

有限封闭含水层系越流问题的精确解

陈钟祥 庞之垣 姜礼尚

(石油勘探开发科学研究院) (贵州大学) (北京大学)

提要 本文在有限封闭含水层系的普遍情形下求得了解的结构,对均质的圆形地层中有一口圆心井的典型情形,则获得了问题的精确解。本文对地下水资源的评价和利用问题,多油层油田的开发问题具有重要的理论和实际意义,同时,可以作为解决大城市地面沉降问题的一个方面的理论依据。

越流问题在地下水资源评价与利用中居于突出地位,它是正确评价地下水资源的理论基础。1969年 Neuman 和 Withespoon^[1] 发展了有关越流的新理论,被认为是现代水文地质学中地下水动力学理论的重大进展,并有重要的实际意义。Neuman 和 Withespoon 的解是对无限大含水层做出的,并且假定弱渗透夹层中水平方向的流动可以忽略。刘慈群^[2] 则用平均值法研究了有限封闭含水层系中的类似问题,求得了越流量和平均地面沉降量。本文用类似文献[3]中的思路和做法,在对弱渗透夹层中的流动不作任何假定的情况下全面求解了有限封闭含水层系中的渗流问题,在普通的情形下给出了解的结构,据此可以求得整个系统中的储量,并用平均值方法求得了总越流量和地面平均沉降量;对均质的圆形地层中仅有一口圆心井的典型情形,则求得了问题的精确解,从而解决了越流问题和层间干扰问题;并且由于给出了压头随空间和时间的变化,不仅可以预测地面平均沉降量,还可以预测为人们所更加关切的因沉降而引起的地面倾斜度。

一、问题的提法

设有一边界为任意的有限封闭的承压含水层系统,它包含两个含水层和一个弱渗透夹层,边界内有任意分布的 n 口井,包括产水井和回灌井,这些井只钻开含水层 1, 并各以涌水量 $q^{(i)}(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 生产 (q 为正表示产水井,为负表示回灌井) (图 1)。含水层 1 中压头的降低将导致含水层 2 和弱渗透夹层中的流动,因为含水层的渗透性远大于弱渗透夹层,所以含水层 1、2 中的流动可看作是水平的。此时,有限封闭含水层系中的渗流由下列方程组描述

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_1 \frac{\partial S_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_1 \frac{\partial S_1}{\partial y} \right) + \frac{k_3}{b_1} \frac{\partial S_3}{\partial z} \Big|_{z=0} = \mu_1 \frac{\partial S_1}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_2 \frac{\partial S_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_2 \frac{\partial S_2}{\partial y} \right) - \frac{k_3}{b_2} \frac{\partial S_3}{\partial z} \Big|_{z=b_3} = \mu_2 \frac{\partial S_2}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_3 \frac{\partial S_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_3 \frac{\partial S_3}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_3 \frac{\partial S_3}{\partial z} \right) = \mu_3 \frac{\partial S_3}{\partial t} \quad (1.3)$$

本文于 1980 年 8 月 11 日收到。

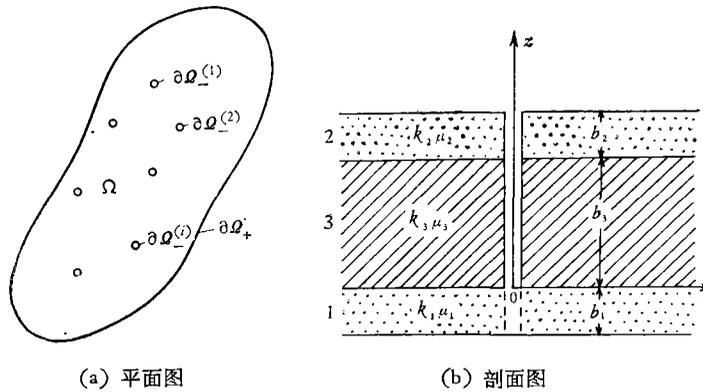


图 1

边界条件是

$$\frac{\partial S_1}{\partial n} \Big|_{\partial Q_+} = \frac{\partial S_2}{\partial z} \Big|_{z=b_2} = \frac{\partial S_3}{\partial n} \Big|_{\partial Q_+} = 0 \quad (2.1)$$

$$\oint_{\partial Q_+^{(i)}} k_i b_i \frac{\partial S_1}{\partial n} dl = q^{(i)}(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.2)$$

$$S_1 \Big|_{\partial Q_+^{(i)}} = \chi^{(i)}(t) \quad \chi^{(i)}(t) \text{ 待定 } (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial n} \Big|_{\partial Q_+^{(i)}} = \frac{\partial S_3}{\partial n} \Big|_{\partial Q_+^{(i)}} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.4)$$

初始条件是

$$S_1 \Big|_{t=0} = S_{10}(x, y) \quad (3.1)$$

$$S_2 \Big|_{t=0} = S_{20}(x, y) \quad (3.2)$$

$$S_3 \Big|_{t=0} = S_{30}(x, y, z) \quad (3.3)$$

此外还有衔接条件

$$S_3 \Big|_{z=0} = S_1(x, y, t) \quad (4.1)$$

$$S_3 \Big|_{z=b_3} = S_2(x, y, t) \quad (4.2)$$

其中 S 是降深; k 是渗透系数; μ 是储水系数; b 是地层厚度; 下标 1、2、3 分别表示该物理量是含水层 1、2 和弱渗透夹层的; k_1, k_2, μ_1, μ_2 都是 x, y 的函数; k_3, μ_3 则是 x, y, z 的函数; ∂Q_+ 表示地层外边界; $\partial Q_+^{(i)}$ 表示第 i 口井的井壁; n 表示边界的外法线方向。

二、当各井的产水量或灌入量恒定时解*

求如下形式的解

$$S_1(x, y, t) = f_1(x, y) + \theta t + u_1(x, y, t) \quad (5.1)$$

$$S_2(x, y, t) = f_2(x, y) + \theta t + u_2(x, y, t) \quad (5.2)$$

$$S_3(x, y, z, t) = f_3(x, y, z) + \theta t + u_3(x, y, z, t) \quad (5.3)$$

其中 $f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y, z)$ 是下列问题的解

* 与文献[3]中第三节的做法完全相同, 在本节所得解的基础上, 应用 Duhamel 原理便可得到各井产量非恒定时的解。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) + \frac{k_3}{b_1} \frac{\partial f_3}{\partial z} \Big|_{z=0} = \mu_1 \theta \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) - \frac{k_3}{b_2} \frac{\partial f_3}{\partial z} \Big|_{z=b_2} = \mu_2 \theta \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_3 \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_3 \frac{\partial f_3}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_3 \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) = \mu_3 \theta \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega_+} = \frac{\partial f_2}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega_+} = \frac{\partial f_3}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega_+} = 0 \quad (6.4)$$

$$\oint_{\partial \Omega^{(i)}} k_i b_i \frac{\partial f_i}{\partial n} dl = q^{(i)} = \text{常量} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.5)$$

$$f_i \Big|_{\partial \Omega^{(i)}} = \chi_i^{(i)} \quad \chi_i^{(i)} \text{ 待定} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega^{(i)}} = \frac{\partial f_3}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega^{(i)}} = 0 \quad (6.7)$$

$$f_3(x, y, 0) = f_1(x, y) \quad (6.8)$$

$$f_3(x, y, b_2) = f_2(x, y) \quad (6.9)$$

这样, u_1, u_2, u_3 仍然适合定解问题 (1.1)–(4.2), 但边界条件已被化成为齐次的, 而初始条件化为

$$u_i = S_{i0} - f_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (7)$$

将 b_1 乘式 (6.1), b_2 乘式 (6.2), 然后相加, 并沿整个面积 Ω 积分, 再由 Green 公式, 并考虑到边界条件 (6.4)、(6.5) 和 (6.7), 立得

$$\iint_{\Omega} \left[k_3 \frac{\partial f_3}{\partial z} \Big|_{z=0} - k_3 \frac{\partial f_3}{\partial z} \Big|_{z=b_2} \right] d\Omega + \sum_{i=1}^n q^{(i)} = \theta \iint_{\Omega} (b_1 \mu_1 + b_2 \mu_2) d\Omega \quad (8)$$

把式 (6.3) 沿弱渗透夹层的整个体积分, 应用 Green 公式和边界条件 (6.4)(6.7) 后得

$$\iint_{\Omega} \left[k_3 \frac{\partial f_3}{\partial z} \Big|_{z=b_2} - k_3 \frac{\partial f_3}{\partial z} \Big|_{z=0} \right] d\Omega = \theta \iint_{\Omega} \int_0^{b_2} \mu_3 dz d\Omega$$

代入式 (8), 可定得 θ 为

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^n q^{(i)}}{\iint_{\Omega} \left[b_1 \mu_1 + b_2 \mu_2 + \int_0^{b_2} \mu_3 dz \right] d\Omega} \quad (9)$$

令

$$u_i = e^{-\lambda z} R_i \quad (10)$$

则 R_i 是带等位面边界条件的特征值问题的解, 即求 R_i 适合问题 (6), 但方程 (6.1)–(6.3) 的右端项中的 θ 分别改为 $\lambda R_i (i = 1, 2, 3)$, 边界条件改为齐次的。

此特征值问题的弱形式是求 λ 及相应的非零向量 $\mathbf{R} = (R_1, R_2, R_3)^T \in \mathbf{H}$, 使得对 $\forall \mathbf{S} \in \mathbf{H}$ 有

$$a(\mathbf{R}, \mathbf{S}) = \lambda(\mathbf{R}, \mathbf{S})$$

其中

$$\mathbf{H} = \{ \mathbf{R} = (R_1, R_2, R_3)^T \mid R_1 \in H_1(\Omega), R_2 \in H_1(\Omega), R_3 \in H_1(\Omega) \\ (\Omega = \Omega \times [0, b_3]), R_1|_{\partial\Omega^i} = \text{常数} (i = 1, 2, \dots, n), \\ R_3|_{x=0} = R_1, R_3|_{x=b_3} = R_2 \}, \\ \|\mathbf{R}\|_{\mathbf{H}}^2 = (\mathbf{R}, \mathbf{R}) + a(\mathbf{R}, \mathbf{R})$$

$$a(\mathbf{R}, \mathbf{S}) = b_1 \iint_{\Omega} k_1 \nabla R_1 \nabla S_1 dx dy + b_2 \iint_{\Omega} k_2 \nabla R_2 \nabla S_2 dx dy + \iiint_{\Omega} k_3 \nabla R_3 \nabla S_3 dx dy dz$$

$$(\mathbf{R}, \mathbf{S}) = b_1 \iint_{\Omega} \mu_1 R_1 S_1 dx dy + b_2 \iint_{\Omega} \mu_2 R_2 S_2 dx dy + \iiint_{\Omega} \mu_3 R_3 S_3 dx dy dz$$

易见

$$a(\mathbf{R}, \mathbf{S}) = a(\mathbf{S}, \mathbf{R})$$

$a(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \geq 0$, $a(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = 0$ 当且仅当 $\mathbf{R} = c\mathbf{I}$ ($\mathbf{I} = (1, 1, 1)^T$, c 是常数). 因此, $\lambda = 0$ 是特征值, 而相应的特征函数是 $c\mathbf{I}$.

现考虑 \mathbf{H} 中 \mathbf{I} 的正交余子空间 $\mathbf{H}^* = \{ \mathbf{R} \mid \mathbf{R} \in \mathbf{H}, (\mathbf{R}, \mathbf{I}) = 0 \}$

应用 Соболев 空间的等价模定理^[4], 不难证明

$$\|\mathbf{R}\|_{\mathbf{H}}^* = \sqrt{|(\mathbf{R}, \mathbf{I})| + a(\mathbf{R}, \mathbf{R})}$$

与 $\|\mathbf{R}\|_{\mathbf{H}}$ 等价, 即存在正常数 m, M ($0 < m < M$), 使得

$$m\|\mathbf{R}\|_{\mathbf{H}} \leq \|\mathbf{R}\|_{\mathbf{H}}^* \leq M\|\mathbf{R}\|_{\mathbf{H}}$$

因此, 在 \mathbf{H}^* 上

$$a(\mathbf{R}, \mathbf{S}) = a(\mathbf{S}, \mathbf{R})$$

$$a(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = (\|\mathbf{R}\|_{\mathbf{H}}^*)^2 \geq m^2 \|\mathbf{R}\|_{\mathbf{H}}^2 \geq m^2 (\mathbf{R}, \mathbf{R})$$

即 $a(\mathbf{R}, \mathbf{S})$ 是对称正定二次形式, 而由 Соболев 嵌入定理, 从 $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{L}_2$ 是紧的, 这里

$$\mathbf{L}_2 = \{ \mathbf{R} = (R_1, R_2, R_3)^T \mid R_1 \in L_2(\Omega), R_2 \in L_2(\Omega), R_3 \in L_2(\Omega) \}$$

$$\|\mathbf{R}\|_{\mathbf{L}_2}^2 = \iint_{\Omega} \mu_1 R_1^2 dx dy + \iint_{\Omega} \mu_2 R_2^2 dx dy + \iiint_{\Omega} \mu_3 R_3^2 dx dy dz$$

于是, 特征值问题(11)具有下列性质^[5]

1. 存在无穷多个特征值 $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$;
2. 所有特征值 $\lambda_n \geq 0$, 且有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$;
3. 相应于不同特征值 λ_m 和 λ_n 的特征函数 \mathbf{R}_m 和 \mathbf{R}_n 正交

$$(B\mathbf{R}_m, \mathbf{R}_n) = b_1 \iint_{\Omega} \mu_1 R_{m_1} R_{n_1} dx dy + b_2 \iint_{\Omega} \mu_2 R_{m_2} R_{n_2} dx dy \\ + \int_0^{b_3} \iint_{\Omega} \mu_3 R_{m_3} R_{n_3} dx dy dz$$

4. 特征函数系 $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots$ 是完全的, 假设 $\{\mathbf{R}_n\}$ 已经过规一化, 即 $(B\mathbf{R}_n, \mathbf{R}_n) = 1$, 那么

$$\mathbf{R} = \sum_{j=0}^{\infty} (B\mathbf{R}, \mathbf{R}_j) \mathbf{R}_j$$

这样, 我们得到:

$$U = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda_j t} (B\mathbf{u}_0, \mathbf{R}_j) \mathbf{R}_j \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} (B\mathbf{u}_0, \mathbf{R}_j) &= b_1 \iint_{\Omega} (S_{10} - f_1) \mu_1 R_{j1} dx dy + b_2 \iint_{\Omega} (S_{20} - f_2) \mu_2 R_{j2} dx dy \\ &+ \int_0^{b_3} \iint_{\Omega} (S_{30} - f_3) \mu_3 R_{j3} dx dy dz \end{aligned}$$

把(9)、(11)代入(5.1)–(5.3),我们即得到了有限封闭含水层系越流问题 (1)–(4),当各井的产水量(或灌水量)各恒定时的解。

这一个解的结构与文献[3]中的式(13)完全类似,所以也有文献[3]中随后得到有关拟定常期的诸结果,即当 t 足够大时有

$$\frac{\partial S_k}{\partial t} = \frac{\sum_{i=1}^n q^{(i)}}{\iint_{\Omega} \left[b_1 \mu_1 + b_2 \mu_2 + \int_0^{b_3} \mu_3 dz \right] d\Omega} \quad (k = 1, 2, 3)$$

流动达到拟定常状态,以在拟定常期内在任一井里测得的降深 S 为纵坐标,时间 t 为横坐标,将得到一直线,量得其斜率 i 后,便得到每单位降深整个含水层系的弹性容量 V_e

$$V_e = \frac{\sum_{i=1}^n q^{(i)}}{i} = \frac{\iint_{\Omega} \left[b_1 \mu_1 + b_2 \mu_2 + \int_0^{b_3} \mu_3 dz \right] d\Omega}{i}$$

由此可估算储量。这样,为估算整个含水层系中地下水的储量,可进行与裂缝-孔隙油层中同样的专门的试井^[3]。

三、圆形均质地层中仅有一口圆心井的情形

在此情形下特征值问题化为

$$k_1 \left[\frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_1}{\partial r} \right] + \frac{k_3}{b_1} \frac{\partial R_3}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\mu_1 \lambda R_1 \quad (12.1)$$

$$k_2 \left[\frac{\partial^2 R_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_2}{\partial r} \right] - \frac{k_3}{b_2} \frac{\partial R_3}{\partial z} \Big|_{z=b_3} = -\mu_2 \lambda R_2 \quad (12.2)$$

$$k_3 \left[\frac{\partial^2 R_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_3}{\partial r} + \frac{\partial^2 R_3}{\partial z^2} \right] = -\mu_3 \lambda R_3 \quad (12.3)$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial r} \Big|_{r_c} = \frac{\partial R_2}{\partial r} \Big|_{r_c} = \frac{\partial R_3}{\partial r} \Big|_{r_c} = 0 \quad (12.4)$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial r} \Big|_{r_c} = \frac{\partial R_2}{\partial r} \Big|_{r_c} = \frac{\partial R_3}{\partial r} \Big|_{r_c} = 0 \quad (12.5)$$

$$R_3 \Big|_{z=0} = R_1 \quad (12.6)$$

$$R_3 \Big|_{z=b_3} = R_2 \quad (12.7)$$

其中, r 是以圆心为极点的极径; r_e 是地层的外半径; r_c 是井径。

考虑变量分离解

$$R_3(r, z) = R(r)Z(z) \quad (13)$$

将它代入式(12.3)和边界条件式(12.4)、(12.5),得

$$\begin{cases} R'' + \frac{1}{r} R' - \mu R = 0 \\ R'|_{r=r_c, r_c} = 0 \end{cases} \quad (14.1)$$

和

$$R'|_{r=r_c, r_c} = 0 \quad (14.2)$$

$$Z'' - \left(\frac{\mu_3}{k_3} \lambda + \mu \right) Z = 0 \quad (15)$$

不难证明, μ 只能小于或等于零, 易见 $\mu = 0$ 是特征值, 相应的非零解为

$$R = \text{const} \quad (16)$$

由方程(15), 可得此时 Z 的解为

$$\text{当 } \lambda = 0, Z = C_1 z + C_2 \quad (17)$$

$$\text{当 } \lambda > 0, Z = C_1 \cos \sqrt{\frac{\mu_3}{k_3} \lambda z} + C_2 \sin \sqrt{\frac{\mu_3}{k_3} \lambda z} \quad (18)$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

为了定出所有小于零的特征值, 令 $\mu = -\nu^2$, 作一变换 $\eta = \nu r$, 便可把方程(14.1)化为零阶 Bessel 方程, 从而求得特征值问题(14)的解为

$$R(r) = \Phi_{i,0}(r, r_c, \nu_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n, \dots) \quad (19)$$

其中

$$\Phi_{n,m}(r, r_c, \nu) = J_n(\nu r) Y_m(\nu r_c) - Y_n(\nu r) J_m(\nu r_c) \quad (20)$$

ν_i 是方程

$$\Phi_{1,i}(r_c, r_c, \nu) = 0 \quad (21)$$

的第 i 个正根.

当 $\mu < 0$ 时, 方程(15)的解分四种情况

$$1. \lambda = 0 \quad Z = C_1 e^{\nu z} + C_2 e^{-\nu z} \quad (22)$$

$$2. 0 < \lambda < \frac{k_3}{\mu_3} \nu^2 \quad Z = C_1 e^{\sqrt{\nu^2 - \frac{\mu_3}{k_3} \lambda} z} + C_2 e^{-\sqrt{\nu^2 - \frac{\mu_3}{k_3} \lambda} z} \quad (23)$$

$$3. \lambda = \frac{k_3}{\mu_3} \nu^2 \quad Z = C_1 z + C_2 \quad (24)$$

$$4. \lambda > \frac{k_3}{\mu_3} \nu^2 \quad Z = C_1 \cos \sqrt{\frac{\mu_3}{k_3} \lambda - \nu^2} z + C_2 \sin \sqrt{\frac{\mu_3}{k_3} \lambda - \nu^2} z \quad (25)$$

其中, C_1, C_2 为任意常数.

于是, 对 $R_3(r, z)$ 我们有

当 $\lambda = 0$ 时

$$R_3(r, z) = C_0^{(1)} z + C_0^{(2)} + \sum_{i=1}^{\infty} (C_i^{(1)} e^{\nu_i z} + C_i^{(2)} e^{-\nu_i z}) \Phi_{1,0}(r, r_c, \nu_i) \quad (26)$$

当 $\lambda > 0$ 时

$$R_3(r, z) = C_1^{(0)} \cos \sqrt{\frac{\mu_3}{k_3} \lambda z} + C_2^{(0)} \sin \sqrt{\frac{\mu_3}{k_3} \lambda z} + \sum_{i=1}^{\infty} Z_i \Phi_{1,0}(r, r_c, \nu_i) \quad (27)$$

其中

$$Z_i = \begin{cases} C_1^{(i)} e^{\sqrt{\frac{\mu_3}{k_3} \lambda} z} + C_2^{(i)} e^{-\sqrt{\frac{\mu_3}{k_3} \lambda} z} & \lambda < \frac{k_3}{\mu_3} \nu_i^2 \\ C_1^{(i)} z + C_2^{(i)} & \lambda = \frac{k_3}{\mu_3} \nu_i^2 \\ C_1^{(i)} \cos \sqrt{\frac{\mu_3}{k_3} \lambda - \nu_i^2} z + C_2^{(i)} \sin \sqrt{\frac{\mu_3}{k_3} \lambda - \nu_i^2} z & \lambda > \frac{k_3}{\mu_3} \nu_i^2 \end{cases}$$

$C_0^{(0)}, C_0^{(2)}, C_1^{(0)}, C_1^{(2)}, C_1^{(i)}, C_2^{(0)}, C_2^{(i)}$ 都是待定的常数.

对 $R_1(r), R_2(r)$ 求如下形式的解

$$R_1(r) = A^{(0)} + \sum_{i=1}^{\infty} A^{(i)} \Phi_{1,0}(r, r_c, \nu_i) \tag{28.1}$$

$$R_2(r) = B^{(0)} + \sum_{i=1}^{\infty} B^{(i)} \Phi_{1,0}(r, r_c, \nu_i) \tag{28.2}$$

其中, $A^{(0)}, B^{(0)}, A^{(i)}, B^{(i)}$ 为待定的常数.

把式(28.1), (28.2)和式(26)代入方程(12.1), (12.2)和衔接条件式(12.6), (12.7), 并注意到

$$\Phi_{1,0}''(r, r_c, \nu_i) + \frac{1}{r} \Phi_{1,0}'(r, r_c, \nu_i) = -\nu_i^2 \Phi_{1,0}(r, r_c, \nu_i) \tag{29}$$

比较系数后可得

$$C_0^{(0)} = 0, A^{(0)} = C_0^{(2)} = B^{(0)},$$

$A^{(i)}, B^{(i)}, C_1^{(i)}, C_2^{(i)}$ 则因确定其值的代数方程组的系数行列式的值小于零而只有零解.

于是, 当 $\lambda = 0$ 时

$$R_1(r) = R_2(r) = R_3(r, z) = \text{常数} \tag{30}$$

当 $\lambda > 0$ 时, 把式(28.1), (28.2)和式(27)代入式(12.1), (12.2), (12.6)和 (12.7), 并注意到式(29), 比较系数后可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{k_3}{b_1} \sqrt{\frac{\mu_3}{k_3} \lambda} C_2^{(0)} + \mu_1 \lambda A^{(0)} &= 0 \\ -\frac{k_3}{b_2} \sqrt{\frac{\mu_3}{k_3} \lambda} \left[C_2^{(0)} \cos \sqrt{\frac{\mu_3}{k_3} \lambda} b_3 - C_1^{(0)} \sin \sqrt{\frac{\mu_3}{k_3} \lambda} b_3 \right] + \mu_2 \lambda B^{(0)} &= 0 \\ C_1^{(0)} - A^{(0)} &= 0 \\ C_1^{(0)} \cos \sqrt{\frac{\mu_3}{k_3} \lambda} b_3 + C_2^{(0)} \sin \sqrt{\frac{\mu_3}{k_3} \lambda} b_3 - B^{(0)} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{31}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{k_3}{b_1} Z_i'(0) - (k_1 \nu_i^2 - \mu_1 \lambda) A^{(i)} &= 0 \\ \frac{k_3}{b_2} Z_i'(b_3) + (k_2 \nu_i^2 - \mu_2 \lambda) B^{(i)} &= 0 \\ Z_i(0) - A^{(i)} &= 0 \\ Z_i(b_3) - B^{(i)} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{32}$$

为使方程组(31)有非零解, 必须使其系数行列式等于零, 即 λ 应该是方程(33)的正根

$$\operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{\mu_3}{k_3}} \lambda b_3\right) = \frac{\left(\frac{\mu_1}{b_2} + \frac{\mu_2}{b_1}\right) k_3 \sqrt{\frac{\mu_3}{k_3}} \lambda}{\mu_1 \mu_2 \lambda - \frac{k_3}{b_1 b_2} \mu_3} \quad (33)$$

记其右端为 $G_0(\lambda)$, 易知 $G_0(\lambda)$, 在区间 $(0, \tilde{\lambda}_0)$ ($\tilde{\lambda}_0 = \frac{k_3 \mu_3}{b_1 b_2 \mu_1 \mu_2}$) 上从 0 单调下降到 $-\infty$, 在 $(\tilde{\lambda}_0, +\infty)$ 上由 $+\infty$ 单调下降到 0.

令 $\tilde{\lambda}_{0,m}$ 是方程 $b_3 \sqrt{\frac{\mu_3}{k_3}} \lambda = \frac{2m-1}{2} \pi$ ($m=1, 2, \dots$) 的根. 则在 $(0, \tilde{\lambda}_{0,1})$ 上, 函数 $y = \operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{\mu_3}{k_3}} \lambda b_3\right)$ 从 0 单调上升到 $+\infty$, 而在每一个区间 $(\tilde{\lambda}_{0,m}, \tilde{\lambda}_{0,m+1})$ 上, 它从 $-\infty$ 单调增加到 $+\infty$.

求方程 (33) 的根, 即求曲线 $y = G_0(\lambda)$ 与 $y = \operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{\mu_3}{k_3}} \lambda b_3\right)$ 的交点. 如果 $\tilde{\lambda}_{0,1} < \dots < \tilde{\lambda}_{0,M} < \tilde{\lambda}_0 < \tilde{\lambda}_{0,M+1} < \dots$, 则 $y = G_0(\lambda)$ 和 $y = \operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{\mu_3}{k_3}} \lambda b_3\right)$ 的图形, 见图 2. 从而可知:

1. 在 $(0, \tilde{\lambda}_{0,1})$ 中方程 (33) 无根;
2. 在 $(\tilde{\lambda}_{0,m}, \tilde{\lambda}_{0,m+1})$ ($m=1, 2, \dots, M-1, M+1, M+2, \dots$) 以及 $(\tilde{\lambda}_{0,M}, \tilde{\lambda}_0)$, $(\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_{0,M+1})$ 各个区间中, 方程 (33) 都有且都只有一个根.

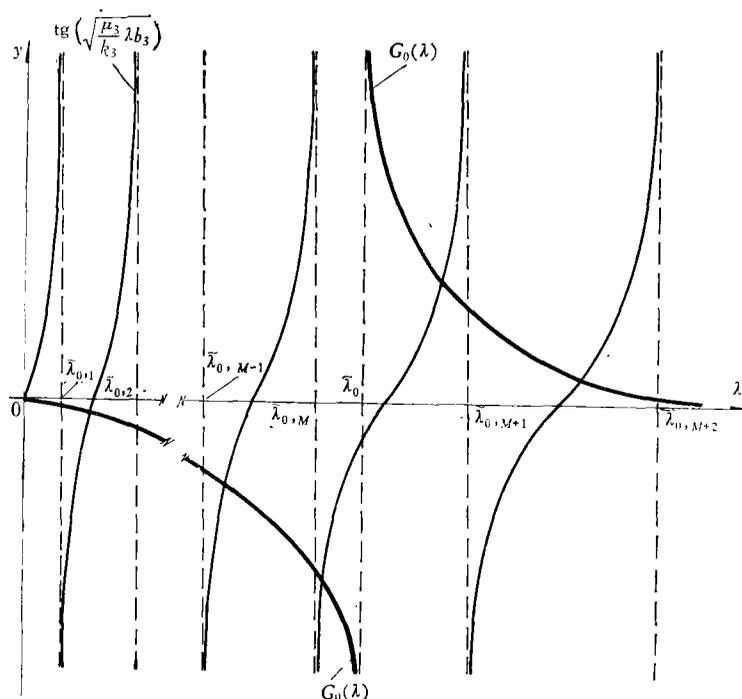


图 2

如果 $0 < \tilde{\lambda}_0 < \tilde{\lambda}_{0,1}$, 则可得 $(0, \tilde{\lambda}_0)$ 中无根, $(\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_{0,1}), (\tilde{\lambda}_{0,m}, \tilde{\lambda}_{0,m+1})$ ($m=1, 2, \dots$)

中都各有一个根。

设方程(33)的根从小到大依次是 $\lambda_j^{(0)} (j = 1, 2, \dots)$, 它们所对应的方程组(31)的非零解记为 $A_j^{(0)}, B_j^{(0)}, C_{1j}^{(0)}, C_{2j}^{(0)}$.

现在考察方程组(32). 为使其有非零解, 必须使其系数行列式为零, 即 λ 应该是下列诸方程的根

1. 当 $\lambda < \frac{k_3}{\mu_3} v_i^2$ 时

$$[A(\lambda) - B_1(\lambda)][A(\lambda) - B_2(\lambda)] = [A(\lambda) + B_1(\lambda)][A(\lambda) + B_2(\lambda)] e^{\frac{2k_3 A(\lambda)}{k_3}} \quad (34)$$

2. 当 $\lambda = \frac{k_3}{\mu_3} v_i^2$ 时

$$k_3 B_2(\lambda) + B_1(\lambda)[k_3 + B_2(\lambda)b_3] = 0 \quad (35)$$

3. 当 $\lambda > \frac{k_3}{\mu_3} v_i^2$ 时

$$\operatorname{tg}(\alpha(\lambda)b_3) = \{k_3 a(\lambda)[B_1(\lambda) + B_2(\lambda)]\} / F(\lambda) \quad (36)$$

其中

$$A(\lambda) = k_3 \sqrt{v_i^2 - \frac{\mu_3}{k_3} \lambda}, \quad B_l(\lambda) = b_l (k_l v_i^2 - \mu_l \lambda) \quad (l = 1, 2)$$

$$a(\lambda) = \sqrt{\frac{\mu_3}{k_3} \lambda - v_i^2}, \quad F(\lambda) = k_3^2 a^2(\lambda) - B_1(\lambda)B_2(\lambda)$$

一般来说, 对于所给定的各参数.

$$k_3 B_2 \left(\frac{k_3}{\mu_3} v_i^2 \right) + B_1 \left(\frac{k_3}{\mu_3} v_i^2 \right) \left[k_3 + B_2 \left(\frac{k_3}{\mu_3} v_i^2 \right) b_3 \right] \neq 0$$

故 $\lambda = \frac{k_3}{\mu_3} v_i^2$ 一般不可能是特征值.

容易证明, 在区间 $0 < \lambda < \frac{k_3}{\mu_3} v_i^2$ 中, 也没有特征值. 事实上, $A(\lambda) > 0$, 又由于 μ_3 一般至少与 μ_1, μ_2 有相同的数量级, 而 $\frac{k_3}{k_1}, \frac{k_3}{k_2} \ll 1$, 故 $B_l(\lambda) > 0 (l = 1, 2)$, 于是方程(34)的左端总小于其右端.

现在考察 $\lambda > \frac{k_3}{\mu_3} v_i^2$ 的情形. $F(\lambda)$ 是 λ 的二次函数, 其判别式为

$$b_1^2 b_2^2 \left\{ (k_2 \mu_1 - k_1 \mu_2)^2 v_i^4 + \frac{2k_3 \mu_3}{b_1 b_2} \left[k_2 \mu_1 + k_1 \mu_2 - \frac{2\mu_1 \mu_2}{\mu_3} k_3 \right] v_i^2 + \left(\frac{k_3 \mu_3}{b_1 b_2} \right)^2 \right\}.$$

注意到 $\mu_1, \mu_2 \sim \mu_3, k_1, k_2 \gg k_3$, 则该判别式大于零, 故 $F(\lambda) = 0$ 有二实根, 将它们记为 $\bar{\lambda}_{i, \text{小}}$ 和 $\bar{\lambda}_{i, \text{大}}$ ($\bar{\lambda}_{i, \text{小}} < \bar{\lambda}_{i, \text{大}}$)

注意到 $\lim_{\lambda \rightarrow \bar{\lambda}_{i,0}} F(\lambda) < 0, F(\bar{\lambda}_{i,1}) > 0 (l = 1, 2), F(+\infty) = -\infty$, 其中 $\bar{\lambda}_{i,0} = \frac{k_3}{\mu_3}$

$\cdot v_i^2, \bar{\lambda}_{i,l} = \frac{k_l}{\mu_l} v_i^2$, 我们有

$$\bar{\lambda}_{i,0} < \bar{\lambda}_{i,\text{小}} < \min(\bar{\lambda}_{i,1}, \bar{\lambda}_{i,2})$$

记方程(36)的右端为 $G_i(\lambda)$, 考虑到 $\frac{k_1}{k_3}, \frac{k_2}{k_3} \gg 1$, $\mu_1, \mu_2 \approx \mu_3$, 易知 $G_i(\lambda)$ 在 $(\tilde{\lambda}_{i,0}, \tilde{\lambda}_{i,小})$ 上从 0 单调下降到 $-\infty$, 在 $(\tilde{\lambda}_{i,小}, \tilde{\lambda}_{i,大})$ 上由 $+\infty$ 单调下降到 $-\infty$, 在 $(\tilde{\lambda}_{i,大}, +\infty)$ 上由 $+\infty$ 单调下降到 0.

令 $\tilde{\lambda}_{i,m}$ 是下面方程的根

$$b_3 \sqrt{\frac{\mu_3}{k_3} \lambda - v_i^2} = \frac{2m-1}{2} \pi, \quad m = 1, 2, \dots$$

为找出方程(36)的零点, 我们需要将 $\tilde{\lambda}_{i,0}, \tilde{\lambda}_{i,小}, \tilde{\lambda}_{i,大}$ 和 $\tilde{\lambda}_{i,1}, \dots, \tilde{\lambda}_{i,N}, \dots$ 按大小排列 作为示例, 我们不妨假定

$\tilde{\lambda}_{i,0} < \tilde{\lambda}_{i,1} < \dots < \tilde{\lambda}_{i,M} < \tilde{\lambda}_{i,小} < \dots < \tilde{\lambda}_{i,N} < \tilde{\lambda}_{i,大} < \dots$ 这一情形下 $G_i(\lambda)$ 和 $\text{tg}(a(\lambda)b_3)$ 的图形见图 3. 从而可知

1. 在 $(\tilde{\lambda}_{i,0}, \tilde{\lambda}_{i,1})$ 中方程(36)无根;
2. 在 $(\tilde{\lambda}_{i,m}, \tilde{\lambda}_{i,m+1})$ ($m=1, 2, \dots, M-1, M+1, \dots, N-1, N+1, N+2, \dots$) 以及 $(\tilde{\lambda}_{i,M}, \tilde{\lambda}_{i,小}), (\tilde{\lambda}_{i,小}, \tilde{\lambda}_{i,M+1}), (\tilde{\lambda}_{i,N}, \tilde{\lambda}_{i,大}), (\tilde{\lambda}_{i,大}, \tilde{\lambda}_{i,N+1})$ 各区间中, 方程(36)均只有一个根.

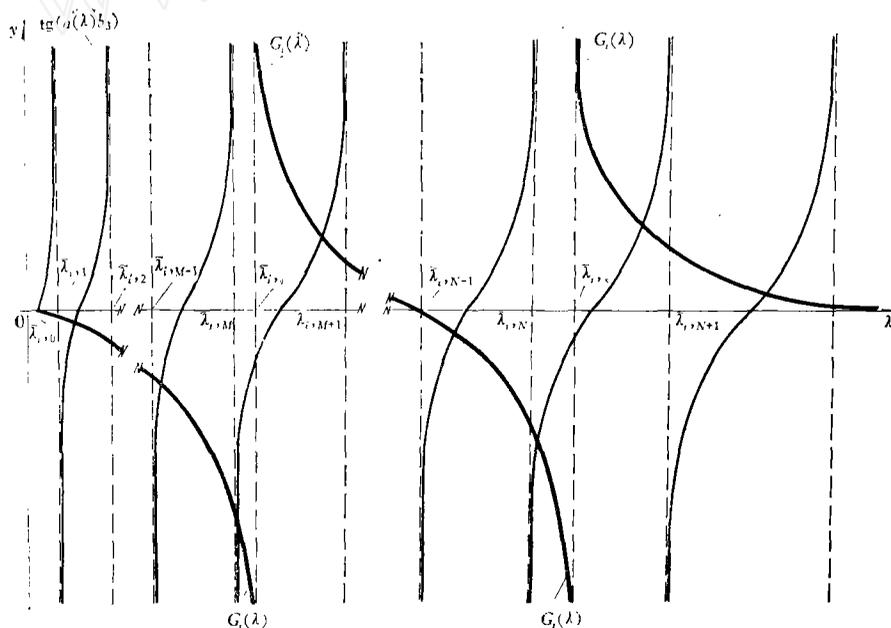


图 3

对其他情形, 可完全类似地进行讨论.

设方程(36)的根由小到大依次为 $\lambda_j^{(i)} (j=1, 2, \dots)$ 其对应的方程组(32)的解记为 $A_j^{(i)}, B_j^{(i)}, C_{1j}^{(i)}, C_{2j}^{(i)}$.

这样, 特征值问题(12)的特征值有

$$0, \lambda_j^{(0)}, \lambda_j^{(i)} \quad (i, j = 1, 2, \dots)$$

其对应的特征向量为

$$R_1^{(0)} = R_2^{(0)} = R_3^{(0)} = C \quad (37)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{j1}^{(0)} &= A_j^{(0)} \\ R_{j2}^{(0)} &= B_j^{(0)} \\ R_{j3}^{(0)} &= C_{ij}^{(0)} \cos \sqrt{\frac{\mu_3}{k_3} \lambda_j^{(0)} z} + C_{2j}^{(0)} \sin \sqrt{\frac{\mu_3}{k_3} \lambda_j^{(0)} z} \end{aligned} \right\} \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (38)$$

和

$$\left. \begin{aligned} R_{j1}^{(i)} &= A_j^{(i)} \Phi_{1,0}(r, r_c, \nu_i) \\ R_{j2}^{(i)} &= B_j^{(i)} \Phi_{1,0}(r, r_c, \nu_i) \quad (i, j = 1, 2, \dots) \\ R_{j3}^{(i)} &= \left[C_{1j}^{(i)} \cos \sqrt{\frac{\mu_3}{k_3} \lambda_j^{(i)} - \nu_i^2 z} + C_{2j}^{(i)} \sin \sqrt{\frac{\mu_3}{k_3} \lambda_j^{(i)} - \nu_i^2 z} \right] \Phi_{1,0}(r, r_c, \nu_i) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

我们看到 $\tilde{\lambda}_{i,0} = \frac{k_3}{\mu_3} \nu_i^2 \quad (i = 1, 2, \dots)$

$$\tilde{\lambda}_{i,m} = \frac{k_3}{\mu_3} \left[\nu_i^2 + \left(\frac{2m-1}{2b_3} \pi \right)^2 \right] \quad (i = 0, 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots, \nu_0 = 0)$$

随 i 的增大而增大, 所以我们可以根据计算精度的要求, 算得从小到大顺序排列的特征值中的前 n 个.

当 i, j 都变时, $\lambda_j^{(i)}$ 可能相重, 此时实质上相当于一个特征值对应若干个特征函数. 由于 $\lambda_{j_1}^{(i_1)} = \lambda_{j_2}^{(i_2)}$ 时必有 $i_1 = i_2$ (否则 $i_1 = i_2$, 它们都是对应于 ν_i 的根, 导致 $j_1 = j_2$), 而

$$\iint_{\Omega} \Phi_{1,0}(r, r_c, \nu_{i_1}) \Phi_{1,0}(r, r_c, \nu_{i_2}) d\Omega = 2\pi \int_{r_c}^{r_e} \Phi_{1,0}(r, r_c, \nu_{i_1}) \Phi_{1,0}(r, r_c, \nu_{i_2}) r dr = 0$$

因此相应特征函数依然正交, 即

$$(BR_{j_1}^{(i_1)}, R_{j_2}^{(i_2)}) = 0$$

现在求定常部分的解, 问题 (6) 在此情况下化为

$$k_1 \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_1}{\partial r} \right) + \frac{k_3}{b_1} \frac{\partial f_3}{\partial z} \Big|_{z=0} = \mu_1 \theta \quad (40.1)$$

$$k_2 \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_2}{\partial r} \right) - \frac{k_3}{b_2} \frac{\partial f_3}{\partial z} \Big|_{z=b_3} = \mu_2 \theta \quad (40.2)$$

$$k_3 \left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_3}{\partial r} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2} \right) = \mu_3 \theta \quad (40.3)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial r} \Big|_{r_c} = \frac{\partial f_2}{\partial r} \Big|_{r_c} = \frac{\partial f_3}{\partial r} \Big|_{r_c} = 0 \quad (40.4)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial r} \Big|_{r_c} = -\frac{q}{2\pi r_c k_1 b_1} \quad (40.5)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial r} \Big|_{r_c} = \frac{\partial f_3}{\partial r} \Big|_{r_c} = 0 \quad (40.6)$$

$$f_3(r, 0) = f_1(r) \quad (40.7)$$

$$f_2(r, b_3) = f_2(r) \quad (40.8)$$

先求 Poisson 方程 (40.3) 在条件 (40.4), (40.6) — (40.8) 下的解.

令 $f_3 = w + \frac{\mu_3 \theta}{2k_3} z^2$, 则 w 应满足下列方程和边界条件

$$k_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (41.1)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r_c} = \left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r_c} = 0 \quad (41.2)$$

其解有式(26)的形式,则

$$f_3(r, z) = \frac{\mu_3 \theta}{2k_3} z^2 + C_1^{(0)} z + C_2^{(0)} + \sum_{i=1}^{\infty} (C_1^{(i)} e^{v_i z} + C_2^{(i)} e^{-v_i z}) \Phi_{1,0}(r, r_c, v_i) \quad (42)$$

把式(42)代入(40),解之得

$$f_1 = \frac{1}{4k_1} \left(\mu_1 \theta - \frac{k_3}{b_1} C_1^{(0)} \right) r^2 + A_1 \ln r + \frac{k_3}{b_1 k_1} \sum_{i=1}^{\infty} (C_1^{(i)} - C_2^{(i)}) \frac{1}{v_i} \Phi_{1,0}(r, r_c, v_i) + A_2 \quad (43)$$

$$f_2 = B_1 \ln r - \frac{k_3}{b_2 k_2} \sum_{i=1}^{\infty} (C_1^{(i)} e^{v_i b_3} - C_2^{(i)} e^{-v_i b_3}) \frac{1}{v_i} \Phi_{1,0}(r, r_c, v_i) + B_2 \quad (44)$$

其中 $A_i, B_i (i=1, 2)$ 是任意常数

由边界条件可定得

$$A_1 = \frac{q}{2\pi k_1 b_1 \left(\frac{r_c^2}{r_e^2} - 1 \right)} \quad (45)$$

$$C_1^{(0)} = \frac{b_1}{k_3} \left[\mu_1 \theta - \frac{q}{\pi b_1 (r_e^2 - r_c^2)} \right] \quad (46)$$

$$B_1 = 0 \quad (47)$$

利用衔接条件(40.7), (40.8), 把各项按特征函数系 $\{\Phi_{1,0}(r, r_c, v_i)\}$ 展开并比较系数后可定得

$$A_2 = C_2^{(0)} - \frac{q}{2\pi k_1 b_1 (r_e^2 - r_c^2)^2} \left\{ \frac{1}{4} (r_e^4 - r_c^4) - r_c^2 \left[r_e^2 \left(\ln r_c - \frac{1}{2} \right) - r_c^2 \left(\ln r_c - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \quad (48)$$

$$B_2 = \frac{b_3}{k_3} \left\{ \frac{1}{2} \mu_3 \theta b_3 + b_1 \left[\mu_1 \theta - \frac{q}{\pi b_1 (r_e^2 - r_c^2)} \right] \right\} + C_2^{(0)} \quad (49)$$

$$C_1^{(i)} = \left[q \left(1 - \frac{k_3}{k_2 b_2 v_i} \right) \Phi_{1,0}(r_c, r_c, v_i) \right] / \left\{ \pi k_1 b_1 v_i^2 \left[\left(1 - \frac{k_3}{k_1 b_1 v_i} \right) \left(1 - \frac{k_3}{k_2 b_2 v_i} \right) - \left(1 + \frac{k_3}{k_1 b_1 v_i} \right) \left(1 + \frac{k_3}{k_2 b_2 v_i} \right) e^{2v_i b_3} \right] \left[r_e^2 \Phi_{1,0}^2(r_c, r_c, v_i) - r_c^2 \Phi_{1,0}^2(r_c, r_c, v_i) \right] \right\} \quad (50)$$

$$C_2^{(i)} = - \frac{1 + \frac{k_3}{k_2 b_2 v_i}}{1 - \frac{k_3}{k_2 b_2 v_i}} e^{2v_i b_3} C_1^{(i)} \quad (51)$$

把定得各常数代入式(43), (44)和(42), 便得到定常部分的解 $f(x, y, z)$, 把它和特征函数(37)~(39)经规一化后代入第二节中所得的一般情形时的解, 便得到圆形均质地层中仅有一口圆心井时的解 $S(x, y, z, t)$.

四、越流量和地面沉降量

在多油层油田的开发中,特别是在地下水资源的评价和利用中,最受关注的问题之一是确定越流量。抽水层各点的越流量显然为

$$q(x, y, t) = -k_3 \left. \frac{\partial S_3}{\partial z} \right|_{z=0}$$

对各层都为均质的圆形地层中仅有一口圆心井的典型情形,在上一节中我们已求得 $S_3(r, z, t)$, 从而可知 $q(r, t)$ 。整个抽水层中的越流量 $Q(t)$ 则可按公式

$$Q(t) = -2\pi k_3 \int_{r_c}^{r_e} r \left. \frac{\partial S_3}{\partial z} \right|_{z=0} dr$$

算得。

对边界为任意的,其上有任意布置的多口井的有限封闭含水层系,当各层都为均质时,则可用平均值法求得总越流量 $Q(t)$ 。

以 dQ 乘方程 (1.1)–(1.3) 的两端,然后沿着整个面积 Q 求积分,应用 Green 公式并注意到边界条件 (2.1)–(2.4),可得到平均降深 $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3$ 所满足的微分方程

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}(t) + \frac{k_3}{k_1 b_1} \left. \frac{\partial \bar{S}_3}{\partial z} \right|_{z=0} &= \frac{\mu_1}{k_1} \frac{d\bar{S}_1}{dt} \\ - \frac{k_3}{k_2 b_2} \left. \frac{\partial \bar{S}_3}{\partial z} \right|_{z=b_2} &= \frac{\mu_2}{k_2} \frac{d\bar{S}_2}{dt} \\ \frac{\partial^2 \bar{S}_3}{\partial z^2} &= \frac{\mu_3}{k_3} \frac{\partial \bar{S}_3}{\partial t} \end{aligned} \right\}$$

其中

$$\bar{S}_i = \iint_Q S_i dQ / \text{mes} Q \quad (\text{mes} Q \text{ 是区域 } Q \text{ 的面积})$$

$$\bar{Q}(t) = \sum_{i=1}^n q^{(i)}(t) / k_1 b_1 \text{mes} Q$$

和相应的初始条件和衔接条件。

我们注意到,当 $\bar{Q}(t) = \bar{Q} = \text{常数}$, $\bar{S}_{10} = \bar{S}_{20} = \bar{S}_{30}$ 时,我们得到的平均化后的定解问题不是别的,正是文献[2]中研究的对圆形地层中有一口圆心井时的类似问题在平均化后得到的方程组和定解条件。所以完全可以如文献[2]那样用 Laplace 变换求得解 \bar{S}_1, \bar{S}_2 和 $\bar{S}_3(z)$, 进而可求得总越流量 $Q(t)$

$$Q(t) = - \iint_Q k_3 \left. \frac{\partial S_3}{\partial z} \right|_{z=0} dQ = -k_3 \left(\frac{\partial}{\partial z} \iint_Q S_3 dQ \right)_{z=0} = -k_3 \frac{\partial \bar{S}_3}{\partial z}$$

现在考虑地面沉降问题。既解得了平均降深,仿照文献[2]的做法,我们已可得到任意形状的有界地层上从井群抽取地下水时,所引起的地面平均沉降量与时间的关系。但是,地面沉降问题所以引起人们的严重关切,不仅在于平均沉降量,更重要的是在于地面沉降的不均匀性可能引起大型建筑、道路和地下管线等的变形甚至断裂。本文在第三节中得到的精确解,恰好可以作为解决大城市的地面沉降问题的一个方面的理论依据。事实上,知道了含水层中的特别是往往具有很可观的压缩性的弱渗透夹层中的降深,便可根据

某种压密模式计算压密量,即地面沉降量.例如,根据线性压密的假定,因压力降低而引起的弱渗透夹层每点的压密量 η_3 为

$$\eta_3(r, t) = \gamma \int_0^{b_3} C_3 \Delta S_3(r, z, t) dz.$$

含水层的压密量 $\eta_i (i = 1, 2)$ 为

$$\eta_i(r, t) = \gamma C_i \Delta S_i(r, t) b_i$$

其中, γ 是水的重率; C_i 是各层的铅直压缩系数.

因为这三层的压密引起的地面沉降量为

$$\eta(r, t) = \sum_{i=1}^3 \eta_i$$

因沉降而引起的地面倾斜度 $\alpha(t)$ 为

$$\alpha(t) = \frac{\partial \eta}{\partial r}$$

这样,一方面我们可以预测地面沉降量与抽水量以及位置和时间关系,给出危险的警戒线,并及时采取相应措施.例如,限制抽汲量,进行回灌等等,以及作出效果预估.另一方面,可以根据所需要的采水量,选择井数和布井的合理位置,使得它们与要保护的大型建筑、道路和地下管线等保持必要的距离.对于落在水井的压降漏斗的陡急区内的建筑物,应注意采取必要的工程地质措施.

参 考 文 献

- [1] Neuman, S. P., Withespoon, P. A., Theory of flow in a confined two-aquifer system, *Water Resource Research*, **5**, 4(1969), 803—816.
- [2] 刘慈祥, 饱水土层的一维压密问题, *力学*, 3(1977), 191—194.
- [3] 陈钟祥, 姜礼尚, 双重孔隙介质渗流方程组的精确解, *中国科学*, 2(1980), 152—165.
- [4] 索伯列夫, C. П., 泛函分析在数学物理中的应用, 王柔怀等译, 科学出版社 (1959).
- [5] 米赫林, C. Г., 二次泛函的极小问题, 科学出版社 (1964).

EXACT SOLUTION FOR THE PROBLEM OF CROSSFLOW IN A BOUNDED TWO-AQUIFER SYSTEM WITH AN AQUITARD

Chen Zhongxiang

(Scientific Research Institute of Petroleum Exploration and Development, Beijing)

Pang Zhiyuan

(Guizhou University)

Jiang Lishang

(Peking University)

Abstract

The structure of solution for the general case of flow in a bounded two-aquifer system with a semipervious interlayer and only one aquifer producing has been found, and the exact solution for the typical case of a homogeneous radial system with only one well located at its centre was obtained. This paper provides a theoretical and practical basis for the evaluation and utilization of water resources as well as for oil production and water injection in multi-layer oil reservoirs. It can also be used to solve the problem of land subsidence in large cities.