}{dr}\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right),\quad C=rU \text{ 假设为常数.}$$

这就是汇流径向和轴向稳定性的基本方程.

2. 轴向均匀径向汇流的周向稳定性 考虑汇流沿轴向均匀,那么 $u=rU$ 是常数,设为 $u=-C$,于是方程(5)变为

$$\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial r^2}+\left(\frac{C}{\nu}+1\right)\frac{1}{r}\frac{\partial \hat{V}}{\partial r}+\left(\frac{C}{\nu}-1\right)\frac{\hat{V}}{r^2}=-\frac{\sigma}{\nu} \tag{8}$$

这可以分离变量,设

$$\hat{V}(r, z) = F(r) \cdot G(z)$$

则得:

$$\frac{d^2G}{dz^2} + \lambda^2 G = 0 \tag{9}$$

和

$$\frac{d^2F}{dr^2} + (\tilde{C} + 1)\frac{1}{r}\frac{dF}{dr} + (\tilde{C} - 1)\frac{F}{r^2} + (\tilde{\sigma} - \lambda^2)F = 0 \tag{10}$$

其中

$$\tilde{C} = \frac{C}{\nu}, \quad \tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\nu}.$$

方程(9)的解为

$$G = A\sin(\lambda z + \varepsilon) \tag{11}$$

作变换

$$F = r^{-\frac{\tilde{C}}{2}} f$$

方程(10)变为

$$\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr} + \left(K - \frac{m^2}{r^2}\right) f = 0 \tag{12}$$

其中

$$K = \tilde{\sigma} - \lambda^2, \quad m = \frac{1}{2}(\tilde{C} - 2) \tag{13}$$

这里有两种情况,一是 $K = \tilde{\sigma} - \lambda^2 > 0$ 的情况,一是 $K = \tilde{\sigma} - \lambda^2 < 0$ 的情况.

1) $K > 0$. 在此情况下,设 $K = k^2$, 则方程(12)为

$$\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) f = 0 \tag{12.1}$$

这是一个以 kr 为宗量的 m 阶贝塞尔方程. 因 $\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\nu} > \lambda^2 > 0$, 故 $\sigma > 0$, 所以流动是稳定的. 这时方程(12.1)的求解是一个特征问题, 欲方程有非平凡解,则必须

$$J_m(kr_0)Y_m(\alpha k r_0) - Y_m(kr_0)J_m(\alpha k r_0) = 0 \tag{14}$$

其中 J_m 和 Y_m 分别为 m 阶的贝塞尔函数和诺尔曼函数, r_0 取为出流小孔的半径, αr_0 为外边界圆的半径. (14) 式的零点是无限多的,为

$$(kr_0)_n = \beta + \frac{p}{\beta} + \frac{q - p^2}{\beta^3} + \frac{s - 4pq + 2p^2}{\beta^5} + \cdots \tag{15}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &\beta = \frac{n\pi}{\alpha - 1}, \quad p = \frac{4m^2 - 1}{8\alpha}, \quad q = \frac{(m-1)(m-25)(\alpha^3 - 1)}{6(4\alpha)^3(\alpha - 1)}, \\ &S = \frac{(4m^2 - 1)(16m^4 - 456m^2 + 1070)(\alpha^5 - 1)}{5(4\alpha)^5(\alpha - 1)}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

如果只取前两项,则有

$$k_n r_0 = \frac{n\pi}{\alpha - 1} + \frac{(4m^2 - 1)\alpha - 1}{8n\pi\alpha} \tag{17}$$

由于外边界圆的半径应该取得充分大，故 α 很大，因此

$$k_n \doteq \frac{1}{r_0}\frac{4m^2-1}{8n\pi}$$

而

$$k_n = \sqrt{\tilde{\sigma}_n - \lambda^2} = \sqrt{\frac{\sigma_n}{\nu} - \lambda^2}$$

所以

$$\sigma_n \doteq \nu\lambda^2 + \frac{(C-\nu)^2(C-3\nu)^2}{64n^2\pi^2 r_0^2} > 0 \tag{18}$$

这就是 $K>0$ 稳定汇流的频散关系.

2) $K<0$. 在此情况下，设 $K=-k^2$，方程(12)变为

$$\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2}\right)f = 0 \tag{12.2}$$

这是一个 m 阶的虚宗量贝塞尔方程. 考虑到当 $r\to\infty$ 时 $f=0$，其解为

$$f = BK_m(kr) \tag{19}$$

K_m 为第二类虚宗量贝塞尔函数，B 为任意常数. 假设在中心出流孔上有一个旋涡，并在旋涡面 $r=r_0$ 上有 $f=\delta$，则

$$K_m(kr_0) = \frac{\delta}{B} = \delta_0.$$

考虑 kr_0 很小，

$$K_m(kr_0) \doteq \frac{2^{\frac{1}{2}(\tilde{C}-2)^{-1}}\Gamma(m)}{(kr_0)^m},$$

得到

$$k^2 = -\frac{\sigma}{\nu} + \lambda^2 \doteq \frac{1}{r_0^2e^2}(256\pi\delta_0^2)^{\frac{2}{\tilde{C}-2}}(\tilde{C}-2)^2(\tilde{C}-2)^{-\frac{2}{\tilde{C}-2}} \tag{20}$$

在 $\tilde{C}=\dfrac{C}{\nu}$ 很大而 δ_0 很小的情形下，因 $(256\pi\delta_0^2)^{\frac{2}{\tilde{C}-2}} \doteq 1$ 和 $(\tilde{C}-2)^{-\frac{2}{\tilde{C}-2}} \doteq 1$

我们有

$$\frac{\sigma}{\nu} \doteq \lambda^2 - \frac{1}{r_0^2e^2}(\tilde{C}-2)^2 \tag{21}$$

由此得出:

当 $\tilde{C} < 2 + r_0e\lambda$ 时 $\sigma>0$，流动稳定；

当 $\tilde{C} > 2 + r_0e\lambda$ 时 $\sigma<0$，流动不稳定.

其临界值为

$$\tilde{C}_0 = 2 + r_0e\lambda, \quad e = 2.718281\cdots \tag{22}$$

如果在轴向流体的深度为 h，并且一端 $z=0$ 为固体边界，另一端 $z=h$ 为自由表面边界. 在固体边界上 $\hat{V}=0$，在自由表面边界上 $\dfrac{\partial\hat{V}}{\partial z}=0$，于是由(11)式得

$$\lambda = \frac{(2n-1)\pi}{2h} \tag{23}$$

设出流的体积流量为 Q，则有 $\tilde{C}=\dfrac{Q}{2\pi\nu h}=\dfrac{\mathrm{Re}}{2\pi}$，其中 $\mathrm{Re}=\dfrac{Q}{\nu h}$ 为雷诺数. 由(22)

式，得临界雷诺数

$$\mathrm{Re}_0 = 4\pi + 2\pi r_0 e \lambda \tag{24}$$

在流体为 h 深度的情况下，λ 由(23)式确定，临界雷诺数为

$$\mathrm{Re}_0 = 4\pi + \frac{(2n-1)\pi^2 r_0 e}{h} \tag{25}$$

这不同于文[3]的结果.

引进雷诺数后，上述稳定性的结论可叙述为：当 $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_0$ 时，流动稳定；当 $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_0$ 时流动不稳定.

例：设 $h = 1\,\mathrm{cm}$，$r_0 = 0.25\,\mathrm{cm}$，则 $n = 1$ 时的最小临界雷诺数为 $\mathrm{Re}_0 = 4\pi + 0.25\pi^2 e = 19.24$，$n = 2$ 时的临界雷诺数为 $\mathrm{Re}_0 = 32.69$. $n = 2$ 的这个结果与文[3]的实验一致.

3. 汇流成涡的条件　由上面的分析，我们看到这样一个事实，如果汇流中心处原来没有旋涡，那么在 $r = r_0$ 的圆柱面上 $f = 0$，而虚宗量贝塞尔函数没有零点，它不可能满足那样的边界条件，所以这时 f 的解只能是实宗量贝塞尔函数. 如上节情况 1) 所证，这时流动肯定是稳定的. 如果汇流中心处本来存在有旋涡(不管如何微弱)，那么当流动达到或超过临界雷诺数时，径向汇流将出现周向失稳，使中心处的旋涡得以加强而形成涡流. 因此，十分清楚，汇流成涡必须具备两个条件：1)，流动的雷诺数超过临界雷诺数；2)、汇流中心处要有一个涡流扰动(那怕是非常之微弱). 对于后一个条件，我们注意到，在文[1]，[2]的实验中，在中心处或其附近插入了一根管子，而在文[3]的实验中，中心处放置了一个浮子，于是形成绕流，我们知道，绕流是会产生旋涡的，所以这实际上都是给予了中心涡流的扰动. 自然界很多汇流都容易找到产生涡流的扰动.

参　考　文　献

[1] Sibulkin. M., *Journal of Fluid Mechanics*, **14** (1962), 21.
[2] Kelly, D. L., Martin, B. V., Taylor, E. S., *Journal of Fluid Mechanics*, **19** (1964), 539.
[3] 杨文熊：上海交通大学学报，1，(1979)，40.

INSTABILITY OF A SINK FLOW IN THE CIRCULAR DIRECTION —— THE MECHAMISM FOR CREATING A SINK VORTEX

Zhang Diming
(*Zhongshan University, China*)

Abstract

The stability of axisymmetric sink in circular direction was studied. Based on the study for instability of a sink flow in circular direction, an idea different from that which has been advanced by previous authors on the mechanism for creating a sink vortex was proposed.