关于弹性动力学问题的应力计算

李子才　于春生　　曹志远

（上海计算技术研究所）（中国科学院工程力学研究所）

本文指出弹性动力学问题的守恒型差分格式[1]仅仅是一种带积分近似的有限元．该格式相联缀的节点数较少，在规则网格内点上同于有限差分格式．其次，本文提出一种新的应力计算公式，在相同部分网格情况下，其精度高于有限元．而且应力解在小区域上满足运动方程．

设弹性体为有限区域（多角形）Ω，其边界 $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$，且有 $\mathrm{meas}(\Gamma_1)>0$．Sobolev 空间 $H_1^0(\Omega)$ 表示所有函数及其导数平方可积，且满足 $U|_{\Gamma_1}=0$ 的函数全体．我们考虑弹性动力学变分问题

$$\left(\rho\frac{\partial^2U}{\partial t^2},\tilde{U}\right)+I(U,\tilde{U})=f(\tilde{U})\qquad\forall\tilde{U}\in H_1^0(\Omega),\ t\geqslant 0\tag{1}$$

式中解向量 $U=(uv)^T\in H_1(\Omega)$，

$$\left(\rho\frac{\partial^2U}{\partial t^2},\tilde{U}\right)=\iint_\Omega\rho\left(\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\tilde{u}+\frac{\partial^2U}{\partial t^2}\tilde{v}\right)d\Omega,$$

$$I(U,\tilde{U})=G\iint_\Omega\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\right)+\frac{2\mu}{1-2\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\right)\right]d\Omega,$$

$$f(\tilde{U})=\iint_\Omega(f_x\tilde{u}+f_y\tilde{v})d\Omega+\int_{\Gamma_2}(p_x\tilde{u}+p_y\tilde{v})dl,$$

其中 G，μ 是弹性常数，f_x，f_y 是体力分量，p_x，p_y 点边界 Γ_2 上面力分量，ρ 是材料密度．

任一时刻 t，我们用矩形网格 $\square_{ij}$ 和三角形网格 $\triangle_{ij}$ 剖分区域 Ω，即

$$\Omega=\cup\square_{ij}\cup\triangle_{ij}.$$

在 $\triangle_{ij}$ 和 $\square_{ij}$ 上分别取线性和双线性插值函数作可取函数 $\tilde{U}$[3]．本文采用下列积分近似：

$$\left.\begin{aligned}&\iint_{\square_{ij}}\varphi\,d\Omega\approx\frac{\mathrm{Area}(\square_{ij})}{4}\sum_{k=1}^{4}\varphi_k\\&\iint_{\triangle_{ij}}\varphi d\Omega\approx\frac{\mathrm{Area}(\triangle_{ij})}{4}\sum_{k=1}^{3}\alpha_k\varphi_k\qquad\alpha_1=2,\ \alpha_2=\alpha_3=1\\&\int_{\Gamma_2}\varphi dl\approx\frac{1}{2}\mathrm{meas}(\Gamma_2)(\varphi_1+\varphi_2)\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

本文于 1980 年 1 月收到．

式中 $k=1,2,3,4$ 是单元 $\square_{ij}$ 和 $\triangle_{ij}$ 的角点或线段 Γ_2 的端点．类似于文献[1]，我们得到差分格式：

$$\rho(U_n^{m+1}-2U_n^m+U_n^{m-1})/\Delta t^2=-\mathrm{D}^{-1}\mathrm{A}U_n^m-F_n^m \tag{3}$$

其中节点位移向量 $U_n^m=U_n(m\Delta t)$，Δt 是时间步长，节点荷载向量 $F_n^m=F_n(m\Delta t)$，A 是正定对称稀疏矩阵，它由 $I(U,\widetilde{U})$ 离散得到，D是对角阵．在此我们采用了时间的中心差分格式．给定初值，容易证明当满足条件

$$\Delta t\leqslant 2\sqrt{\rho}/\sqrt{\lambda_{\max}(\mathrm{D}^{-1}\mathrm{A})}$$

时我们得稳定的解 U_n．$\lambda_{\max}(\mathrm{D}^{-1}\mathrm{A})$ 是 $\mathrm{D}^{-1}\mathrm{A}$ 的最大特征值．然后按下述格式计算单元 $\square_{ij}$ 和 $\triangle_{ij}$ 各边中点的平均应力．

首先，从虚功方程(1)的离散形式出发，用角点的平均应力作单元边中点应力，以单元 $\square_{ij}$ 为例(图 1)，我们有

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{xA}&=\frac{1}{2}(\sigma_{x_1}+\sigma_{x_2})=2G\left[\frac{u_2-u_1}{h_i}+\frac{\mu}{1-2\mu}\left(\frac{u_2-u_1}{h_i}+\frac{v_3-v_1+v_4-v_2}{2k_j}\right)\right]\\
\sigma_{yB}&=\frac{1}{2}(\sigma_{y1}+\sigma_{y3})=2G\left[\frac{v_3-v_1}{k_j}+\frac{\mu}{1-2\mu}\left(\frac{v_3-v_1}{k_j}+\frac{u_4-u_3+u_2-u_1}{2h_i}\right)\right]\\
\tau_{xyA}&=\frac{1}{2}(\tau_{xy1}+\tau_{xy2})=G\left(\frac{v_2-v_1}{h_i}+\frac{u_3-u_1+u_4-u_2}{2k_j}\right)\\
\tau_{yxB}&=\frac{1}{2}(\tau_{yx1}+\tau_{yx3})=G\left(\frac{u_3-u_1}{k_j}+\frac{v_2-v_1+v_4-v_3}{2h_i}\right)\\
&\sigma_{xC},\ \sigma_{yD},\ \tau_{yxD}\ \text{和}\ \tau_{xyC}\ \text{可类推．}
\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

然后，用相邻二单元边中点应力的平均值作中点计算应力(图 2)，即

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{\sigma}_{x(i+\frac{1}{2},j)}=(k_j\sigma^{\text{上}}_{x(i+\frac{1}{2},j)}+k_{j-1}\sigma^{\text{下}}_{x(i+\frac{1}{2},j)})/(k_j+k_{j-1})\\
&\bar{\tau}_{yx(i,j+\frac{1}{2})}=(h_i\tau^{\text{右}}_{yx(i,j+\frac{1}{2})}+h_{i-1}\tau^{\text{左}}_{yx(i,j+\frac{1}{2})})/(h_i+h_{i-1})\\
&\text{类似地可得}\ \bar{\tau}_{xy(i+\frac{1}{2},j)}\ \text{和}\ \bar{\sigma}_{y(i,j+\frac{1}{2})}.
\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

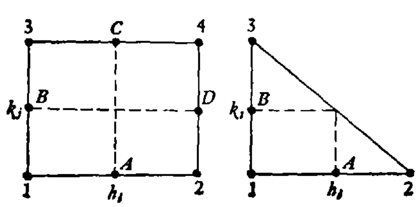

图 1　单元 $\square_{ij}$ 与 $\triangle_{ij}$

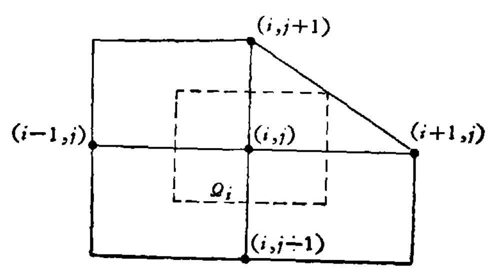

图 2　内点 (i,j)

其中应力上标“上，下，右，左”分别表示中点“上方，下方，右侧和左侧”单元，下标例如

$$\left(i+\frac{1}{2},j\right)$$

表示边 $\overline{ij}$ 的中点，k_j 和 h_i 为步长．

注意：从公式(4) 和 (5)可见二互相垂直面上剪应力计算公式不同，数值上亦有微小差异．

不难证明，这种应力格式在图2虚线区域上严格满足运动方程．这一点与有限元大不相同[2-3]，通常有限元应力解不满足运动方程！本文应力格式曾用于静力问题，并获得好的结果．类似地，作者曾提出一种节点应力计算格式，使有限元节点应力满足节点邻域的平衡方程．

我们以二端嵌固的原梁为例，本文方法与**网格加密一倍**的三角形及矩形剖分的有限元方法进行比较，结果列于下表

数据来源		σ_{xM} (kg/cm²)	M_{xM} (kg-cm/cm)	τ_{xyM} (kg/cm²)	Q_{xM} (kg/cm)
本文方法		4.03	257	1.22	17.0
有限元	△剖分	3.39	206	0.899	17.1
	□剖分	4.19	268	1.18	17.0
解析解		—	251	—	17.8

可见，本文方法无论在精度，计算量及机器存储方面均优于有限元．

参　考　文　献

[1] Courant, R., Friedriche, K. O. and Lewy, H., Über die Partiellen Differenzengleichungen der Physik Math. Ann., **100** (1928—1929), 32—74.

[2] Strang, G. and Fix, G., An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall INC, Englewood., Cliff. N.J., (1973).

[3] 冯　康. 基于变分原理的差分格式，应用数学与计算数学 2, 4(1965), 237—261.

STRESS CALCULATION OF ELASTO-DYNAMICS

Li Zical　Yu Chunsheng

(Shanghai Institute of Computing Technique)

Cao Zhiyuan

(Institute of Engineering Mechanics. Academic Sinica)

Abstract

In this paper, we present that the conservation scheme of elasto-dynamic is just a kind of finite element method with integral approximation. On regular mesh's internal points it is the same as difference method. In addition, a new computing art of stress is used. With the same mesh conditions, the stress solution not only satisfies the dynamic equations of motion in a small area, but its precision is also higher than that by finite element method.