

固定式厚管板的弯曲问题

刘 人 怀

(中国科学技术大学近代力学系)

提要 本文应用 E. Reissner 的厚板理论对高压固定式热交换器管板的弯曲问题进行了研究,给出了厚管板在固定和简支两种边界条件下的应力和挠度的解析公式。由实例说明,理论值与试验值相当符合。本文公式可供厚管板设计时参考。

一、引 言

在化学、石油、石油化学、原子能、动力及其它许多工业部门中,固定式热交换器占有很重要的地位,而管板是热交换器的关键部件,它一直为研究者所注意。迄今所发表的基于薄板理论方面的工作,对中、低压热交换器的管板设计说来,是有实际意义的。但近年来,工业部门大量采用高压固定式热交换器。这种热交换器的管板厚度变得很大,已超出薄板理论研究范围。可是,由于厚管板问题比较复杂,因此研究的人较少,使得至今尚未得到一个能供工程设计应用的公式。因此,工程上不得不借用薄管板的公式进行粗略设计。显然,这是不合理的。

1970 年以来,上海锅炉厂^[1]等单位先后两次对厚管板进行试验研究,但未进行理论分析。1974 年,Мельников^[2]从理论上研究了厚管板,由于考虑管子对管板的影响不够,所以解决问题不够全面。此外,在 1970 年前后,Slot^[3,4]还对另一类型,即 U 型管热交换器厚管板的热应力问题作过理论和实验研究,但未接触更重要的本类型的厚管板问题。

本文采用 Reissner^[5-8]的厚板理论,足够精确地求解了厚管板的轴对称弯曲问题,为工程设计提供了可靠的理论公式。

二、厚管板的基本方程

因为热交换器结构相当复杂,所以要使厚管板的分析计算易于进行,就必须采用一些简化措施。考虑到厚管板(其几何尺寸、坐标及弯矩、剪力、挠度的正方向示于图 1 中)的弯曲特性在某些方面与薄管板相似,所以,我们参照对薄管板的处理^[9-11],对厚管板采用下列假定:

(1) 用一无孔的厚圆板来替代开孔的厚管板,在替代时考虑了开孔对板的刚度和强度的削弱。于是,在厚圆板上作用的有效压力为

$$q = f_1 q_1 - f_2 q_2 \quad (1)$$

本文于 1979 年 11 月收到。

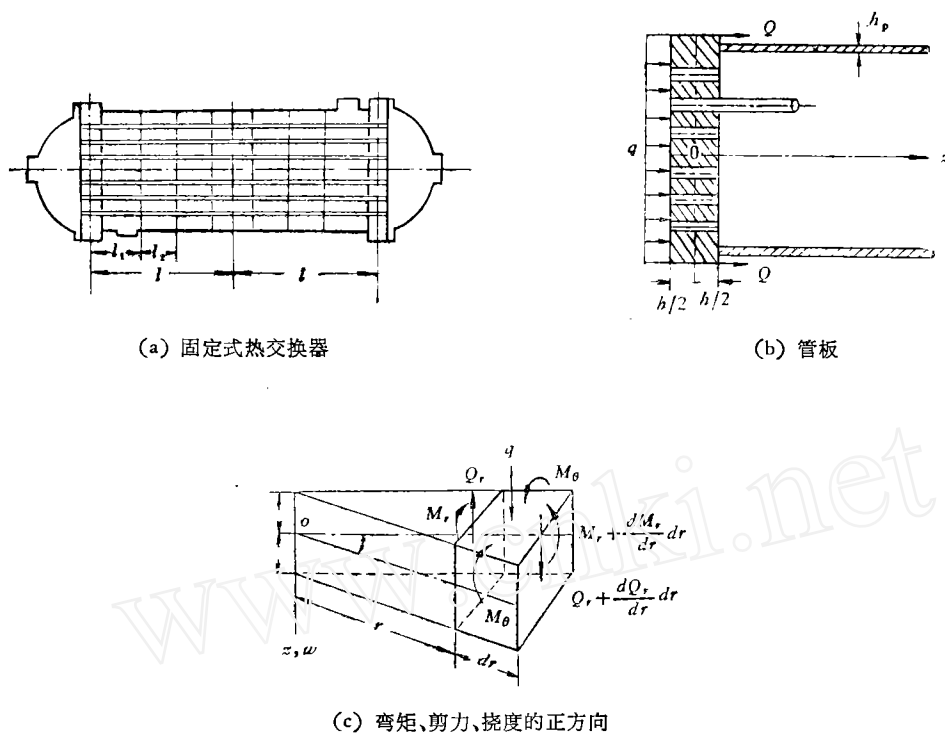


图 1

其中

$$f_1 = 1 - n \left(\frac{d_1}{d} \right)^2, \quad f_2 = 1 - n \left(\frac{d_2}{d} \right)^2 \quad (2)$$

设无孔厚圆板的弯曲刚度为 D_0 , 径向和切向弯曲应力为 $\sigma_{r,0}$ 、 $\sigma_{\theta,0}$, 横向剪应力为 $\tau_{rz,0}$, 则厚管板的弯曲刚度和应力为

$$\left. \begin{aligned} D &= \phi D_0 = \phi \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}, \\ \sigma_r &= \frac{\sigma_{r,0}}{\eta}, \quad \sigma_\theta = \frac{\sigma_{\theta,0}}{\eta}, \quad \tau_{rz} = \frac{\tau_{rz,0}}{\eta} \end{aligned} \right\} \quad (3a-d)$$

这里, 开孔对管板弯曲刚度的影响系数 ϕ 可按文献[11]的实验公式定出, 而由开孔引起的应力减弱系数 η 则可简单地按平均应力概念给出, 亦即

$$\phi = \frac{2}{f_1^3}, \quad \eta = f_2 \quad (4)$$

(2) 把密集、均匀分布在管板上的管束视为连续弹性基础, 则管板成为弹性基础上的厚圆板。于是, 由板的挠度以及筒体与管束存在温差的关系, 在厚圆板上将有基础反作用力作用, 其强度为

$$k_1(w + \delta - \delta_p) \quad (5)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{nE_r(d_2^2 - d_1^2)}{d^2 l} \\ \delta &= \frac{1}{2} \int_0^{2l} [\alpha_r(t_r - t_0) - \alpha_p(t_p - t_0)] dz \\ \delta_p &= \frac{Ql}{E_p h_p} \end{aligned} \right\} \quad (6a-c)$$

(3) 把管束弯曲而在管板上产生的反力矩视为连续分布, 并且考虑折流板对管子弯曲的限制作用. 于是, 在厚圆板上将作用有管束的反力矩, 其强度为

$$m = k_2 \varphi_r \quad (7)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} k_2 &= \frac{4nE_r J_r K_s}{\pi d^2 l_1} \\ J_r &= \frac{\pi}{64} (d_2^4 - d_1^4) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

至于管子弯曲系数 K_s (下角标符号 s 表示折流板的数目) 的计算公式, 则由材料力学连续梁的公式导出:

$$\left. \begin{aligned} K_0 &= 2, \\ K_1 &= 4, \\ K_2 &= \frac{4(l_1 + 3l_2/2)}{l_1 + 2l_2}, \\ K_3 &= \frac{4(l_1 + 3l_2/4)}{l_1 + l_2}, \\ &\dots \dots \\ K_s &= \frac{4(a_s l_1 + b_s l_2)}{c_s l_1 + d_s l_2}, \\ K_{s+2} &= \frac{4[(a_s + b_s)l_1 + 3(c_s + d_s)/4l_2]}{(a_s + b_s)l_1 + (c_s + d_s)l_2} \quad s=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

应该指出, 在 $s > 10$ 时, K_s 的值用 K_{10} 代替计算即可, 此时能准确到五位有效数字以上.

(4) 认为管子、筒体的温度沿 z 轴方向呈线性变化, 对于它们的某一截面的温度则以其内外壁温度的平均值近似代替. 于是

$$t_r(p) = \frac{t_2 - t_1}{2l} z + t_1 \quad (10)$$

在上述假定下, 我们按照 Reissner^[5-8] 的厚板理论, 经过简单的推导, 便得到厚管板所满足的基本方程组:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} &= Q_r + m \\ \frac{d(rQ_r)}{dr} &= r[k_1(w + \delta - \delta_p) - q] \\ M_r &= D \left\{ \frac{d\varphi_r}{dr} + \frac{\nu}{r} \varphi_r + \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} [q - k_1(w + \delta - \delta_p)] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (11a-e)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{\theta} &= D \left\{ \frac{\varphi_r}{r} + \nu \frac{d\varphi_r}{dr} + \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} [q - k_1(w + \delta - \delta_p)] \right\} \\ \varphi_r &= \frac{12(1+\nu)}{5Eh} Q_r - \frac{dw}{dr} \end{aligned} \right\}$$

现在, 我们有方程(11), 共有五个未知量: 挠度 w , 径向和切向弯矩 M_r 、 M_{θ} , 剪力 Q_r 和转角 φ_r , 故是可解的。

下面, 我们化简方程组(11)。这组方程可以缩减为关于挠度 w 的一个高阶微分方程。先将方程(11c)代入方程(11d), 并应用方程(11b), 使得

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left\{ \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} - \frac{12(1-\nu^2)}{5Eh} \frac{dQ_r}{dr} \right. \\ &\quad \left. - \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} [k_1(w + \delta - \delta_p) - q] \right\} \\ M_{\theta} &= -D \left\{ \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{12(1-\nu^2)}{5Eh} \frac{Q_r}{r} \right. \\ &\quad \left. - \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} [k_1(w + \delta - \delta_p) - q] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

然后, 将式(12)代入平衡方程(11a), 并应用方程(11b), 又得

$$\begin{aligned} &\frac{6(1-\nu^2)}{5Eh} \left(\nabla^2 Q_r + \frac{2}{r} \frac{dQ_r}{dr} + \frac{Q_r}{r^2} \right) - \frac{Q_r}{D} = \frac{d}{dr} (\nabla^2 w) \\ &\quad - \frac{6(1+\nu)}{5Eh} \frac{d}{dr} [k_1(w + \delta - \delta_p) - q] \\ &\quad + \frac{12(1-\nu^2)}{5Eh} \frac{1}{r} [k_1(w + \delta - \delta_p) - q] + \frac{m}{D} \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \quad (14)$$

最后, 应用平衡方程(11b)和式(7), 我们便由方程(13)得到关于挠度 w 的四阶变系数常微分方程:

$$\begin{aligned} D \nabla^4 w - k_2 \nabla^2 w - \beta_1 \phi h^2 \nabla^2 [k_1(w + \delta - \delta_p) - q] + \left[\frac{12k_2(1+\nu)}{5Eh} + 1 \right] \\ [k_1(w + \delta - \delta_p) - q] = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$\nabla^4 = (\nabla^2)^2 \quad (16)$$

$$\beta_1 = \frac{2-\nu}{10(1-\nu)} \quad (17)$$

下面, 我们致力于求解方程(15)。在求解此方程时, 将考虑两种边界条件:

(1) 固定边界条件

$$\text{当 } r = \frac{d}{2} \text{ 时, } w = 0, \varphi_r = 0 \quad (18)$$

(2) 简支边界条件

$$\text{当 } r = \frac{d}{2} \text{ 时, } w = 0, M_r = 0 \quad (19)$$

为求解简单起见,引入新自变量

$$x = \omega_0 r \quad (20)$$

其中

$$\omega_0 = \sqrt[4]{\frac{k_1(\omega_1 k_2 + 1)}{D}}, \quad \omega_1 = \frac{12(1 + \nu)}{5Eh} \quad (21)$$

则方程(15)简化成为下面形式:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{2}{x} \frac{d^3 w}{dx^3} - \left(\frac{1}{x^2} - 2\rho \right) \frac{d^2 w}{dx^2} + \left(\frac{1}{x^3} + \frac{2\rho}{x} \right) \frac{dw}{dx} + w = \frac{q}{k_1} - (\delta - \delta_p) \quad (22)$$

其中

$$2\rho = \frac{\omega_2}{D\omega_0^2}, \quad \omega_2 = -(\beta_1\omega_3 + k_2), \quad \omega_3 = \psi k_1 h^2 \quad (23)$$

而边界条件(18)和(19)成为

(1) 固定边界条件

$$\text{当 } x = \frac{1}{2} \omega_0 d = x_1 \text{ 时, } w = 0, \varphi_r = 0 \quad (24)$$

(2) 简支边界条件

$$\text{当 } x = x_1 \text{ 时, } w = 0, M_r = 0 \quad (25)$$

最后,由方程(11b)、(12)、(13),我们得到弯矩、剪力、转角和 x 的关系式:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \frac{\omega_3}{5x} \frac{d^3 w}{dx^3} + \left(\frac{\omega_3}{5x^2} - D\omega_0^2 \right) \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{1}{x} \left[\frac{\omega_3}{5} \left(\frac{1}{x^2} - 2\rho \right) + \nu D\omega_0^2 \right] \\ &\quad \cdot \frac{dw}{dx} + \beta_1 \omega_3 \left(w + \delta - \delta_p - \frac{q}{k_1} \right) \\ M_\theta &= - \left\{ \frac{\omega_3}{5x} \frac{d^3 w}{dx^3} + \left(\frac{\omega_3}{5x^2} + \nu D\omega_0^2 \right) \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{1}{x} \left[\frac{\omega_3}{5} \left(\frac{1}{x^2} - 2\rho \right) - D\omega_0^2 \right] \right. \\ &\quad \cdot \left. \frac{dw}{dx} - \beta_2 \omega_3 \left(w + \delta - \delta_p - \frac{q}{k_1} \right) \right\} \\ Q_r &= - \frac{k_1}{\omega_0} \left[\frac{d^3 w}{dx^3} + \frac{1}{x} \frac{d^2 w}{dx^2} - \left(\frac{1}{x^2} - 2\rho \right) \frac{dw}{dx} \right] \\ \varphi_r &= - \frac{\omega_1 k_1}{\omega_0} \left[\frac{d^3 w}{dx^3} + \frac{1}{x} \frac{d^2 w}{dx^2} - \left(\frac{1}{x^2} - 2\rho - \frac{\omega_0^2}{\omega_1 k_1} \right) \frac{dw}{dx} \right] \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

其中

$$\beta_2 = \frac{\nu}{10(1 - \nu)} \quad (27)$$

于是,归结为求解常微分方程边值问题(22)、(24)和(22)、(25)。由这些边值问题求得挠度 w 后,再按式(26)求弯矩和剪力,最后,按照式(3b),我们得到计算管板的径向、切

向弯曲应力 σ_r 、 σ_θ 以及横向剪应力 τ_{rz} 的公式:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{12M_r z}{\eta h^3} \\ \sigma_\theta &= \frac{12M_\theta z}{\eta h^3} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\tau_{rz} = \frac{3Q_r}{2\eta h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] \quad (29)$$

值得指出,在前面的方程(22)、表达式(26)和边界条件(24)、(25)中,只要将计及横向剪切的项取为零,亦即令

$$\omega_1 = \omega_3 = 0 \quad (30)$$

我们便得到通常的薄管板理论中的挠度方程,弯矩、剪力、转角表达式以及相应的边界条件。因此,只要我们求得了厚管板的解,同时也就得到了通常的薄管板的解。

三、边值问题的求解

现在,我们来研究方程(22)的齐次方程:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{2}{x} \frac{d^3 w}{dx^3} - \left(\frac{1}{x^2} - 2\rho \right) \frac{d^2 w}{dx^2} + \left(\frac{1}{x^3} + \frac{2\rho}{x} \right) \frac{dw}{dx} + w = 0 \quad (31)$$

很容易证明,方程(31)等价于下面两个二阶方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + g^2 y &= 0 \\ \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dw}{dx} + \varepsilon^2 w &= y \end{aligned} \right\} \quad (32a, b)$$

其中

$$\varepsilon^2 = \rho + i\sqrt{1-\rho^2}, \quad g^2 = \rho - i\sqrt{1-\rho^2} \quad (33)$$

先解方程(32a),它是零阶贝塞尔方程,其通解为

$$y = AJ_0(gx) + BY_0(gx) \quad (34)$$

其中 $J_0(gx)$ 、 $Y_0(gx)$ 均是复变元圆柱函数, A 、 B 为待定常数。

将解(34)代入方程(32b),并求解方程,得通解:

$$W = \bar{C}_1 J_0(\varepsilon x) + \bar{C}_2 J_0(gx) + \bar{C}_3 Y_0(\varepsilon x) + \bar{C}_4 Y_0(gx) \quad (35)$$

其中 $\bar{C}_1$ 、 $\bar{C}_2$ 、 $\bar{C}_3$ 、 $\bar{C}_4$ 为待定常数,而

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1+\rho}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\rho}{2}}, \quad g = \sqrt{\frac{1+\rho}{2}} - i\sqrt{\frac{1-\rho}{2}} \quad (36)$$

再令

$$\rho = \cos 2\varphi \quad (37)$$

则式(36)成为

$$\varepsilon = e^{i\varphi}, \quad g = e^{-i\varphi} \quad (38)$$

于是,解(35)改写为

$$W = \bar{C}_1 J_0(xe^{i\varphi}) + \bar{C}_2 J_0(xe^{-i\varphi}) + \bar{C}_3 Y_0(xe^{i\varphi}) + \bar{C}_4 Y_0(xe^{-i\varphi}) \quad (39)$$

为了得到实数解,我们用金尼克函数来替代复变元圆柱函数:

$$\left. \begin{aligned} U_0(x, \varphi) &= \frac{1}{2} [J_0(xe^{i\varphi}) + J_0(xe^{-i\varphi})] \\ V_0(x, \varphi) &= \frac{1}{2i} [J_0(xe^{i\varphi}) - J_0(xe^{-i\varphi})] \\ \bar{U}_0(x, \varphi) &= \frac{1}{2} [Y_0(xe^{i\varphi}) + Y_0(xe^{-i\varphi})] \\ \bar{V}_0(x, \varphi) &= \frac{1}{2i} [Y_0(xe^{i\varphi}) - Y_0(xe^{-i\varphi})] \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

由于挠度 W 在板中心有界,而 $\bar{U}_0(x, \varphi)$ 和 $\bar{V}_0(x, \varphi)$ 在中心处变为无限大,故应去掉解中的 $\bar{U}_0(x, \varphi)$ 和 $\bar{V}_0(x, \varphi)$ 。在考虑到方程(22)的特解后,我们就得到方程(22)的实数解:

$$W = C_1 U_0(x, \varphi) + C_2 V_0(x, \varphi) + \frac{q}{k_1} - (\delta - \delta_t) \quad (41)$$

其中 C_1 、 C_2 为待定常数,而 $U_0(x, \varphi)$ 、 $V_0(x, \varphi)$ 及其导数公式为

$$\left. \begin{aligned} U_0(x, \varphi) &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i \prod_{j=1}^i (2j)^2} x^{2i} \cos 2i\varphi \\ V_0(x, \varphi) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i \prod_{j=1}^i (2j)^2} x^{2i} \sin 2i\varphi \\ \frac{dU_0(x, \varphi)}{dx} &= U'_0(x, \varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i 2i}{i \prod_{j=1}^i (2j)^2} x^{2i-1} \cos 2i\varphi \\ \frac{dV_0(x, \varphi)}{dx} &= V'_0(x, \varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i 2i}{i \prod_{j=1}^i (2j)^2} x^{2i-1} \sin 2i\varphi \\ \frac{d^2 U_0(x, \varphi)}{dx^2} &= -U_0(x, \varphi) \cos 2\varphi + V_0(x, \varphi) \sin 2\varphi - \frac{1}{x} U'_0(x, \varphi) \\ \frac{d^2 V_0(x, \varphi)}{dx^2} &= -U_0(x, \varphi) \sin 2\varphi - V_0(x, \varphi) \cos 2\varphi - \frac{1}{x} V'_0(x, \varphi) \\ \frac{d^3 U_0(x, \varphi)}{dx^3} &= \frac{1}{x} U_0(x, \varphi) \cos 2\varphi - \frac{1}{x} V_0(x, \varphi) \sin 2\varphi \\ &\quad + \left(\frac{2}{x^2} - \cos 2\varphi \right) U'_0(x, \varphi) + V'_0(x, \varphi) \sin 2\varphi \\ \frac{d^3 V_0(x, \varphi)}{dx^3} &= \frac{1}{x} U_0(x, \varphi) \sin 2\varphi + \frac{1}{x} V_0(x, \varphi) \cos 2\varphi \\ &\quad - U'_0(x, \varphi) \sin 2\varphi + \left(\frac{2}{x^2} - \cos 2\varphi \right) V'_0(x, \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

将解(41)代入式(26), 得

$$\left. \begin{aligned} M_r &= C_1 \left[\gamma_1 U_0(x, \varphi) + \gamma_2 V_0(x, \varphi) + \frac{\gamma_3}{x} U'_0(x, \varphi) + \frac{\gamma_4}{x} V'_0(x, \varphi) \right] \\ &\quad - C_2 \left[\gamma_2 U_0(x, \varphi) - \gamma_1 V_0(x, \varphi) + \frac{\gamma_4}{x} U'_0(x, \varphi) - \frac{\gamma_3}{x} V'_0(x, \varphi) \right] \\ M_\theta &= C_1 \left[\gamma_5 U_0(x, \varphi) + \nu \gamma_2 V_0(x, \varphi) - \frac{\gamma_3}{x} U'_0(x, \varphi) - \frac{\gamma_4}{x} V'_0(x, \varphi) \right] \\ &\quad - C_2 \left[\nu \gamma_2 U_0(x, \varphi) - \gamma_5 V_0(x, \varphi) - \frac{\gamma_4}{x} U'_0(x, \varphi) + \frac{\gamma_3}{x} V'_0(x, \varphi) \right] \\ Q_r &= C_1 [\gamma_6 U'_0(x, \varphi) + \gamma_7 V'_0(x, \varphi)] - C_2 [\gamma_7 U'_0(x, \varphi) - \gamma_6 V'_0(x, \varphi)] \\ \varphi_r &= C_1 [\gamma_8 U'_0(x, \varphi) + \gamma_9 V'_0(x, \varphi)] - C_2 [\gamma_9 U'_0(x, \varphi) - \gamma_8 V'_0(x, \varphi)] \end{aligned} \right\} (43a-d)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{2} \omega_2 + \omega_3 \beta_1, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{2} \omega_2 \operatorname{tg} 2\varphi, \quad \gamma_3 = \frac{1}{5} \omega_3 \cos 2\varphi + \frac{\omega_2(1-\nu)}{2 \cos 2\varphi}, \\ \gamma_4 &= \frac{1}{5} \omega_3 \sin 2\varphi, \quad \gamma_5 = \frac{\nu}{2} \omega_2 + \omega_3 \beta_2, \quad \gamma_6 = -\frac{k_1}{\omega_0} \cos 2\varphi, \\ \gamma_7 &= -\frac{k_1}{\omega_0} \sin 2\varphi, \quad \gamma_8 = \omega_1 \gamma_6 - \omega_0, \quad \gamma_9 = \omega_1 \gamma_7 \end{aligned} \right\} (44)$$

为了今后使用方便, 我们在式(41)和(43a—c)中令 x 为零, 这样便得到直接计算厚管板中心处的挠度、弯矩和剪力的简单公式:

$$\left. \begin{aligned} W(0) &= C_1 + \frac{q}{k_1} - (\delta - \delta_p) \\ M_r(0) = M_\theta(0) &= \frac{1+\nu}{4} \omega_2 (C_1 + C_2 \operatorname{tg} 2\varphi) + \frac{1}{10(1-\nu)} C_1 \omega_3 \\ Q_r(0) &= 0 \end{aligned} \right\} (45)$$

下面, 我们分两类情况决定待定常数 C_1 和 C_2 :

(1) 仅有压力 q 作用, 此时

$$\delta - \delta_p = 0$$

(a) 在固定边界条件下, 将式(41)、(43d)代入边界条件(24), 得决定待定常数 C_1 和 C_2 的公式:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{\lambda_2}{k_1 \lambda_1} q \\ C_2 &= -\frac{\lambda_3}{k_1 \lambda_1} q \end{aligned} \right\} (46)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_2 U_0(x_1, \varphi) + \lambda_3 V_0(x_1, \varphi) \\ \lambda_2 &= \gamma_5 U'_0(x_1, \varphi) - \gamma_8 V'_0(x_1, \varphi) \\ \lambda_3 &= \gamma_8 U'_0(x_1, \varphi) + \gamma_9 V'_0(x_1, \varphi) \end{aligned} \right\} (47)$$

(b) 在简支边界条件下, 将式(41)、(43a)代入边界条件(25), 得决定待定常数 C_1 和

C_2 的公式:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{\lambda_5}{k_1 \lambda_4} q \\ C_2 &= -\frac{\lambda_6}{k_1 \lambda_4} q \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \lambda_4 &= \lambda_5 U_0(x_1, \varphi) + \lambda_6 V_0(x_1, \varphi) \\ \lambda_5 &= \gamma_2 U_0(x_1, \varphi) - \gamma_1 V_0(x_1, \varphi) + \frac{\gamma_4}{x_1} U'_0(x_1, \varphi) - \frac{\gamma_3}{x_1} V'_0(x_1, \varphi) \\ \lambda_6 &= \gamma_1 U_0(x_1, \varphi) + \gamma_2 V_0(x_1, \varphi) + \frac{\gamma_3}{x_1} U'_0(x_1, \varphi) + \frac{\gamma_4}{x_1} V'_0(x_1, \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

(2) 仅有筒体和管束温差的影响, 此时

$$q = 0$$

(i) 在固定边界条件下, 除边界条件(24)外, 尚需引入边缘剪力连续的条件:

$$\text{当 } x = x_1 \text{ 时, } Q = Q \quad (50)$$

将式(41)、(43c,d)代入条件(24)、(50), 并应用式(6c), 得决定待定常数 C_1 和 C_2 的公式:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{\lambda_2}{\lambda_7} Q \\ C_2 &= \frac{\lambda_3}{\lambda_7} Q \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \lambda_7 &= (\gamma_6 \gamma_9 - \gamma_7 \gamma_8) [U_0'^2(x_1, \varphi) + V_0'^2(x_1, \varphi)] \\ Q &= \frac{\lambda_7 E_p h_p \delta}{\lambda_7 l + \lambda_1 E_p h_p} \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

(ii) 在简支边界条件下, 将式(41)、(43a,c)代入条件(25)和(50), 并应用式(6c), 得决定待定常数 C_1 和 C_2 的公式:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{\lambda_5}{\lambda_8} Q \\ C_2 &= \frac{\lambda_6}{\lambda_8} Q \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \lambda_8 &= \lambda_5 [\gamma_6 U_0'(x_1, \varphi) + \gamma_7 V_0'(x_1, \varphi)] - \lambda_6 [\gamma_7 U_0'(x_1, \varphi) - \gamma_6 V_0'(x_1, \varphi)] \\ Q &= \frac{\lambda_8 E_p h_p \delta}{\lambda_8 l + \lambda_4 E_p h_p} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

四、实例计算

例 1 绘制一常温下试验厚管板的应力曲线和挠度曲线。这一试验是在 1970 年由上海锅炉厂、一机部机械科学研究院、化工部第一设计院完成的。

已知数据:

$$l = 1532.5\text{mm}, \quad l_1 = 532.5\text{mm}, \quad l_2 = 500\text{mm};$$

$$h = 65\text{mm}, \quad d = 350\text{mm}, \quad d_1 = 6\text{mm};$$

$$d_2 = 14\text{mm}, \quad n = 232, \quad s = 5;$$

$$q_1 = 3\text{kg/mm}^2, \quad q_2 = 0, \quad E = E_r = 2.1 \times 10^4\text{kg/mm}^2.$$

$$\nu = 0.3$$

此管板的厚度与直径比为 $h/d = 0.186$, 显然, 需用本文的厚管板理论公式进行讨论.

显而易见, 此时 $\delta - \delta_p = 0$

故我们仅计算由压力 q 引起的解. 将上述数据代入公式(28)、(41)、(43)、(46)和(48)中, 便得在固定和简支两种边界条件下的应力和挠度值. 由理论计算结果和试验数据可知, 按绝对值而言, 管板表面上的径向应力 σ_r 取最大值. 而工程设计感兴趣的也是最大应力, 所以我们仅将管板上表面的径向应力沿半径的变化表示在图 2 上. 关于管板挠度沿半径的变化曲线则绘在图 3 中. 为了便于比较, 我们还在图中给出了按薄管板理论公式(从本文公式略去含 ω_1 和 ω_3 的厚板因素项即可得到)所计算的值. 由结果看出:

(1) 在固定边界条件下, 最大应力发生在板的边缘, 且在板的表面上; 最大挠度发生在板中心. 在简支边界条件下, 最大应力发生在板中心, 且在板的表面上; 最大挠度发生在板中心.

(2) 应力试验值与厚管板在固定边界条件下的理论值比较一致, 特别在靠近板边缘最大径向应力的区域内, 更为吻合. 以最大的试验值(在靠近板边缘的 $r = 165\text{mm}$ 处)为例, 理论值与试验值的相对误差仅为 1.13%. 而且, 厚管板理论公式值比薄管板理论公式

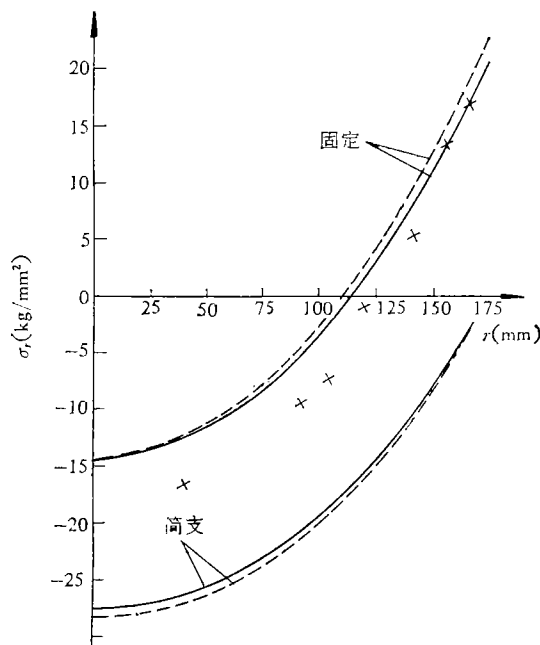


图 2 径向应力值比较($z = -h/2$)

—— 厚管板理论值 - - - - 薄管板理论值 × 试验值

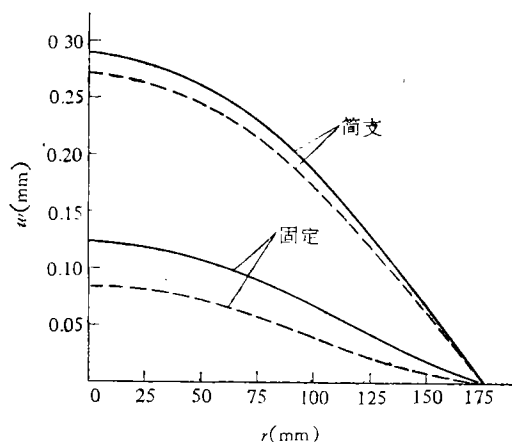


图 3 挠度值比较

——厚管板理论值 ----薄管板理论值

值更接近试验值。

(3)将厚、薄管板理论公式值进行比较,则发现挠度之间的相对误差较应力大。以固定边界条件下的最大挠度和最大应力为例,它们的相对误差分别为 31.8% 和 -9.00%。而且还可看到,按薄管板理论公式计算所得的最大应力要大于按厚管板理论公式计算所得的最大应力。对于最大挠度,则恰恰相反,是前者小于后者。

例 2 绘制一常温下试验厚管板^[1]的应力曲线和挠度曲线。

已知数据:

$$l = 2935.5\text{mm}, \quad l_1 = 535.5\text{mm}, \quad l_2 = 300\text{mm};$$

$$h = 135\text{mm}, \quad d = 550\text{mm}, \quad d_1 = 6\text{mm},$$

$$d_2 = 14\text{mm}, \quad n = 505, \quad s = 17,$$

$$q_1 = 3.20\text{kg/mm}^2, \quad q_2 = 0, \quad E = 2.02 \times 10^4\text{kg/mm}^2,$$

$$E_r = 2.1 \times 10^4\text{kg/mm}^2, \quad \nu = 0.3.$$

此管板的厚度与直径比为

$$h/d = 0.245$$

显然,需用本文的厚管板理论公式进行讨论。

由于试验时

$$\delta - \delta_p = 0$$

所以我们仅计算由压力 q 引起的解。与前例一样,将上述数据代入公式(28)、(41)、(43)、(46)和(48)中,便得在固定和简支两种边界条件下的应力和挠度值。为了简明起见,我们仍然只给出最大应力即管板上表面径向应力以及挠度的曲线(图 4—5)。同时,我们也将薄管板理论值一起给在图中。由结果知,我们仍然有前例所得的第一点结论。此外,还有:

(1) 应力试验值与厚管板在简支边界条件下的理论值比较符合,特别在靠近板中心最大径向应力的区域内更趋一致。以最大的试验值(在靠近板中心的 $r = 19\text{mm}$ 处)为例,理论值与试验值的相对误差仅为 0.15%。而且,厚管板理论公式值比薄管板理论公式值

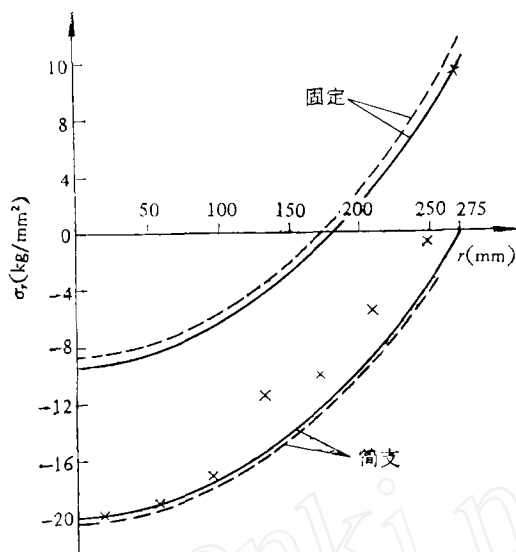


图 4 径向应力值比较 (\$\varphi = -h/2\$)

—厚管板理论值 —薄管板理论值 ×试验值

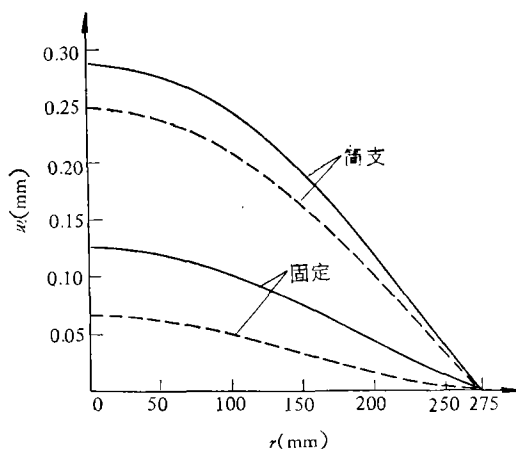


图 5 挠度值比较

—厚管板理论值 —薄管板理论值

更接近试验值。

(2) 将厚、薄管板理论公式值进行比较, 则再一次发现, 挠度之间的相对误差较应力大。以简支边界条件下的最大挠度和最大应力为例, 它们的相对误差分别为 13.4% 和 -2.25%。与前例一样, 还可看到, 按薄管板理论公式计算所得的最大应力要大于按厚管板理论公式计算所得的最大应力。对于最大挠度, 也是刚好相反, 是前者小于后者。

例 3 计算一管板在工作情况下的最大应力和最大挠度。

已知数据:

$$l = 4924\text{mm}, \quad l_1 = 733\text{mm}, \quad l_2 = 254\text{mm};$$

$$h = 230\text{mm}, \quad h_p = 12\text{mm}, \quad d = 700\text{mm},$$

$$d_1 = 12\text{mm}, \quad d_2 = 18\text{mm}, \quad n = 745,$$

$$s = 33, \quad q_1 = 3.2\text{kg/mm}^2, \quad q_2 = 0.05\text{kg/mm}^2,$$

$$t_0 = 20^\circ\text{C},$$

在高温下(100°C 以上), $E = E_p = 1.9 \times 10^4\text{kg/mm}^2$, $E_r = 1.87 \times 10^4\text{kg/mm}^2$, $\nu = 0.316$, $\alpha_r = 18 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$, $\alpha_p = 11 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$.

管子和筒体在工作情况下的温度分布情况见表 1.

表 1 管子、筒体沿 z 轴的温度分布情况(单位: $^\circ\text{C}$)

部 位 温 度 z	管 内 侧	管 外 侧	筒 体
0	200	200	200
$h/2$	200	100	100
$2l - h/2$	20	20	20
$2l$	20	20	20

此管板的厚度与直径比为

$$h/d = 0.329$$

显然它属于厚管板理论的研究范围.

众所周知,材料的弹性常数在温度变化时并不是常数.但为了简单起见,我们不计及这种变化,而以其高温下的值近似地作为计算数据.

将以上数据代入公式(28)、(41)、(43)、(46)、(48)、(51)和(53)中,即可求得管板的应力和挠度.与上面两个实例一样,在固定和简支边界条件下,最大应力仍分别是管板边缘和中心的板表面上的径向应力;最大挠度仍是管板的中心挠度.为了便于比较,我们在表 2 中分别按照压力以及筒体与管束温差的影响来给出计算结果.由表 2 的数值结果看出,当管内走热载体时,由筒体和管束温差引起的热应力和挠度与由压力引起的应力和挠度反号.显然,这种情况对设计说来,是很有利的.

表 2 管板的最大应力 ($z = -h/2$)和最大挠度值

承 载 情 况	结 果		结果	
	$\sigma_{\max}(\text{kg/mm}^2)$		$w_{\max}(\text{mm})$	
	固 定	简 支	固 定	简 支
$q \neq 0, \delta - \delta_p = 0$	7.51	-13.1	0.100	0.221
$q = 0, \delta - \delta_p \neq 0$	-2.33	4.15	-0.0310	-0.0702
合 计	5.18	-8.95	0.0690	0.151

五、结 论

(1) 由上面的实例计算看到,本文公式与试验值相当符合.这说明,采用厚板理论去研究高压管板的强度与刚度,才能给出比较精确的结果.

(2) 在固定和简支两种边界条件下, 最大挠度都发生在板中心; 最大应力都是径向应力, 分别发生在板边缘和中心的表面上。对同一管板说来, 按固定边界条件公式所计算的最大应力和最大挠度要比简支边界条件情况的小一些。

(3) 在具体情况中, 我们如何决定边界条件呢? 一般说来, 对于与管板连接的法兰或其它结构较厚的情况, 可视管板边界条件为固定。譬如实例 1 就是这种情况, 法兰与管板的厚度比达 2.42。而在实例 2 中, 此比值仅为 1.74, 加之未设置简体, 故管板边界条件偏于简支。即使靠近板边缘一点的试验值却远离简支情况的理论曲线, 而与固定情况的理论曲线吻合, 误差仅为 0.09%。可以预料, 如果设置了简体, 此管板边界条件当趋于固定。因此, 一般说来, 由于法兰较厚, 高压管板的边界条件大多属于固定情况。

(4) 当管内走热载体时, 由简体和管束温差所引起的应力和挠度将与由压力 q 所产生的应力和挠度反号, 这对管板的强度和刚度说来是有益的。

参 考 文 献

- [1] 上海锅炉厂, 化工炼油机械通讯, 3 (1974), 18.
- [2] Мельников, Н. П., Избранные проблемы прикладной механики, Москва (1974), 497.
- [3] Slot, T., Stress analysis of thick perforated plates, *Technomic* (1972).
- [4] Slot, T., Proceedings of first international conference on pressure vessel technology, *ASME* (1969)
- [5] Reissner, E., *J. Appl. Mech.*, 12(1945), A-68.
- [6] Timoshenko, S., Krieger, S. W., Theory of plates and shells. M-HBCI (1959), 165.
- [7] Frederick, D., *J. Appl. Mech.*, 23(1956), 195.
- [8] 玉手統, 伊藤金弥, 日本机械学会论文集, 28, 191 (1962), 812.
- [9] W. 乌班诺夫斯基, 力学学报, 4, 2 (1960), 94.
- [10] Urbanowski, W., *Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej, Mechanika*, 3(1955).
- [11] НИИХИММАШ., Сосуды и аппараты, методика и нормы расчета на прочность узлов и деталей, Москва, (1960).

BENDING OF THICK FIXED TUBE PLATE

Liu Renhuai

(Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology of China)

Abstract

The bending problems of fixed tube plates in medium and low pressure heat exchangers have been studied by W. Urbanowski etc. on the basis of the theory of thin plate. But, the design formulas thus obtained become unreliable in the case of high pressure heat exchangers in which thick tube plate is adopted. In this paper, on the basis of Reissner's thick-plate theory, basic equations for thick-tube plates are derived and a relatively accurate solution of these equations has been obtained. In two examples, our theoretical results agree reasonably well with experiments carried out by others. Therefore, present formulas may be useful in design.