广 义 杂 交 元

陈 万 吉
（大连工学院工程力学研究所）

提要　在有限元分析中，变分原理已成为建立各种有限元模型的依据．本文从放松连续性条件的胡海昌-鹫津广义变分原理出发建立了一类广义杂交元．现有的应力杂交模型[1]，位移杂交模型[2]，广义杂交应力模型[3]，都可以看成是广义杂交模型的特殊形式．

本文还讨论了其他可能类型的新的杂交模型，以及这些单元的场变量选择原则、收敛要求及秩的条件．

除了对各类杂交元进行统一的理论分析外，还对各单元列式做了比较，指明其便于实际应用的形式．

一、前　　言

在对有限元法的研究和应用中，变分原理起着重要的作用．正是将变分原理引入有限元法中，才使有限元法有了极大的发展．首先应用势能原理的是 Melosh (1963)，随后 Jones (1964)，卞学璜 (1964)，VeuBeke (1964)，董平 (1968) 等人应用了各类修正的变分原理．尤其是卞学璜教授最先提出和应用修正的余能原理建立杂交应力模型，并相继对杂交应力模型开展了一系列的研究．董平应用修正的势能原理建立杂交位移模型，Wolf 应用修正的 Reissner 变分原理建立广义杂交应力模型都进一步丰富了杂交元的内容．

对变分原理的应用总是从最简单的二个极值原理开始，只是在遇到某些困难，才应用广义变分原理，从习惯上考虑总是希望用得越简单越好．卞学璜教授在应用修正的余能原理时，曾经指出应用修正的 Reissner 变分原理建立杂交模型“在原理上，可以对这些变量，假定近似函数并可以列出有限元法的公式．然而，由于要大量的步骤，这相应的有限元模型是否能有任何实际的意义，是有疑问的”[4]．但是，后来 Wolf 就是应用这个修正的变分原理建立了广义杂交应力模型[3]，并做了具体应用，收到某些好处．可见有必要进一步对放松连续性条件的胡海昌-鹫津广义变分原理进行研究．

由胡海昌-鹫津广义变分原理建立杂交模型尚未有人尝试过．但是，K. Washizu (鹫津)等曾就这个原理及其在有限元法中的可能应用有过讨论[5,6]．

从后面的讨论中可以看出，由放松连续性条件的胡海昌-鹫津广义变分原理建立杂交模型，虽然场变量增多，推导步骤增加，但是，理论分析更概括，更深刻，在列式上也可以给出最有利的形式．

本文于 1980 年 12 月收到．

二、有限元法中的广义变分原理

在有限元法中胡海昌-鹫津广义变分原理的一种形式为求下列泛函的驻值：

$$\pi_{G1}=\sum_e\iiint_{V_e}\left\{A(\varepsilon_{ij})-\sigma_{ij}\left[\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]-\bar{F}_iu_i\right\}dv$$
$$-\iint_{s_\sigma}\bar{T}_iu_ids-\iint_{s_u}T_i(u_i-\bar{u}_i)ds \tag{1}$$

其中，V_e：第 e 个单元体；$A(\varepsilon_{ij})$：应变能密度；ε_{ij}：应变张量；u_i：位移分量；σ_{ij}：应力张量；$\bar{F}_i$：体积力分量；T_i：边界力分量；s_σ，s_u：分别为已知边界力（$\bar{T}_i$），已知边界位移（$\bar{u}_i$）的边界．

泛函 π_{G1} 有三个自变量函数：ε_{ij}，σ_{ij}，u_i．显然，它对场变量还有一定的连续性要求，但是却比势能原理容易满足，刘世宁，陈树坚[12]，Lee 和卞学鐄[7]等人先后用它处理板、壳问题，在单元中分别假定线性分布的法向位移和转角，从而满足单元间的协调要求，单元内的转角与位移的协调条件（即几何关系）由（1）式中第二项积分满足，为了与杂交模型区别，卞学鐄教授仍把它称之为混合型（混合变分）．

有限元法中胡海昌-鹫津广义变分原理的另一种形式为：

$$\pi_{G2}=\sum_e\iiint_{V_e}\{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-A(\varepsilon_{ij})+(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)u_i\}dv-\iint_{s_\sigma}(T_i-\bar{T}_i)u_ids$$
$$-\iint_{s_u}T_i\bar{u}_ids \tag{2}$$

π_{G2} 有三个自变量函数，ε_{ij}，σ_{ij}，u_i．它对场变量也有一定的连续性要求，具体应用时往往把应力和位移作为节点参数而保证单元间的协调要求．这种混合模型的节点参数多，不能保证刚度阵的正定性，但方法简单．

如果在（1）式中代入分部积分公式：

$$\iiint_{V_e}\sigma_{ij}\cdot u_{i,j}dv=\iint_{s_e}\sigma_{ij}n_ju_ids-\iiint_{V_e}\sigma_{ij,j}\cdot u_idv \tag{3}$$

只有当（3）式中关于 s_e 上的积分中所有单元间部分的和为零时才有 $\pi_{G1}=-\pi_{G2}$．

π_{G1} 和 π_{G2} 实际上是经典胡海昌-鹫津广义变分原理应用分片连续，部分保留单元间函数连续性的一种有限元形式，值得注意的是 π_{G1} 通常不等于 π_{G2}．

进一步，在有限元法中放松连续性条件的胡海昌-鹫津广义变分原理的一种形式为求下列泛函的驻值：

$$\pi_{mG1}=\sum_e\iiint_{V_e}\left\{A(\varepsilon_{ij})-\sigma_{ij}\left[\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]\right.$$
$$\left.-\bar{F}_iu_i\right\}dv-\sum_e\iint_{s_e}T_i(u_i-\tilde{u}_i)ds$$
$$+\iint_{s_\sigma}[(T_i-\bar{T}_i)u_i-T_i\tilde{u}_i]ds-\iint_{s_u}T_i(\tilde{u}_i-\bar{u}_i)ds \tag{4}$$

其中，s_e：第 e 个单元的边界；u_i：单元内的位移函数；$\tilde{u}_i$：单元之间交界面上的公共位移函数，T_i：单元的边界力，是单元应力 σ_{ij} 的函数.

另一种形式可以由(4)式利用分部积分公式(3)得到：

$$\pi_{mG2}=\sum_e \iiint_{V_e} \{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-A(\varepsilon_{ij})+(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)u_i\}dv$$

$$-\sum_e \iint_{s_e} T_i\tilde{u}_i ds+\iint_{s_\sigma}\bar{T}_i\tilde{u}_i ds-\left[\iint_{s_u} T_i(\bar{u}_i-\tilde{u}_i)ds-\iint_{s_\sigma}(\bar{T}_i-T_i)(u_i-\tilde{u}_i)\,ds\right] \quad (5)$$

由(4)式无条件地推出(5)式即证明了 $\pi_{mG1}=-\pi_{mG2}$.

π_{mG1} 和 π_{mG2} 各自有四个自变量函数：σ_{ij}, ε_{ij}, u_i, $\tilde{u}_i$，由此建立的模型可称之为广义杂交元. π_{mG1} 和 π_{mG2} 可以由经典胡海昌-鹫津广义变分原理推出[6]，实际上，π_{mG1} 和 π_{mG2} 是应用分片连续，放松了单元间连续性要求的一种有限元形式. 由于位移是节点参数，因此泛函 π_{mG1} 和 π_{mG2} 中的最后一项积分可为零.

三、广义杂交元模型

为了叙述的方便，我们先建立广义杂交模型，然后再适当地加入场变量的约束条件，建立其他各类杂交模型. 由于 $\pi_{mG2}=-\pi_{mG1}$，因此，以后的讨论只用 π_{mG2}.

1. 广义杂交模型：

对一个单元可以如下选择场变量：

$$\left.\begin{aligned} &\underset{\sim}{\varepsilon}=\underset{\sim}{N}\underset{\sim}{\alpha}\\ &\underset{\sim}{\sigma}=\underset{\sim}{P}\underset{\sim}{\beta}\ \text{则}\ \underset{\sim}{T}=\underset{\sim}{R}\underset{\sim}{\beta}\\ &\underset{\sim}{u}=\underset{\sim}{F}\underset{\sim}{q}^e\\ &\underset{\sim}{\tilde{u}}=\underset{\sim}{L}\underset{\sim}{q}^e \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

其中，$\underset{\sim}{\varepsilon}$, $\underset{\sim}{\sigma}$, $\underset{\sim}{T}$, $\underset{\sim}{u}$, $\underset{\sim}{\tilde{u}}$ 分别为单元的应变，应力，边界力，单元内位移函数，单元边界位移函数向量. $\underset{\sim}{N}$, $\underset{\sim}{P}$, $\underset{\sim}{R}$, $\underset{\sim}{F}$, $\underset{\sim}{L}$ 为对应的插值多项式函数矩阵，其中 $\underset{\sim}{P}$ 与 $\underset{\sim}{R}$ 相关. $\underset{\sim}{\alpha}$ 和 $\underset{\sim}{\beta}$ 为单元内的独立参数，$\underset{\sim}{q}^e$ 为单元的节点参数.

将(6)式代入(5)式中得：

$$\pi_{mG2}=\sum_e\left\{\iiint_{V_e}\left(\underset{\sim}{\alpha}^T\underset{\sim}{N}^T\underset{\sim}{P}\underset{\sim}{\beta}-\frac{1}{2}\underset{\sim}{\alpha}^T\underset{\sim}{N}^T\underset{\sim}{E}\underset{\sim}{N}\underset{\sim}{\alpha}+\underset{\sim}{\beta}^T\underset{\sim}{P}_1^T\underset{\sim}{F}\underset{\sim}{q}^e\right)dv\right.$$

$$\left.-\iint_{s_e}\underset{\sim}{\beta}^T\underset{\sim}{R}^T\underset{\sim}{L}\underset{\sim}{q}^e ds\right\}-\underset{\sim}{q}^T\underset{\sim}{Q} \quad (7)$$

其中，$\underset{\sim}{E}$ 是弹性常数矩阵；$\underset{\sim}{P}_1$ 是 $\underset{\sim}{P}$ 经微分运算 $(\sigma_{ij,j})$ 求得的多项式函数矩阵；$\underset{\sim}{q}$ 是节点位移向量.

$$\underset{\sim}{q}^T\underset{\sim}{Q}=-\sum_e\iiint_{V_e}\bar{F}_i u_i dv-\iint_{s_\sigma}\bar{T}_i\tilde{u}_i ds$$

令，

$$\underset{\sim}{D}=\iiint_{V_e}\underset{\sim}{N}^T\underset{\sim}{P}dv;\qquad \underset{\sim}{H}=\iiint_{V_e}\underset{\sim}{N}^T\underset{\sim}{E}\underset{\sim}{N}dv\qquad \underset{\sim}{W}=\iiint_{V_e}\underset{\sim}{P}_1^T\underset{\sim}{F}dv\qquad \underset{\sim}{G}=\iint_{s_e}\underset{\sim}{R}^T\underset{\sim}{L}ds$$

则，

$$\pi_{mG2}=\sum_{e}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}^{T}\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}-\frac{1}{2}\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}^{T}\underset{\sim}{H}\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}+\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{T}\underset{\sim}{W}\underset{\sim}{\boldsymbol{q}}^{e}-\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{T}\underset{\sim}{G}\underset{\sim}{\boldsymbol{q}}^{e}\right)-\underset{\sim}{\boldsymbol{q}}^{T}\underset{\sim}{Q} \tag{8}$$

由 $\frac{\partial\pi_{mG2}}{\partial\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}}=0$，$\frac{\partial\pi_{mG2}}{\partial\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}}=0$

得：

$$\sum_{e}[\underset{\sim}{H}\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}-\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}]=0 \tag{9}$$

$$\sum_{e}[\underset{\sim}{D}^{T}\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}+(\underset{\sim}{W}-\underset{\sim}{G})\underset{\sim}{\boldsymbol{q}}^{e}]=0 \tag{10}$$

由于 $\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}$ 和 $\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}$ 对各单元是独立参数，因此可直接由 (9) 和 (10) 解得：

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}=\underset{\sim}{H}^{-1}\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}} \tag{11}$$

将 (11) 代入 (10) 得：

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}=(\underset{\sim}{D}^{T}\underset{\sim}{H}^{-1}\underset{\sim}{D})^{-1}(\underset{\sim}{G}-\underset{\sim}{W})\underset{\sim}{\boldsymbol{q}}^{e} \tag{12}$$

将 (12) 代入 (11) 式得：

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}=\underset{\sim}{H}^{-1}\underset{\sim}{D}(\underset{\sim}{D}^{T}\underset{\sim}{H}^{-1}\underset{\sim}{D})^{-1}(\underset{\sim}{G}-\underset{\sim}{W})\underset{\sim}{\boldsymbol{q}}^{e} \tag{13}$$

将 (12) 和 (13) 式代入 (8) 式，并由 $\frac{\partial\pi_{mG2}}{\partial\underset{\sim}{\boldsymbol{q}}}=0$ 得：

$$\sum_{e}\underset{\sim}{K}^{e}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{q}}=\underset{\sim}{Q} \tag{14}$$

其中，

$$\underset{\sim}{K}^{e}=(\underset{\sim}{G}^{T}-\underset{\sim}{W}^{T})(\underset{\sim}{D}^{T}\underset{\sim}{H}^{-1}\underset{\sim}{D})^{-1}(\underset{\sim}{G}-\underset{\sim}{W}) \tag{15}$$

$\underset{\sim}{K}^{e}$ 称之为广义杂交元的单元刚度矩阵.

当 $\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}$ 和 $\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}$ 的参数个数相同时，得：

$$\underset{\sim}{K}^{e}=(\underset{\sim}{G}^{T}-\underset{\sim}{W}^{T})\underset{\sim}{D}^{-1}\underset{\sim}{H}\underset{\sim}{D}^{-T}(\underset{\sim}{G}-\underset{\sim}{W}) \tag{16}$$

为了便于讨论杂交元的场变量选择原则，收敛要求及秩的条件，现对建立广义杂交元的过程做如下解释：

1. 公式(11)表示单元的应力应变关系.

2. 将(13)式代入 $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}=\underset{\sim}{N}\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}$ 中得：

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}=\underset{\sim}{N}\underset{\sim}{H}^{-1}\underset{\sim}{D}(\underset{\sim}{D}^{T}\underset{\sim}{H}^{-1}\underset{\sim}{D})^{-1}(\underset{\sim}{G}-\underset{\sim}{W})\underset{\sim}{\boldsymbol{q}}^{e} \tag{17}$$

其实质是 π_{mG2} 经过对 $\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}$ 和 $\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}$ 的变分，求得了用单元节点位移参数 $\underset{\sim}{\boldsymbol{q}}^{e}$ 对单元应变 $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 的离散表达式，其中 $\underset{\sim}{G}$ 和 $\underset{\sim}{W}$ 分别与单元边界位移和单元域内插值函数有关.

3. 将 (17)式代入总势能中直接对 $\underset{\sim}{\boldsymbol{q}}$ 的变分所得到的结果与(14)式结果完全相同.

由以上分析可以看出 $\frac{\partial\pi_{mG2}}{\partial\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}}=0$ 和 $\frac{\partial\pi_{mG2}}{\partial\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}}=0$ 是在单元的局部建立应力-应变关系及用单元节点位移参数 $\underset{\sim}{\boldsymbol{q}}$ 离散单元应变，而且离散单元应变是实质. 对于 $\frac{\partial\pi_{mG2}}{\partial\underset{\sim}{\boldsymbol{q}}}=0$，正如胡海昌教授指出的那样是对正体运用势能原理[8].

下面建立基于各级不完全的放松连续性条件的广义变分原理的各种杂交模型，并且，为了讨论的方便，都按单元应变离散和用势能原理建立单元刚度阵分析.

2. 广义杂交应力模型

在 π_{mG2} 中，在单元内代入物性关系：

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} - A(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}) = B(\boldsymbol{\sigma}_{ij}) \tag{18}$$

由此得修正的 Reissner 变分原理的泛函表示：

$$\pi_{mR} = \sum_e \iiint_{V_e} \{B(\boldsymbol{\sigma}_{ij}) + (\boldsymbol{\sigma}_{ij,j} + \bar{\boldsymbol{F}}_i)\boldsymbol{u}_i\}dv - \sum_e \iint_{s_e} \boldsymbol{T}_i\tilde{\boldsymbol{u}}_i ds + \iint_{s_\sigma} \bar{\boldsymbol{T}}_i\tilde{\boldsymbol{u}}_i ds \tag{19}$$

(18)式相当于在(6)式中代入

$$\underset{\sim}{N} = \underset{\sim}{E}^{-1}\underset{\sim}{P} \tag{20}$$

显然 $\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{H}$

将(20)代入(17)式得：

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underset{\sim}{E}^{-1}\underset{\sim}{P}\underset{\sim}{H}^{-1}(\underset{\sim}{G} - \underset{\sim}{W})\underset{\sim}{\boldsymbol{q}}^e \tag{21}$$

$$\underset{\sim}{K}^e = (\underset{\sim}{G}^T - \underset{\sim}{W}^T)\underset{\sim}{H}^{-1}(\underset{\sim}{G} - \underset{\sim}{W}) \tag{22}$$

这就是 Wolf, J. P. 给出的广义杂交应力模型.

3. 杂交应力模型

如果在广义杂交应力模型中，单元内假定的应力满足平衡条件(按不计体积力 $\bar{F}_i$, 即 $\boldsymbol{\sigma}_{ij,j} = 0$) 则相当于在(21)和(22)中代入 $\underset{\sim}{W} = 0$, 得：

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underset{\sim}{E}^{-1}\underset{\sim}{P}\underset{\sim}{H}^{-1}\underset{\sim}{G}\underset{\sim}{\boldsymbol{q}}^e \tag{23}$$

$$\underset{\sim}{K}^e = \underset{\sim}{G}^T\underset{\sim}{H}^{-1}\underset{\sim}{G} \tag{24}$$

这就是卞学璜给出的杂交应力模型.

4. 杂交应变模型

在(19)式中代入应力应变关系 $\boldsymbol{\sigma}_{ij} = E_{ijKL}\boldsymbol{\varepsilon}_{KL}$ 则得

$$\pi_{mR1} = \sum_e \iiint_{V_e} \{A(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}) + [(E_{ijKL}\boldsymbol{\varepsilon}_{KL})_{,j} + \bar{\boldsymbol{F}}_i]\boldsymbol{u}_i\}dv - \sum_e \iint_{s_e} \boldsymbol{T}_i\tilde{\boldsymbol{u}}_i ds + \iint_{s_\sigma} \bar{\boldsymbol{T}}_i\tilde{\boldsymbol{u}}_i ds \tag{25}$$

这相当于在(6)式中代入 $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{E}\underset{\sim}{N}$ 得：

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underset{\sim}{N}\underset{\sim}{H}^{-1}(\underset{\sim}{G}_1 - \underset{\sim}{W}_1)\underset{\sim}{\boldsymbol{q}}^e \tag{26}$$

$$\underset{\sim}{K}^e = (\underset{\sim}{G}_1^T - \underset{\sim}{W}_1^T)\underset{\sim}{H}^{-1}(\underset{\sim}{G}_1 - \underset{\sim}{W}_1) \tag{27}$$

其中，$\underset{\sim}{G}_1$ 和 $\underset{\sim}{W}_1$ 分别为在 $\underset{\sim}{G}$ 和 $\underset{\sim}{W}$ 中代入 $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{E}\underset{\sim}{N}$.

5. 广义杂交模型 (I)

在(8)式中，如果假定单元应力场满足平衡条件，即 $\underset{\sim}{W} = 0$, 则单元的应变离散表达式为：

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underset{\sim}{N}\underset{\sim}{H}^{-1}\underset{\sim}{D}(\underset{\sim}{D}^T\underset{\sim}{H}^{-1}\underset{\sim}{D})^{-1}\underset{\sim}{G}\underset{\sim}{\boldsymbol{q}}^e \tag{28}$$

当 $\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}$ 和 $\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}$ 参数个数相同时：

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underset{\sim}{N}\underset{\sim}{D}^{-T}\underset{\sim}{G}\underset{\sim}{\boldsymbol{q}}^e \tag{29}$$

单元刚度阵为：

$$\underset{\sim}{K}^e = \underset{\sim}{G}^T\underset{\sim}{D}^{-T}\underset{\sim}{H}\underset{\sim}{D}^{-1}\underset{\sim}{G} \tag{30}$$

6. 杂交位移模型（II）

董平建立的杂交位移模型相当于在 π_{mG1} 中代入应力应变关系及几何关系

$$\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = 0,$$

由于 $\pi_{mG2} = -\pi_{mG1}$，因此，也可以用（25）式建立这个模型.

假定单元的场变量为：

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underset{\sim}{N}\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}},\ 则\ \underset{\sim}{\boldsymbol{T}} = \underset{\sim}{R}_1\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{u}} = \underset{\sim}{B}\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}\ (\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\ 和\ \underset{\sim}{\boldsymbol{u}}\ 满足几何关系)$$

$$\underset{\sim}{\tilde{\boldsymbol{u}}} = \underset{\sim}{L}\underset{\sim}{\boldsymbol{q}}^e$$

则

$$\pi_{mR1} = \sum_e\left(\frac{1}{2}\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}^T\underset{\sim}{H}\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}^T\underset{\sim}{W}_2\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}^T\underset{\sim}{G}_1\underset{\sim}{\boldsymbol{q}}^e\right) - \underset{\sim}{\boldsymbol{q}}^T\underset{\sim}{Q} \tag{31}$$

其中，

$$\underset{\sim}{H} = \iiint_{V_e}\underset{\sim}{N}^T\underset{\sim}{E}\underset{\sim}{N}dv, \qquad \underset{\sim}{W}_2 = \iiint_{V_e}\underset{\sim}{B}^T\underset{\sim}{N}_2dv, \qquad \underset{\sim}{G}_1 = \iint_{s_e}\underset{\sim}{R}_1^T\underset{\sim}{L}ds$$

而 $\underset{\sim}{N}_2$ 是 $\underset{\sim}{E}\cdot\underset{\sim}{N}$ 经微分运算（$\sigma_{ij,j}$）求得的多项式函数矩阵.

由此得：

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{H} + \underset{\sim}{W}_2)^{-1}\underset{\sim}{G}_1\underset{\sim}{\boldsymbol{q}}^e \tag{32}$$

$$\underset{\sim}{K}^e = \underset{\sim}{G}_1^T(\underset{\sim}{H}^T + \underset{\sim}{W}_2^T)^{-1}\underset{\sim}{H}(\underset{\sim}{H} + \underset{\sim}{W}_2)^{-1}\underset{\sim}{G}_1 \tag{33}$$

虽然表达式在形式上与董平给出的不一样，但其结果一样.

除了上述各种杂交模型外，还有其他类型杂交元，如平衡型、交替型等，其区别主要在于单元边界上拉格朗日乘子的选取不同.

从上述讨论中可以看出，杂交元是通过对单元内独立变量的变分建立单元应变的离散表达式，然后再用势能原理建立杂交模型. 因此不妨说其实质仍然是运用势能原理，只是扩大了原来单元函数的空间，不用单元函数而用变分构造出单元的应变. 广义杂交元统一了各类杂交元及协调元，同时也使一些收敛的不协调元从变分上得到解释.

四、关于杂交模型的几个问题

杂交元的依据是放松连续性要求的广义变分原理，它放松了对选择函数的要求，但是如果函数选择得不适当同样会产生错误的结果. 下面讨论关于杂交元场变量选择的几个问题.

1. 单元的秩

卞学璜教授曾指出当单元的应力参数选得太少时，杂交应力模型会产生缺秩的现象[9]，即单元刚度阵的零特征值（刚体模式）将多于实际单元所允许的刚体自由度数，通常可由如下条件保证：

$$m - k \geqslant p - q \tag{34}$$

其中，m 为单元独立假定的场变量的参数个数；k 为 m 个参数中相关的个数；p 为单元节点参数个数；q 为实际单元允许的刚体自由度数.

这里的关键在于求 k. 以往没有一个一般的方法，只是对具体模型分析其可能产生的零应变能模式，从而判断单元的秩[9]. 其实，由于各类杂交元都是先用节点位移参数通过边界插值离散单元应变，对此，也可以看成是单元连续性方程的一种离散表示，因此单元的应变具有满足连续性条件的可能，为了保证不等式(34)成立，不妨按连续性条件求出 k 的上界. 例如，薄板的弯曲单元，应变 $\varepsilon_{xx}=\frac{\partial^2W}{\partial x^2}$, $\varepsilon_{yy}=\frac{\partial^2W}{\partial y^2}$, $\varepsilon_{xy}=2\frac{\partial^2W}{\partial x\partial y}$, 其连续性条件为：$2\frac{\partial\varepsilon_{xx}}{\partial y}=\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial x}$, $2\frac{\partial\varepsilon_{yy}}{\partial x}=\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial y}$, 当单元应变场选用一次场时，单元应变有九个参数，但由连续条件将得到 k 的上界为 2. 同样，当应变场选用二次场时可求得 k 的上界为 6.

除了单元的秩的条件外，还有整体的秩的条件：

$$M\geqslant P-Q \tag{35}$$

其中，M 是所有单元真正独立参数的总和；P 是总的节点参数个数；Q 是限定节点参数个数.

若不满足(34)条件，而满足(35)条件则问题仍然可以定解.

2. 杂交元的收敛

杂交元除了会出现缺秩现象外，还会出现不收敛现象，卞学璜教授在文献[4]中，用梁的例子说明了用修正的 Reissner 变分原理建立广义杂交应力模型时，当单元域内的挠度 W 用线性插值时会出现不收敛的结果，但未做理论分析.

其实，在各类杂交元用节点位移参数通过边界插值离散单元应变时，势能原理要求单元的应变满足一定的精度，至少要保证常应变，否则不能保证收敛.

应变精度可以用(17)式估计，以二维问题的三角形单元为例，如选用面积坐标，则应变中 $\underset{\sim}{H}^{-1}\underset{\sim}{D}(\underset{\sim}{D}^T\underset{\sim}{H}^{-1}\underset{\sim}{D})^{-1}$ 项对误差的影响是 $O(h^{-2})$ 量级，h 为单元长度最大尺寸，为了保证应变具有 $O(h)$ 以上量级精度，必须保证 $(\underset{\sim}{G}-\underset{\sim}{W})\underset{\sim}{q}^e$ 项至少具有 $O(h^3)$ 量级的精度.

由于

$$\underset{\sim}{G}\underset{\sim}{q}^e=\iint_{s_e}T_i\tilde{u}_i ds \tag{36}$$

$$\underset{\sim}{W}\underset{\sim}{q}^e=\iiint_{V_e}\sigma_{ij,j}u_i dv \tag{37}$$

T_i 是用面积坐标表示的无因次量，而 $\sigma_{ij,j}$ 是具有 h^{-r} 量级的量(r 是平衡方程中求导数最高阶次)，因此只要给出 $\tilde{u}_i$ 和 u_i 的插值函数即可估计 (36) 和 (37) 式的精度，对此，文献[10]中有详细的讨论.

现在我们举一个薄板弯曲分析中具有九个节点参数的三角形单元的例子 $\left(\text{即每个节点的参数为 } W_i, \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_i, \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_i\right)$，以此说明单元的收敛性.

对薄板弯曲问题，内力 $\underset{\sim}{\sigma}=[M_x, M_y, M_{xy}]^T$, 应变

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, 2\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right]^T.$$

设单元的场变量为：

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{N}\underset{\sim}{\beta}$$
$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{N}\underset{\sim}{\alpha}$$

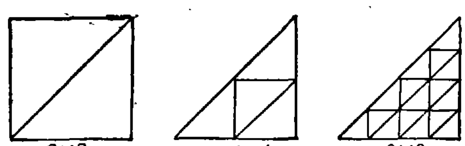
其中，$\underset{\sim}{N}$用面积坐标 L_i 表示：

$$\underset{\sim}{N} = \begin{bmatrix} L_1^2, L_2^2, L_3^2, L_1L_2, L_2L_3, L_3L_1, 0, \cdots\cdots 0 \\ 0, \cdots\cdots 0, L_1^2, L_2^2, L_3^2, L_1L_2, L_2L_3, L_3L_1, 0, \cdots\cdots 0 \\ 0, \cdots\cdots 0, L_1^2, L_2^2, L_3^2, L_1L_2, L_2L_3, L_3L_1 \end{bmatrix}$$

用不同阶次的 $\underset{\sim}{u}$ 和 $\underset{\sim}{\tilde{u}}$ 建立三个单元，表示如下：

单元 \ 场变量	$\underset{\sim}{u}$	$\underset{\sim}{\tilde{u}}$	
	W	$\tilde{W}$	$\tilde{W}_n$
T092	不完全三次[16]	三次	一次
AT092	不完全三次	一次	一次
BT092	一次	三次	一次

这是一个广义杂交模型，我们分别用 T092，AT092，BT092 计算了四边固定，中心作用集中力的薄板弯曲问题，1/4 板的尺寸及网格划分如图 1 所示。计算结果列表给出。



2×2　4×4　8×8

图 1

板中心挠度计算值(解析解：0.00560 PL^2/D)

单元 \ 网格	2×2	4×4	8×8	16×16
T092	0.002111	0.004807	0.005373	0.005546
AT092	0.001552	0.000883	0.000510	0.000321
BT092	0.002111	0.000639	0.000439	0.000353

显然，AT092，BT092 单元不收敛，而 T092 单元收敛。

AT092 单元不收敛的原因是因为 (36) 式没有满足精度要求。 BT092 单元不收敛的原因是因为(37)式没有满足精度要求。

由此可见有限元法中放松连续性条件的胡海昌-鹫津广义变分原理在场变量的选择

上必须注意秩的条件及收敛条件. 实际上这是对允许场变量的一种约束条件，这一点与用于连续场变量的广义变分原理是有区别的，人们往往不注意这一点.

上述分析方法完全适用于其他各种类型杂交模型.

3. 杂交元的列式

由于杂交模型的场变量选择比较任意，因此有必要讨论其场变量的选择原则和列式，以便保证精度，方便计算.

对于场变量的选择除了考虑秩的条件和收敛性外，一般说来，$\underset{\sim}{\alpha}$ 和 $\underset{\sim}{\beta}$ 参数越多，单元的刚性越强且计算量增加，节点参数个数越多，精度越高，但计算量也随之增加. 对 $\underset{\sim}{u}$ 和 $\underset{\sim}{\tilde{u}}$ 的插值应尽可能利用节点参数插出次数尽可能高的函数，以提高精度.

在列式上可以就 (16) 式讨论，因为让 $\underset{\sim}{\alpha}$ 和 $\underset{\sim}{\beta}$ 的参数个数相同是容易办到的，也不失一般性. 如果再使 $\underset{\sim}{\mathrm{P}}$ 和 $\underset{\sim}{\mathrm{N}}$ 相同，且使 $\underset{\sim}{\mathrm{N}}$ 具有同等能力和各向同性[11]. 这时不难建立:

$$\iiint\limits_{V_e} \underset{\sim}{\mathrm{N}}^T \underset{\sim}{\mathrm{E}} \underset{\sim}{\mathrm{N}} dv = \underset{\sim}{\bar{\mathrm{E}}} \underset{\sim}{\mathrm{D}}$$

其中，$\bar{\mathrm{E}}$ 是只与弹性系数有关的矩阵[11].

$$\underset{\sim}{\mathrm{K}}^e = (\underset{\sim}{\mathrm{G}}^T - \underset{\sim}{\mathrm{W}}^T) \underset{\sim}{\bar{\mathrm{E}}} \underset{\sim}{\mathrm{D}}^{-1} (\underset{\sim}{\mathrm{G}} - \underset{\sim}{\mathrm{W}}) \tag{38}$$

对于二维和板、壳问题中的三角形单元，如果选用面积坐标，$\underset{\sim}{\mathrm{D}}^{-1}$ 是单元面积与一个不变的数值矩阵之积[11]，因此，可以避免对每个单元的求逆运算，这将大大减少杂交元的计算量.

本文是在唐立民教授指导下完成的，又承蒙钱令希教授的热情鼓励和胡海昌教授的指正，在此一一表示感谢.

参 考 文 献

[1] Pian, T. H. H., *AIAA Journal.*, **2**, 7(1964), 1333—1336.
[2] Tong, P., AFOSR, TR68-1860, M. I. T. (1968); *Int. J. Num. Methods Eng.*, **2**(1970), 78—83.
[3] Wolf, J. P., *AIAA Journal*, **11**, 3(1973), 386—388.
[4] Pian, T. H. H., Proceedings International Conference on Variational Methods in Engineering, 1 (1972), 3.1—3.24.
[5] Washizu, K., Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 2nd edn, Pergamon Press, Oxford (1975).
[6] Fraeijs de Veubeke, B., *Int. J. Num. Methods Eng.*, 8(1974).
[7] Lee, S. W. and Pian, T. H. H., *AIAA Journal*, **16**, 1(1978).
[8] 胡海昌著，变分法及结构设计——弹性力学的变分原理和它们的应用，北京航空学院印刷(1979).
[9] Pian, T. H. H., Advance in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, edited by J. T. Oden (1972).
[10] 唐立民，陈万吉，刘迎曦，有限元分析中的拟协调元，大连工学院学报，2(1980).
[11] 陈万吉，刘迎曦，唐立民，拟协调元列式，大连工学院学报，2(1980).
[12] 刘世宁，陈树坚，薄板弯曲的一种 9 自由度快速收敛三角形单元体，中山大学学报，4(1974).

GENERALIZED HYBRID ELEMENT

Chen Wanji

(Research Institute of Engineering Mechanics, Dalian Institute of Technology)

Abstract

In the analysis of the finite element method, the variational principle has formed the basis of various modeles. In this paper, the generalized hybrid element has been established on the basis of the Hu-Washizu principle with relaxed continuity requirements. Existing hybrid elements, for example, stress hybrid element[1], displacement hybrid element[2] and generalized hybrid stress element[3] are special forms of the generalized hybrid element.

In this paper, several new kinds of hybrid element are presented, criterion for choicing field variables, convergent conditions and rank conditions are also discussed.

In addition to general theoretical statements for various kinds of hybrid element. The formulations of these elements are listed, thus, some of the formulations easily for application are given in explicit form.