

有限单元——放松边界条件法 解弹性理论平面问题

蒋 炜

(上海工业建筑设计院)

提要 本文使用满足静力平衡方程及协调条件的单元位移场来求解弹性理论平面问题, 其计算效果相当于一般变分计算中的核松边界条件法^[1]。

一、前 言

本文以弹性理论平面问题的多项式形式的通解为单元位移场, 提出了一种新的有限单元计算方案。这种方法的优点是静力平衡方程是精确地满足的, 只是边界条件有所放松, 所以这种有限单元——放松边界条件法比一般常用的有限单元即 Ritz 法为佳。本文方法的另一特点是使用扇形单元。这种单元只在其两条直边上才分布有节点, 其第三边上无节点, 且可取任意曲线形状, 所以单元的节点少, 并可完全适应所讨论区域的形状特点, 避免了有限单元分割过程中的边界离散误差。此外, 本文方法允许使用极坐标系统, 结果可进一步简化计算。

根据本文方法, 我们已编制了相应的通用计算程序。通过实例计算表明, 用有限单元——放松边界条件法来解平面问题是成功的, 有效的。

二、位移函数与形状函数

在文献[2]中, 我们曾推导了弹性平面问题的多项式形式的通解。例如, 当体力为零时, 对于平面应力问题有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= E \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^k j(j+1) a_{\frac{(k+1)(k+2)}{2}+j+2} x^{k-j} y^{j-1} \\ \sigma_y &= E \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^k (k-j+1)(k-j+2) a_{\frac{(k+1)(k+2)}{2}+j} x^{k-j} y^{j-1} \\ \tau &= -E \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^k j(k-j+1) a_{\frac{(k+1)(k+2)}{2}+j+1} x^{k-j} y^{j-1} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

本文于 1978 年 11 月 13 日收到。

$$\left. \begin{aligned}
 u &= a_1 + a_3 y + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^k \left[\frac{j(j+1)}{k-j+1} a_{\frac{(k+1)(k+2)}{2}+j+2} \right. \\
 &\quad \left. - v(k-j+2) a_{\frac{(k+1)(k+2)}{2}+j} \right] x^{k-j+1} y^{j-1} \\
 &\quad - \sum_{k=2}^{n-1} \left[\frac{6}{k(k-1)} a_{\frac{k(k+5)}{2}} + (2+\nu) a_{\frac{k(k+5)}{2}+2} \right] y^k \\
 v &= a_2 - [a_3 + 2a_5(1+\nu)]x + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^k \left[\frac{(k-j+1)(k-j+2)}{j} \right. \\
 &\quad \times \frac{a_{\frac{(k+1)(k+2)}{2}+j}}{2} - v(j+1) \frac{a_{\frac{(k+1)(k+2)}{2}+j+2}}{2} \left. \right] x^{k-j} y^j \\
 &\quad - \sum_{k=2}^{n-1} \left[\frac{6}{k(k-1)} a_{\frac{k(k+3)}{2}} + (2+\nu) a_{\frac{k(k+3)}{2}+3} \right] x^k
 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

不难看出, 这样确定的位移分量与应力分量分别是 $n-1$ 次与 $n-2$ 次的多项式。其中包含有 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 个待定系数 a_k , 但是, 由于这些系数必须满足 $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ 个可积条件^[2]:

$$\begin{aligned}
 & (k-j+1)(k-j+2)(k-j+3)(k-j+4) a_{\frac{(k+3)(k+4)}{2}+j} \\
 & + 2j(j+1)(k-j+1)(k-j+2) a_{\frac{(k+3)(k+4)}{2}+j+2} \\
 & + j(j+1)(j+2)(j+3) a_{\frac{(k+3)(k+4)}{2}+j+4} = 0
 \end{aligned} \quad (3)$$

($k=1-(n-3)$, $j=1-k$.)

所以实际的独立系数是 $2(2n-1)$ 。在用有限单元——放松边界条件法来计算平面问题时, 我们即以通解(2)来作为单元位移场, 并按有限单元法的一般原则, 用单元上 $2n-1$ 个节点处的节点位移来代替这些系数, 以保证单元之间的位移协调条件。

为此, 本文将采用图1所示那样的扇形单元来进行区域的离散化。这种单元的特点是节点仅分布在二条直边上——每条直边上设置 n 个节点, 至于单元的第三边, 则无节点, 且可取任意曲线形状。由于位移分量是坐标变量的 $n-1$ 次多项式, 所以, 当取这些节点的位移(u_i ,

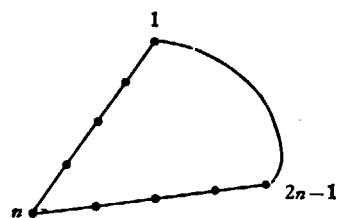


图 1

v_i) 为基本未知数时, 在直边上, 相邻单元的位移连续性就可得到保证。单元的第三边, 当其为区域的边界线时, 如前所述, 是不需设置任何节点的; 而当第三边是单元之间的公共边界时, 由于位移场通过这条边不能保证自然连续, 因此以后还需另加处理。

由单元 $2n-1$ 个节点上的节点位移条件, 及应力场的可积条件(3), 我们就可以建立起关于全部 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 个待定常数 a_k 的联立方程组

$$[c]\{a\} = \{\Delta\} \quad (4)$$

其解

$$\{a\} = [c]^{-1}\{\Delta\} \quad (5)$$

于是,如用 t_{kj} 表示矩阵 $[c]^{-1}$ 的元素,即有

$$a_k = \sum_{j=1}^{2(2n-1)} t_{kj} \Delta_j \quad k = 1 - \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad (6)$$

从而再代入(1)、(2)两式中,就可将应力与位移通过节点位移 $(\Delta_{2i-1}, \Delta_{2i}) = (u_i, v_i)$, $i = 1-2n-1$ 表示如

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sum_{i=1}^{2(2n-1)} R_i \Delta_i \\ \sigma_y &= \sum_{i=1}^{2(2n-1)} S_i \Delta_i \\ \tau &= \sum_{i=1}^{2(2n-1)} T_i \Delta_i \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{2(2n-1)} M_i \Delta_i \\ v &= \sum_{i=1}^{2(2n-1)} N_i \Delta_i \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} R_i &= E \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^k j(j+1) t_{\frac{(k+1)(k+2)}{2}+j+2,i} x^{k-j} y^{j-1} \\ S_i &= E \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^k (k-j+1)(k-j+2) t_{\frac{(k+1)(k+2)}{2}+j,i} x^{k-j} y^{j-1} \\ T_i &= -E \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^k j(k-j+1) t_{\frac{(k+1)(k+2)}{2}+j+1,i} x^{k-j} y^{j-1} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} M_i &= t_{1i} + t_{3i} y + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^k \left[\frac{j(j+1)}{k-j+1} t_{\frac{(k+1)(k+2)}{2}+j+2,i} \right. \\ &\quad \left. - v(k-j+2) t_{\frac{(k+1)(k+2)}{2}+j,i} \right] x^{k-j+1} y^{j-1} \\ &\quad - \sum_{k=2}^{n-1} \left[\frac{6}{k(k-1)} t_{\frac{k(k+3)}{2},i} + (2+v) t_{\frac{k(k+3)}{2}+2,i} \right] y^k \\ N_i &= t_{2i} - [t_{3i} + 2t_{5i}(1+v)]x \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^k \left[\frac{(k-j+1)(k-j+2)}{j} t_{\frac{(k+1)(k+2)}{2}+j+2,i} \right. \\ &\quad \left. - v(j+1) t_{\frac{(k+1)(k+2)}{2}+j,i} \right] x^{k-j} y^j \\ &\quad - \sum_{k=2}^{n-1} \left[\frac{6}{k(k-1)} t_{\frac{k(k+3)}{2}+3,i} + (2+v) t_{\frac{k(k+3)}{2}+3,i} \right] x^k \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

由单元应力场(7)就可计算单元的边界应力,其在 x 、 y 轴上的分量可表示如

$$\left. \begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^{2(2n-1)} X_i \Delta_i \\ Y &= \sum_{i=1}^{2(2n-1)} Y_i \Delta_i \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} X_i &= R_i l + T_i m \\ Y_i &= T_i l + S_i m \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

而 (l, m) 是单元边界法线的方向余弦。

三、广义变分原理

单元边界上一般可能给定有如下四类边界条件

$$\left. \begin{aligned} 1. \begin{cases} X|_{s_1} = P_x \\ Y|_{s_1} = P_y \end{cases} & \quad 3. \begin{cases} X|_{s_3} = P_x \\ v|_{s_3} = v^* \end{cases} \\ 2. \begin{cases} u|_{s_2} = u^* \\ v|_{s_2} = v^* \end{cases} & \quad 4. \begin{cases} u|_{s_4} = u^* \\ Y|_{s_4} = P_y \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

于是, 根据广义变分原理, 当体积力为零时, 可取泛函

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \iint \{ \sigma \}^T \{ \epsilon \} dF & - \int_{s_1} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} ds - \int_{s_3} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u - u^* \\ v - v^* \end{bmatrix} ds \\ & - \int_{s_2} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u - u^* \\ v - v^* \end{bmatrix} ds - \int_{s_4} \begin{bmatrix} X \\ P_y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u - u^* \\ v \end{bmatrix} ds \end{aligned} \quad (14)$$

其用(7)、(8)、(11)诸式代入后, 仍可写成一般熟知的形式

$$\Pi = \{ \Delta \}^T \left(\frac{1}{2} [K] \{ \Delta \} - \{ F \} \right) \quad (15)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} K_{ij} &= \frac{1}{E} \iint [R_i(R_j - \nu S_j) + S_i(S_j - \nu R_j) + 2(1 + \nu)T_i T_j] dF \\ &\quad - \int_{s_1} [(X_i M_j + Y_i N_j) + (X_j M_i + Y_j N_i)] ds \\ &\quad - \int_{s_3} (Y_i N_j + Y_j N_i) ds - \int_{s_4} (X_i M_j + X_j M_i) ds \\ F_i &= \int_{s_1} (P_x M_i + P_y N_i) ds - \int_{s_2} (u^* X_i + v^* Y_i) ds \\ &\quad + \int_{s_3} (P_x M_i - v^* Y_i) ds - \int_{s_4} (u^* X_i - P_y N_i) ds \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

由 Green 公式可证

$$\begin{aligned} & \frac{1}{E} \iint [R_i(R_j - \nu S_j) + S_i(S_j - \nu R_j) + 2(1 + \nu)T_i T_j] dF \\ &= \oint (X_j M_i + Y_j N_i) ds \end{aligned} \quad (17)$$

故刚度矩阵也可以用沿单元的边界线积分简单的表示如

$$K_{ij} = \int_{s_c+s_1} (X_i M_i + Y_i N_i) ds - \int_{s_2} (X_i M_i + Y_i N_i) ds \\ + \int_{s_3} (X_i M_i - Y_i N_i) ds - \int_{s_4} (X_i M_i - Y_i N_i) ds \quad (18)$$

这里 $s_c = s - (s_1 + s_2 + s_3 + s_4)$, 表示单元的其他边界部分, 也就是与区域内其他单元相邻接的公共边界部分.

由公式(18)可算知

$$\sum_{i=1}^{2(2n-1)} K_{ij} \Delta_j - F_i = \int_{s_1} [(X - P_x)M_i + (Y - P_y)N_i] ds \\ - \int_{s_2} [(u - u^*)X_i + (v - v^*)Y_i] ds + \int_{s_3} [(X - P_x)M_i \\ - (v - v^*)Y_i] ds - \int_{s_4} [(u - u^*)X_i - (Y - P_y)N_i] ds \\ + \int_{s_c} (X M_i + Y N_i) ds \quad (19)$$

从而能够看出, 按区域进行单元量的叠加, 最后得到的劲度方程, 实质上是由两大类的加权残数方程组合而成的, 即在给定边界条件 1—4 的边界上, 分别有

$$\left. \begin{aligned} \int_{s_1} [(X - P_x)M_i + (Y - P_y)N_i] ds &= 0 \\ \int_{s_2} [(u - u^*)X_i + (v - v^*)Y_i] ds &= 0 \\ \int_{s_3} [(X - P_x)M_i - (v - v^*)Y_i] ds &= 0 \\ \int_{s_4} [(u - u^*)X_i - (Y - P_y)N_i] ds &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

而在区域内部各单元之间的公共边界上有

$$\int_{s_c} [(X^{e_1} M_i^{e_1} + Y^{e_1} N_i^{e_1}) + (X^{e_2} M_i^{e_2} + Y^{e_2} N_i^{e_2})] ds = 0 \quad (21)$$

注意, 当单元间的公共边界是单元的直边 1— n 或 n — $(2n-1)$ 时 (图 1), 由于, 如前所述, 位移场是连续传递的, 即形状函数在这些直边上互等, 故由(21)式就可得到跨过这些边界的应力连续传递条件:

$$\int_{s_c} [(X^{e_1} + X^{e_2})M_i + (Y^{e_1} + Y^{e_2})N_i] ds = 0 \quad (22)$$

一般情况下, 单元的第三边, 即 1— $(2n-1)$ 边应尽量取得与区域的边界线重合. 否则, 当单元第三边是单元之间的公共边时, 由于位移场跨过这条边不连续, 由方程(21)就得不到连续性条件(22). 在这种情况下, 为保证计算精度就必须利用 Lagrange 乘子法再加处理.

当单元的第三边不是区域的边界线, 而是单元之间的公共边时 (图 2), 这条边界显然没有必要取作曲线形状. 在这种情况下, 为了保证位移通过公共边界 bd 的连续性, 就取泛函

$$\Pi' = \Pi - \int_{s_0} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{bmatrix} ds \quad (23)$$

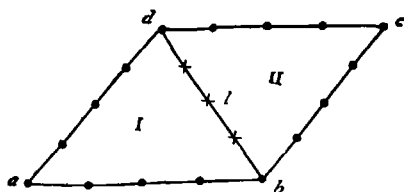


图 2

这里, s_0 表示单元公共边 bd , 以与一般的单元公共边界 s_c 相区别; 而 $(\bar{X}, \bar{Y})$ 则是起到 Lagrange 乘子作用的单元边界位移场。不难证明, 变分

$$\begin{aligned} \delta \Pi' = & \int_{s_1} [(X - P_x) \delta u + (Y - P_y) \delta v] ds - \int_{s_2} [(u - u^*) \delta X \\ & + (v - v^*) \delta Y] ds + \int_{s_3} [(X - P_x) \delta u - (v - v^*) \delta Y] ds \\ & - \int_{s_4} [(u - u^*) \delta X - (Y - P_y) \delta v] ds + \int_{s_c} (X \delta u + Y \delta v) ds \\ & + \int_{s_0} [(X - \bar{X}) \delta u + (Y - \bar{Y}) \delta v - (u \delta \bar{X} + v \delta \bar{Y})] ds \end{aligned} \quad (24)$$

当按区域进行单元量的叠加时, 关于边界 s_c, s_0 的积分要进行二次。由于边界应力场 $(\bar{X}, \bar{Y})$ 对两个相邻单元相同, 所以由泛函 Π' 的极值要求, 由线积分 s_0 项, 就可得到跨过公共边界 bd 的位移连续条件。

现设边界应力场 $(\bar{X}, \bar{Y})$ 可通过以某种方式定义的广义力向量 $\{Q\}$ 及插值函数矩阵 $[L]$ 表示如

$$\begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{bmatrix} = [L] \{Q\} \quad (25)$$

则在代入 (23) 式后, 即有

$$\Pi' = \begin{bmatrix} \Delta \\ Q \end{bmatrix}^T \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} K & -A \\ -A^T & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \Delta \\ Q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

其中

$$[A] = \int_{s_0} \begin{bmatrix} M_1 & N_1 \\ M_2 & N_2 \\ \vdots & \vdots \\ M_{2(2n-1)} & N_{2(2n-1)} \end{bmatrix} [L] ds \quad (27)$$

进一步, 如果边界广义力向量是由作用于单元公共边 bd 上 m 个点处的集中力 $[\bar{X}_k, \bar{Y}_k]$, $k = 1-m$ 组成:

$$\{Q\} = [\bar{X}_1 \bar{Y}_1 \bar{X}_2 \bar{Y}_2 \cdots \bar{X}_m \bar{Y}_m]^T \quad (28)$$

则插值函数矩阵 $[L]$ 将由 δ 函数构成。不难证明此时有

$$[A] = \begin{bmatrix} M_1(x_1, y_1) & N_1(x_1, y_1) & \cdots & M_1(x_m, y_m) & N_1(x_m, y_m) \\ M_2(x_1, y_1) & N_2(x_1, y_1) & \cdots & M_2(x_m, y_m) & N_2(x_m, y_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{2(2n-1)}(x_1, y_1) & N_{2(2n-1)}(x_1, y_1) & \cdots & M_{2(2n-1)}(x_m, y_m) & N_{2(2n-1)}(x_m, y_m) \end{bmatrix} \quad (29)$$

上面,我们是利用广义变分原理来满足几何边界条件的,但是类似于一般有限单元法,几何边界条件也可以用该边界上某些点处的强迫位移条件来代替。这样处理方法的优点是可以简化单元刚度矩阵及单元广义力的表达式。

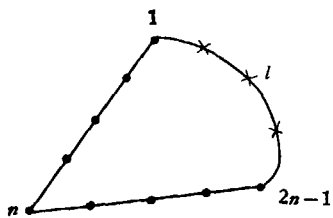


图 3

当在单元直边节点上给出强迫位移条件时,处理方法是一般熟知的,而当单元第三边上 m 个点 (x_l, y_l) , $l=1-m$ 处给出了强迫位移值 (u_l^*, v_l^*) (图 3) 时,就得用求条件极值的方法来求解了。由位移表达式 (8), 引入

Lagrange 乘子 (λ_l, μ_l) 后,可知应取泛函

$$\begin{aligned} \Pi' = \frac{1}{2} \iint \{ \sigma \}^T \{ \epsilon \} dF - \int_{s_1} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} ds - \sum_{l=1}^m \left\{ \lambda_l \left[\sum_{i=1}^{2(2n-1)} M_i(x_l, y_l) \right. \right. \\ \left. \left. \times \Delta_i - u_l^* \right] + \mu_l \left[\sum_{i=1}^{2(2n-1)} N_i(x_l, y_l) \Delta_i - v_l^* \right] \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

易于证明 Lagrange 乘子 (λ_l, μ_l) 就是作用于点 (x_l, y_l) 处的集中力 $(\bar{X}_l, \bar{Y}_l)$, 所以结果有

$$\Pi' = \begin{bmatrix} \Delta \\ Q \end{bmatrix}^T \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} K & -A \\ -A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ Q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F \\ -\delta \end{bmatrix} \right) \quad (31)$$

其中 $\{Q\}$, $[A]$ 仍可由 (28)、(29) 二式表示, 而 $\{\delta\}$ 则是作用在单元第三边上的强迫位移向量

$$\{\delta\} = [u_1^* v_1^* u_2^* v_2^* \cdots u_m^* v_m^*]^T \quad (32)$$

至于单元刚度矩阵 $[K]$ 及单元广义力 $\{Q\}$ 则将由 (16) 式除去有关线积分项而得, 即有

$$\begin{cases} K_{ij} = \frac{1}{E} \iint [R_i(R_j - \nu S_j) + S_i(S_j - \nu R_j) + 2(1 + \nu)T_i T_j] dF \\ F_i = \int_{s_1} (P_x M_i + P_y N_i) ds \end{cases} \quad (33)$$

上述处理方法也不难应用到单元第三边是单元之间的公共边界情况上去 (图 2)。前已指出, 位移函数是坐标变量的 $n-1$ 次多项式, 因此如考虑到在节点 b, d 处位移原已连续后, 我们只要在公共边 bd 上另取 $n-2$ 个点, 然后令这二个单元的位移在这些点处相等, 就能保证位移场跨过整个公共边界 bd 的连续性。类似于 (30) 式, 此时有

$$\begin{aligned} \Pi' = \frac{1}{2} \iint \{ \sigma \}^T \{ \epsilon \} dF - \int_{s_1} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} ds \\ - \sum_{l=1}^{n-2} \sum_{i=1}^{2(2n-1)} [\lambda_l M_i(x_l, y_l) + \mu_l N_i(x_l, y_l)] \Delta_i \end{aligned} \quad (34)$$

不难看出由此得到的结果全同于 (26)–(29) 式, 只是应取这些表达式中 $m = n-2$ 而已。注意, 不论单元第三边上给定了几何边界条件, 或者单元的第三边是为单元之间的公共边, 在其上所取的补充点 (x_l, y_l) 的数目 m 应等于 $n-2$ 。这是因为位移是坐标变量的 $n-1$ 次多项式, 将由边界上 n 个点处的节点位移 (u_l, v_l) 唯一地确定的缘故。

四、单元劲度矩阵与单元广义力的计算方法

设外荷载可展开成坐标变量的多项式形式,即如

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \sum_{h=1}^h \sum_{g=1}^g \frac{p_{h(h-1)+g}}{2} x^{h-g} y^{g-1} \\ P_y &= \sum_{h=1}^h \sum_{g=1}^g \frac{q_{h(h-1)+g}}{2} x^{h-g} y^{g-1} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

则连同(9)、(10)两式代入公式(33)中,即有

$$\left. \begin{aligned} K_{ij} &= E \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=1}^a \sum_{c=1}^{n-1} \sum_{d=1}^c \left\{ b(b+1) t_{\frac{(a+1)(a+2)}{2}+b+2,i} \left[d(d+1) t_{\frac{(c+1)(c+2)}{2}+d+2,j} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - v(c-d+1)(c-d+2) t_{\frac{(c+1)(c+2)}{2}+d+2,j} \right] + (a-b+1)(a-b \right. \\ &\quad \left. + 2) t_{\frac{(a+1)(a+2)}{2}+b+2,i} \left[(c-d+1)(c-d+2) t_{\frac{(c+1)(c+2)}{2}+d+2,j} - v d(d \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 1) t_{\frac{(c+1)(c+2)}{2}+d+2,j} \right] + 2(1+v) b d (a-b+1)(c-d+1) \right. \\ &\quad \left. \times t_{\frac{(a+1)(a+2)}{2}+b+1,i} \times t_{\frac{(c+1)(c+2)}{2}+d+1,j} \right\} J_F(a-b+c-d, b+d-2) \\ F_i &= \sum_{h=1}^h \sum_{g=1}^g \frac{p_{h(h-1)+g}}{2} \left\{ t_{1i} J_s(h-g, g-1) + t_{3i} J_s(h-g, g) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^k \left[\frac{j(j+1)}{k-j+1} t_{\frac{(k+1)(k+2)}{2}+j+2,i} - v(k-j+2) t_{\frac{(k+1)(k+2)}{2}+j+2,i} \right] \right. \\ &\quad \times J_s(h-g+k-j+1, g+j-2) - \sum_{k=2}^{n-1} \left[\frac{6}{k(k-1)} t_{\frac{k(k+5)}{2},i} \right. \\ &\quad \left. + (2+v) t_{\frac{k(k+5)}{2}+2,i} \right] J_s(h-g, g+k-1) \Big\} + \sum_{h=1}^h \sum_{g=1}^g \frac{q_{h(h-1)+g}}{2} \\ &\quad \times \left\{ t_{2i} J_s(h-g, g-1) - [t_{3i} + 2t_{5i} \times (1+v)] J_s(h-g+1, g-1) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^k \left[\frac{(k-j+1)(k-j+2)}{j} t_{\frac{(k+1)(k+2)}{2}+j+2,i} - v(j+1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times t_{\frac{(k+1)(k+2)}{2}+j+2,i} \right] J_s(h-g+k-j, g+j-1) - \sum_{k=2}^{n-1} \left[\frac{6}{k(k-1)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times t_{\frac{k(k+3)}{2}+5,i} + (2+v) t_{\frac{k(k+3)}{2}+3,i} \right] J_s(h-g+k, g-1) \right\} \\ &\quad i, j = 1-2(2n-1) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

显然,如果采用公式(16)计算,也能得到类似的结果。由于公式冗长,这里就不再列出了。

在公式(36)中

$$\left. \begin{aligned} J_F(\alpha, \beta) &= \iint_F x^\alpha y^\beta dF \\ J_s(\alpha, \beta) &= \int_s x^\alpha y^\beta ds \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

可以看到,用高次多项式解有限元问题的主要困难即在于要计算这类积分。为此我们推导了这类积分的解,以便迅速而精确地计算劲度矩阵与广义力。根据推导,对于任意的 m 边多边形(图4),积分

$$\begin{aligned} J_F(\alpha, \beta) &= -\frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)} \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{\beta+1} \sum_{i=0}^{\alpha+1} \left(\prod_{h=1}^j \frac{\alpha-i+h}{h} \right) \\ &\quad \times \left(\prod_{h=1}^j \frac{\beta-h+2}{\alpha+h+1} \right) (x_{k+1} - x_k)^i (y_{k+1} - y_k)^j x_{k+1}^{\alpha-i} x_k^i y_k^{\beta-j+1} \end{aligned} \quad (38)$$

对于任一直线(图5),积分

$$\begin{aligned} J_s(\alpha, \beta) &= \frac{\sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}}{\alpha+1} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{\beta} \sum_{i=0}^{\alpha} \left(\prod_{h=1}^j \frac{\alpha-i+h}{h} \right) \left(\prod_{h=1}^j \frac{\beta-h+1}{\alpha+h+1} \right) x_{k+1}^{\alpha-i} x_k^i (y_{k+1} - y_k)^j y_k^{\beta-j} \end{aligned} \quad (39)$$

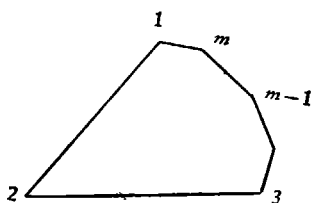


图 4

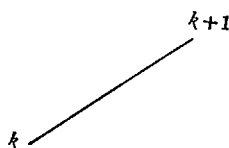


图 5

由公式(36)–(39)我们就很容易编制有限单元——放松边界条件法的通用计算程序了。注意,由于这里给出的实质上是扇形单元族的通解,所以由此编成的程序允许我们在同一区域中使用不同阶数的单元来进行离散化,故具有很大的灵活性。限于篇幅,这个问题就不在这里讨论了。

五、考虑体积力作用的计算

当体积力不为零时,我们就必须在前面得到的齐次解(1)、(2)上叠加适当的特解。为简化起见,下面假定在单元范围内体积力 $\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$ 为常量。但是可以看到,只要体积力能表示成坐标变量的多项式形式,计算的方式都将相同。

当体积力为常量时,相应的特解是

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^* &= -F_x x \\ \sigma_y^* &= -F_y y \\ \tau^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$$\left. \begin{aligned} u^* &= -\frac{1}{E} \left[\frac{1}{2} F_x (x^2 + \nu y^2) - \nu F_y xy \right] \\ v^* &= \frac{1}{E} \left[\nu F_x xy - \frac{1}{2} F_y (y^2 + \nu x^2) \right] \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

于是运用类似的推导方法, 可将单元的应力、位移表示如

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -F_x x + \sum_{j=1}^{2(2n-1)} R_j (\Delta_j - \Delta_j^*) \\ \sigma_y &= -F_y y + \sum_{j=1}^{2(2n-1)} S_j (\Delta_j - \Delta_j^*) \\ \tau &= \sum_{j=1}^{2(2n-1)} T_j (\Delta_j - \Delta_j^*) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{E} \left[\frac{1}{2} F_x (x^2 + \nu y^2) - \nu F_y xy \right] + \sum_{j=1}^{2(2n-1)} M_j (\Delta_j - \Delta_j^*) \\ v &= \frac{1}{E} \left[\nu F_x xy - \frac{1}{2} F_y (y^2 + \nu x^2) \right] + \sum_{j=1}^{2(2n-1)} N_j (\Delta_j - \Delta_j^*) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

由此就可计算单元的总位能,

$$\Pi = \{\Delta - \Delta^*\}^T \left(\frac{1}{2} [K] \{\Delta - \Delta^*\} - \{F\} \right) \quad (44)$$

这里, 单元劲度矩阵仍由(33)计算, 而单元广义力

$$F_i = \iint \left(F_x \frac{\partial M_i}{\partial x} + F_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dF + \int_{s_i} (P_x M_i + P_y N_i) ds \quad (45)$$

$$i = 1-2(2n-1)$$

六、极坐标系统的应用

在极坐标系统中, 我们可取应力、位移场如^[2]

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{E} \sigma_r &= -\sum_{k=1}^n k(k-1)(a_{4k-3} \cos k\theta + a_{4k-2} \sin k\theta) r^{k-2} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)(k-2)(a_{4k+3} \cos k\theta + a_{4k+4} \sin k\theta) r^k \\ \frac{1}{E} \sigma_\theta &= \sum_{k=1}^n k(k-1)(a_{4k-3} \cos k\theta + a_{4k-2} \sin k\theta) r^{k-2} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)(k+2)(a_{4k+3} \cos k\theta + a_{4k+4} \sin k\theta) r^k \\ \frac{1}{E} \tau &= \sum_{k=1}^n k(k-1)(a_{4k-3} \sin k\theta - a_{4k-2} \cos k\theta) r^{k-2} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-2} k(k+1)(a_{4k+3} \sin k\theta - a_{4k+4} \cos k\theta) r^k \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

$$\left. \begin{aligned}
 u &= -(1+\nu) \sum_{k=1}^n k(a_{4k-3} \cos k\theta + a_{4k-2} \sin k\theta) r^{k-1} \\
 &\quad - \sum_{k=0}^{n-2} [(k-2) + (k+2)\nu](a_{4k+3} \cos k\theta + a_{4k+4} \sin k\theta) r^{k+1} \\
 v &= (1+\nu) \sum_{k=1}^n k(a_{4k-3} \sin k\theta - a_{4k-2} \cos k\theta) r^{k-1} \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{n-2} [(k+4) + k\nu](a_{4k+3} \sin k\theta - a_{4k+4} \cos k\theta) r^{k+1}
 \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

其中待定系数 a_k 的数目是 $2(2n-1)$ 个, 比直角坐标系中的待定系数数目少, 这是使用极坐标系统方便的地方。

由通解 (46)、(47) 就可用类似的方法进行有限单元——放松边界条件法的公式化过程了。限于篇幅, 此处从略。

七、算例—径向均载作用下的圆盘计算

设有圆形区域如图 6 所示, 其上作用着单位径向拉力。由于对称, 故可取第一象限的

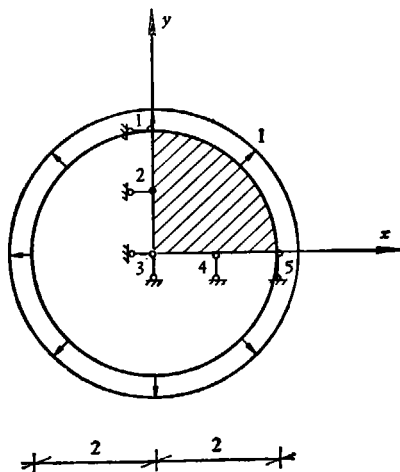


图 6

1/4 圆为一个单元, 作为计算的基础, 并设置水平及垂直支座联杆如图示。我们假定 $n=3$, 所以整个单元上共有 5 个节点。运算过程从略。其解为

$$\left. \begin{aligned}
 u_1 &= u_2 = u_3 = v_3 = v_4 = v_5 = 0 \\
 u_4 &= v_2 = \frac{1}{E} \\
 u_5 &= v_1 = \frac{2}{E}
 \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

从而再代入 (7)、(8) 中, 就可得到均匀径向荷载作用下圆盘的解

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x = \sigma_y = 1 \\ \tau = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} u = \frac{1}{E} x \\ v = \frac{1}{E} y \end{array} \right\} \quad (49)$$

不难看出, 这个解就是精确解。我们曾用所编程序计算了这个问题。从单元阶数 $n = 2$ 一直算到 $n = 9$ 结果都相同。这显然是其他有限单元方法做不到的。

参 考 文 献

- [1] Лейбензон, Л. С., Вариационные Методы Решения Задач Теории Упругости, Издательство Академии Наук СССР, Москва (1951).
- [2] 蒋炜, 弹性理论平面问题中由应力函数积分位移分量的一般方法, 上海力学, 1, 1 (1980), 23--37.
- [3] Pian, T.H.H and Tong, P., Basis of Finite Element Methods for Solid Continua, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, January-March, 1, 1 (1969), 3--28.

THE SOLUTION OF PLANE PROBLEMS OF ELASTICITY BY THE FINITE ELEMENT METHOD VIA RELAXATION OF BOUNDARY CONDITIONS

Jiang Wei

(Shanghai Institute of Industrial Building Design)

Abstract

This paper presents a finite element method in which the general polynomial solution to a plane problem is used to form a family of displacement functions. The method derives its name from the fact that while the static equilibrium conditions are exactly satisfied, the boundary conditions are relaxed. An advantage of this method is that it gives a high degree of accuracy. Another advantage is the use of the sectorial element in which nodes are taken only on the two straight edges, with no node on the third edge. As a result, the total number of nodes is reduced. A third advantage is that it adapts itself to arbitrary shape of the region in question by taking each segment of the boundary of the region as the third side of a finite element. Thus no discretization errors along the boundary will arise during the process of partitioning into elements.

A general computer program is also developed which has proved to be successful and effective in practical applications.