

爆轰波小拐角绕流的近似解析解

管楚淦

(中国科学院数学研究所)

本文中考虑一平面爆轰波的绕射问题,用类似于 Lighthill^[1]的思想处理了爆轰波在固壁小拐角附近的绕射问题,求得了一个近似解析解,并对解的奇异性进行了分析.

(一) 基本运动方程和边界条件

设有一无穷远处起爆的平面爆轰波,在炸药介质中垂直于一平面刚壁运动,此壁在 Q 点处有一拐角 α (向下拐为负),爆轰波运动到此处后,就绕此拐角运动. 在平面壁延长线上方仍保持平面波波面运动;下方则是以 Q 点为爆轰中心的柱面波. 它们都以正常爆轰速度 D_f 运动. 这两波在平面壁的延长线上互相衔接. 由于拐角的原因,波后状态互相受到干扰,现在要确定这个受扰动区域中的流动. 在这样的起爆和边界条件下,决定问题的参量是爆轰波速度 D_f , 静止介质中的压力 p_∞ , 密度 ρ_∞ 及拐角 α . 它们不能组合成基本长度和时间的量纲,因此运动是自型的,即所有的运动参量只能是 x/t 和 y/t 的函数. 如果我们取

$$X = x/t, Y = y/t \quad (1)$$

为运动坐标系,在此坐标系中波面变成驻定波. 由于平面和柱面爆轰波都是 Chapman-Jouguet 爆轰^[2]波,波面上是均熵无旋运动,因此整个波后区域也都是均熵无旋运动,且爆轰速度 D_f 对给定炸药介质是常数,又假定拐角 α 是一小量,因此受扰区域中的扰动量亦是小量. 若令

$$U = U_0 + U_1, V = V_0 + V_1, P = P_0 + P_1, \rho = \rho_0 + \rho_1, C = C_0 + C_1. \quad (2)$$

其中 $q = (U, V)$, P, ρ, C 为流动速度,压力,密度和声速,下标“0”表示平面波后未受扰动的量,下标“1”表示扰动量. 它们都是小量,如果抛弃高阶量(并利用 $V_0 = 0$),扰动量

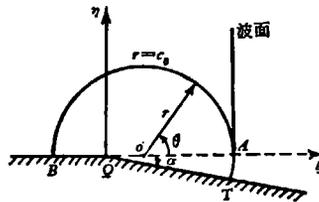


图 1

本文于 1979 年 4 月 2 日收到.

应满足方程

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} + U_0 \frac{\partial q_1}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P_1, \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \rho_0 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) = 0, \quad P_1 = C_0^2 \rho_1 \quad (3)$$

由于运动是自型的, 利用变换(1), 并注意到

$$t \frac{\partial}{\partial t} = -X \frac{\partial}{\partial X} - Y \frac{\partial}{\partial Y}, \quad t \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X}, \quad t \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial Y} \quad (4)$$

可将方程(3)简化为:

$$(X - U_0) \frac{\partial U_1}{\partial X} + Y \frac{\partial U_1}{\partial Y} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_1}{\partial X}, \quad (X - U_0) \frac{\partial V_1}{\partial X} + Y \frac{\partial V_1}{\partial Y} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_1}{\partial Y}, \quad (X - U_0) \frac{\partial P_1}{\partial X} + Y \frac{\partial P_1}{\partial Y} = \rho_0 C_0^2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial X} + \frac{\partial V_1}{\partial Y} \right) \quad (5)$$

令

$$\frac{U}{D_j} = u_0 + u_1, \quad \frac{V_1}{D_j} = v_1, \quad \frac{P_1}{\rho_0 D_j^2} = p_1, \quad \frac{C_0}{D_j} = c_0, \quad \frac{X}{D_j} = \xi, \quad \frac{Y}{D_j} = \eta, \quad (6)$$

将式(6)代入式(5), 再从方程中消去 p_1 , 得到

$$[c_0^2 - (u_0 - \xi)^2] u_{1\xi} + (u_0 - \xi) \eta (u_{1\eta} + v_{1\xi}) + (c_0^2 - \eta^2) v_{1\eta} = 0 \quad (7)$$

加上无旋条件

$$u_{1\eta} = v_{1\xi} \quad (8)$$

式(7), (8)是关于扰动量 u_1, v_1 的基本方程, 若再消去 u_1 就得到关于 v_1 的一个二阶方程

$$[c_0^2 - (\xi - u_0)^2] v_{1\xi\xi} - 2(\xi - u_0) \eta v_{1\xi\eta} + (c_0^2 - \eta^2) v_{1\eta\eta} - 2(\xi - u_0) v_{1\xi} - 2\eta v_{1\eta} = 0, \quad (9)$$

作极坐标变换

$$\xi - u_0 = r \cos \theta, \quad \eta = r \sin \theta, \quad (\xi - u_0)^2 + \eta^2 = r^2 \quad (10)$$

则方程(9)化为

$$\left(r^2 - \frac{r^4}{c_0^2} \right) v_{1rr} + \left(r - \frac{2r^3}{c_0^2} \right) v_{1r} + v_{1\theta\theta} = 0 \quad (11)$$

此二阶方程的判别式为 $\Delta = (r^2 - c_0^2)r^2/c_0^2$, 即当 $r > c_0$ 时为双曲型, $r < c_0$ 为椭圆型, 在 $r > c_0$ 的区域中过每一点 (r_*, θ_*) 的两类特征线为

$$\pm(\theta - \theta_*) = \arccos(c_0/r) - \arccos(c_0/r_*). \quad (12)$$

它们是以圆 $r = c_0$ 为包络的直线族, 即每条特征线都和扰动圆 $r = c_0$ 相切. 那么圆外任一点的扰动都不能影响到圆内的流动. 扰动圆 $r = c_0$ 在物理空间是以声速 c_0 扩大的圆, 而小拐角引起的扰动是以声速传播, 因此拐角所引起的扰动也只在圆内起作用, 对圆外流动没有影响. 受扰动区域就是圆 $r = c_0$ 和固壁所围的区域. 扰动速度分量 v_1 应满足的边界条件为

$$v_1|_{r=c_0} = v_1|_{BQ} = 0, \quad v_1|_{QT} = (u_0 + u_1) \sin \alpha \approx \alpha u_0. \quad (13)$$

由于假定 α 角很小, 可将原在斜壁 QT 上满足的条件移到平面壁的延长线 QA 上, 而忽略 AT 段. 于是问题简化在半圆 $r \leq c_0, 0 \leq \theta \leq \pi$ 上求解方程(11), 这时边界条件为

$$v_1|_{\theta=\pi} = v_1|_{0 < \theta < \pi} = 0 \quad v_1|_{r=c_0} = v_1|_{0 < r < c_0} = \alpha u_0 \quad (14)$$

(二) 求解 v_1

我们引入复变数

$$\zeta = R e^{i\theta} = \lambda + i\mu, \quad R = \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{c_0}\right)^2} \right] / \left(\frac{r}{c_0}\right). \quad (15)$$

方程(11)化为极坐标形式的 Laplace 方程, 再作变换

$$\sigma = (\zeta + \zeta^{-1})/2 = \tau + i\nu \quad (16)$$

于是方程(11)可化为

$$v_{1\tau\tau} + v_{1\nu\nu} = 0 \quad (17)$$

在式(15)和式(16)变换下求解区域变为下半 σ 平面, 边界的对应关系为

圆周 $r = c_0, 0 < \theta \leq \pi \rightarrow$ 实轴上 $(-1, 1)$ 段;

半径 $OA \rightarrow$ 实轴上 $(1, \infty)$ 段, $OB \rightarrow$ 实轴上 $(-\infty, -1)$ 段;

圆心 $(\xi = u_0, \eta = 0) \rightarrow$ 实轴上的无穷远点;

拐角点 $Q \rightarrow$ 实轴上 $Q'(-\frac{c_0}{u_0}, 0)$ 点.

边界条件变为

$$v_1 \Big|_{\substack{\nu=0 \\ -\frac{c_0}{u_0} < \tau < 1}} = 0, \quad v_1 \Big|_{\substack{\nu=0 \\ -\infty < \tau < -\frac{c_0}{u_0}}} = v_1 \Big|_{\substack{\nu=0 \\ 1 < \tau < \infty}} = \alpha u_0 \quad (18)$$

下半平面上满足条件(18)的调和函数可由 Poisson 公式给出. 将求得的 v_1 用原来的变量表示出, 得

$$v_1(\xi, \eta) = \alpha u_0 - \frac{\alpha u_0}{\pi} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\frac{c_0}{u_0} r^2 + c_0(\xi - u_0)}{\eta \sqrt{c_0^2 - r^2}} + \operatorname{arctg} \frac{r^2 - c_0(\xi - u_0)}{\eta \sqrt{c_0^2 - r^2}} \right\}. \quad (19)$$

从 $p_{1\eta}/\rho_0 = (\xi - u_0)v_{1\xi} + \eta v_{1\eta}$ 和 $u_{1\eta} = v_{1\xi}$, 及 $p_1|_{r=c_0} = 0$ 可得到

$$p_1 = \frac{\alpha \rho_0 u_0 c_0}{\pi} \left\{ \frac{\sqrt{c_0^2 - r^2}}{c_0 + u_0 - \xi} + \frac{u_0}{2\sqrt{c_0^2 - u_0^2}} \right. \\ \left. \times \ln \frac{c_0^2 + u_0(\xi - u_0) + \sqrt{c_0^2 - u_0^2} \sqrt{c_0^2 - r^2}}{c_0^2 + u_0(\xi - u_0) - \sqrt{c_0^2 - u_0^2} \sqrt{c_0^2 - r^2}} \right\} \\ u_1 = \frac{\alpha u_0}{\pi} \left\{ \frac{\sqrt{c_0^2 - r^2}}{c_0 + u_0 - \xi} - \frac{u_0}{2\sqrt{c_0^2 - u_0^2}} \right. \\ \left. \times \ln \frac{c_0^2 + u_0(\xi - u_0) + \sqrt{c_0^2 - u_0^2} \sqrt{c_0^2 - r^2}}{c_0^2 + u_0(\xi - u_0) - \sqrt{c_0^2 - u_0^2} \sqrt{c_0^2 - r^2}} \right\}. \quad (20)$$

(三) 关于解的讨论

由式(19)(20)可以看出, 在拐角点 $\xi = 0, \eta = 0$ 扰动压力 p_1 和速度分量 u_1 都有对数奇异性, 如果壁向下拐, 那么就有 $\lim_{\xi \rightarrow 0} p_1(\xi, 0) = -\infty$, 这就破坏了关于小扰动的假定.

事实上 p_1 也不可能实现这样的负值. p_1 所能达到的最小负值是 $-p_0$. 这里之所以出现无穷扰动压力, 一方面是由于边界条件的处理所引起, 另一方面在实际物理现象中, 在拐角附近流动变化确实比较激烈, 且在这点附近无旋条件也不再适用. 但我们可以把扰动

量的奇异性看作是这种激烈变化的一个数学化的描述。由 Fletcher^[2] 等对冲击波的实验结果看出, 固壁压力在拐角附近确实是急骤变化。还应指出, 这种奇异性的影响只是一个局部性的问题, 即除拐点附近外, 影响不是很大。

除拐角点外 p_1 (还有 u_1) 在 A 点亦有奇异性。 A 点是紧靠波面的点, 似乎应无扰动 ($p_1 = 0$), 实际现象中不应存在这样一个奇点, 但由于处理边界条件时将 QT 上的条件移到 QA 上, 而忽略 AT 段, 也就是将 AT 段收缩到一点 A 。这个奇点的性质和中心简单波在中心点处的性质有极相似之处。由 p_1 的表达式和等压线分布可以看出, p_1 在扰动圆及壁上完全满足条件, 而沿不同的途径趋近于 A 点时, 可以有不同的值。

因此, 我们说这样一些奇点的出现, 一方面是数学处理的结果, 但也是这些点附近物理性质的一个数学化的描述。

一般常用炸药的爆轰产物状态方程的多方指数 γ 都在 3 左右, 为了简单起见, 我们用 $\gamma = 3$ 进行了计算。即 $p = A(\rho)\rho^3$, 这时

$$u_0 = \frac{1}{\gamma + 1} = \frac{1}{4}, \quad c_0 = \frac{\gamma}{\gamma + 1} = \frac{3}{4}.$$

扰动圆内各 $\eta =$ 常数的断面上 p_1 的分布; 扰动圆中等压线分别表示在图 2, 3 中 (其中 $p_* = \alpha u_0 c_0 \rho_0 / \pi$)。

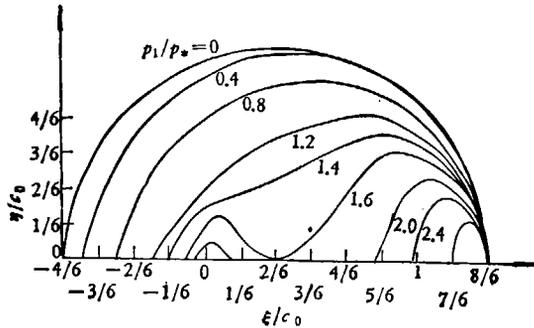


图 2 扰动圆内的等压线

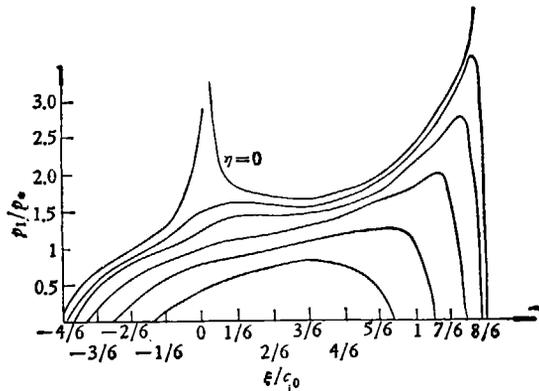


图 3 扰动圆内各断面上 p_1 的分布

参 考 文 献

- [1] Lighthill, M. J., The diffraction of blast. *Proc. Roy. Soc.*, A 198(1949).
[2] Fletcher, C. H., Weimer, D. K. and Beakney, W., Pressure behind a shock wave diffraction through small angle, *Phys. Rev.*, 78, 5(1950), second series, 634—635.
[3] Courant, R. and Friedrichs, K. O., *Supersonic flow and shock waves* (1948).

**AN APPROXIMATE ANALYTIC SOLUTION OF THE
DIFFRACTION OF A PLANE DETONATION
WAVE AROUND A SMALL ANGLE**

Guan Chu-quan

Abstract

The diffraction of a plane detonation wave, travelling parallel to a wall and turned by a corner through a small angle α , is investigated by a method similar to M. J. Lighthill's. Analytical representations of the approximate solution are given, and singularities of the solution are discussed.