

任意两个无定向椭圆轨道之间的最佳过渡

吕 茂 烈

(西北工业大学)

提要 比较了人造卫星在两个椭圆轨道间远拱点冲击过渡的迳直方式和迂回方式, 证明了在近点距比值的一定范围内, 迂回方式优于迳直方式。进而证明了两个无定向椭圆轨道间的任何多冲击过渡总可以用更经济的霍曼双冲击过渡或三冲击过渡来代替。给出了三冲击过渡优于霍曼过渡的条件, 在此条件下通过无穷远处的三冲击过渡是全局最佳过渡。

一、速度平面图

Whittaker 定理指出, 星体沿圆锥曲线轨道运行的速度可分解为: 1) 垂直于极矢径 r 的旋转分量 v_c 和 2) 垂直于长轴的定向分量 v_b (图 1), 且

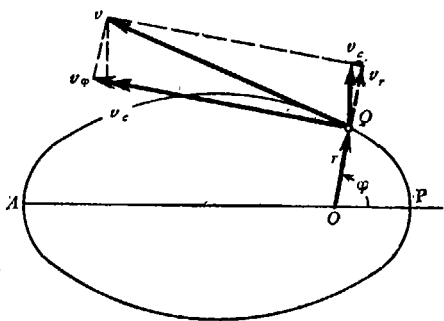


图 1

$$v_c \equiv y = \frac{\mu^2}{h} = \text{const.}$$

$$v_b \equiv x = \frac{\mu^2}{h} e = ey = \text{const} \quad (1)$$

其中 $h = \mu\sqrt{p}$ 是单位质量的动量矩, p 是轨道的通径, e 是偏心率, μ^2 是中心星球的引力常量。

速度径向分量 v_r 和横向分量 v_φ 的值可通过 y, x 来表出

$$v_r = x \sin \varphi, \quad v_\varphi = y + x \cos \varphi \quad (2)$$

记 $\mathcal{J} = \frac{\mu^2}{r}$, 则由星体的轨道方程

$$\mathcal{J} = \frac{\mu^2}{r} = y^2 + yx \cos \varphi = y^2(1 + e \cos \varphi) \quad (3)$$

对于椭圆轨道, $e < 1$. 在轨道的近拱点 P 和远拱点 A , 有 $\varphi_P = 0$ 和 $\varphi_A = \pi$, 而 $v_P = (v_P)_\varphi = y + x$, $v_A = (v_A)_\varphi = y - x$. 记 $\mathcal{J}_P \equiv k$, $\mathcal{J}_A \equiv l$, 则

$$k \equiv \frac{\mu^2}{r_P} = y^2 + yx, \quad l \equiv \frac{\mu^2}{r_A} = y^2 - yx \quad (4)$$

反之, 通过极径参量 k, l 可表出速度参量 y, x , 即

本文于 1978 年 11 月 20 日收到。

$$y = \sqrt{\frac{k+l}{2}}, \quad x = \frac{k-l}{\sqrt{2(k+l)}} \quad (5)$$

作出速度平面图 $x-y$, 则 $k = \text{const}$ 和 $l = \text{const}$ 分别决定一组双曲线 (图 2)。此图第一象限后半区中每一点对应于一个无定向椭圆轨道; 轴 y 上各点对应于不同的圆轨道, 45° 斜轴 x' 上各点对应于不同的抛物线轨道。在实践中因极径有下界, 需考虑的区域更小。

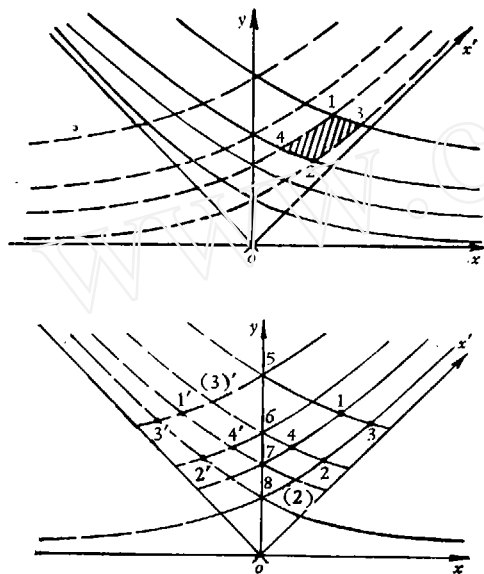


图 2

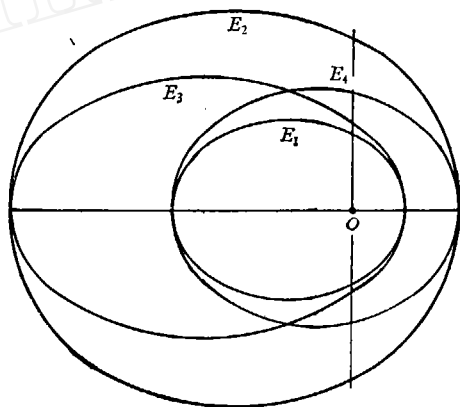


图 3

在速度平面图上每对等 k 线和每对等 l 线所构成的斜方格四顶点 1, 2, 3, 4 分别表示相关的四个椭圆轨道 E_1, E_2, E_3, E_4 。图 3 中把这四个椭圆转到共轴、同相的位置。在这四椭圆的参数间具有一些重要关系:

$$k_1 = k_3, \quad k_2 = k_4, \quad l_1 = l_4, \quad l_2 = l_3, \quad \text{且 } l_2 < l_1 < k_2 < k_1$$

又

$$y_3 + y_4 > y_1 + y_2 \quad (6)$$

$$x_1 + x_2 > x_3 + \frac{y_3 y_4}{y_1 y_2} x_4 > x_3 + x_4 \quad (7)$$

二、单冲击过渡和霍曼双冲击过渡

在无定向轨道间过渡方案的优化中首先可以排除离平面的情况。当采取平面内过渡时, 要考虑两轨道相交时通过交点 Q 进行的单冲击过渡 (图 4), 特别是相切时通过切点 Q^* 的单冲击过渡。已经证明, 除相切于拱点的情形外, 切点处的单冲击过渡不是最佳过渡, 而且最佳的交点单冲击过渡也不会比对应的霍曼双冲击过渡更佳。但当相切于拱点时, 却能给出相对最佳过渡, 而实际上这时的拱点单冲击过渡已和霍曼过渡完全一致^[2]。

对于霍曼过渡, 文献 [2] 还证明了可排除反相椭圆的情况。因此, 以后我们将只讨论

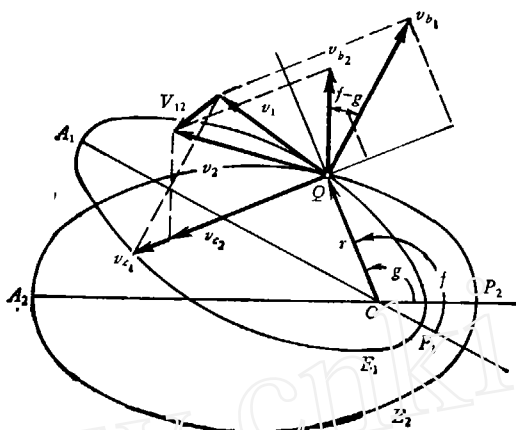


图 4

图 3 所示的共轴同相情况。在这样四个椭圆轨道间可采取四种霍曼双冲击过渡：由 E_1 E_2 可取 E_3 或 E_4 为过渡轨道，其所需速度总增值分别记作 V_{134} 和 V_{142} 。类似地，由 E_3 到 E_4 可取 E_1 或 E_2 作过渡轨道，其所需速度总增值分别记为 V_{314} 和 V_{324} 。可以利用不等式 (6), (7) 证明进入较高远拱点的霍曼过渡是较优的^[2]，即有

$$V_{142} > V_{132}, \quad V_{324} > V_{314} \quad (8)$$

三、拱点过渡的迳直方式和迂回方式

在相切于拱点的两个椭圆轨道间可通过切拱点的单冲击来实现过渡，即所谓**迳直式过渡**；也可由始轨道上不相切的拱点加一次切向冲击而先过渡到某个中间轨道，再由中间轨道用霍曼轨道来过渡到终轨道，即所谓**迂回式过渡**。对这两种方式的相对优劣须加分析。

对于图 3 上相切于远拱点 A_2 , A_3 的椭圆轨道 E_2 和 E_3 ，在 A_2 处可作迳直过渡，其所需速度增值记作 V_{23} ；也可由不相切的近拱点 P_2 先过渡到中间轨道 E_4 ，然后用霍曼轨道 E_1 迂回过渡到终轨道 E_3 ，其所需速度总增值记作 V_{2413} 。但 $V_{2413} = V_{241} + V_{13} > V_{231} + V_{13}$ (考虑不等式 (8))，而 $V_{231} = V_{23} + V_{13}$ (因 $V_{31} = V_{13}$)，故有 $V_{2413} > V_{13}$ 。对于 E_4 , E_2 间、 E_1 , E_3 间的过渡可作同样论证。归纳起来，有

$$V_{2413} > V_{23}, \quad V_{3241} > V_{31}, \quad V_{4132} > V_{12} \quad (9)$$

图 5 上表出了不等式 (8), (9) 的意义。在每个斜方格上用实箭头标出的过渡方式都优于用虚箭头标出的过渡方式。但是

$$V_{1342} \geq V_{14} \quad (10)$$

因为在较低的远拱点，迳直式过渡和迂回式过渡的相对优劣还和其它条件有关。写出在这远拱点处的速度增值表达式

$$V_{14} = (y_4 + x_4) - (y_1 + x_1), \quad V_{1324} = [(y_3 + x_3) - (y_1 + x_1)] + [(y_2 + x_2) - (y_1 + x_1)] + [(y_2 + x_2) - (y_4 + x_4)]$$

记

$$\Phi = V_{1324} - V_{14} = 2[(y_2 + x_3) - (y_4 + x_1)]$$

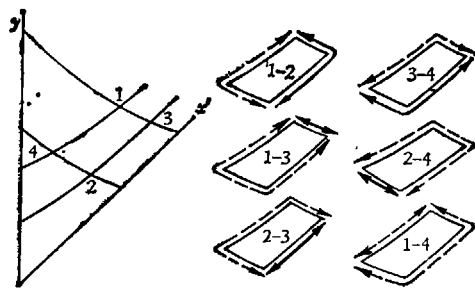


图 5

并以式 (5) 中的 y, x 值代入; 考虑 $k_1 = k_3, k_2 = k_1, l_1 = l_4, l_2 = l_3$, 则

$$\begin{aligned} \Phi &= \sqrt{2} \left[\sqrt{k_2 + l_2} + \frac{k_1 - l_2}{\sqrt{k_2 + l_2}} \right] - \sqrt{2} \left[\sqrt{k_1 + l_1} + \frac{k_1 - l_1}{\sqrt{k_1 + l_1}} \right] \\ &= \sqrt{2} [\varphi(k_1, k_2; l_2) - \varphi(k_1, k_2; l_1)] = \sqrt{2} \int_1^2 d\varphi, (l_2 < l_1) \end{aligned} \quad (11)$$

其中函数

$$\varphi(l) = \sqrt{k_2 + l} + \frac{k_1 - l}{\sqrt{k_1 + l}} \quad (12)$$

从而

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{(k_1 + l)^{3/2} - (k_2 + l)^{1/2}(3k_1 + l)}{2(k_2 + l)^{1/2}(k_1 + l)^{3/2}}$$

记

$F = (k_1 + l)^3 - (k_2 + l)(3k_1 + l)^2 = -[(3k_1 + k_2)l^2 + (k_1 + k_2)k_1l + (9k_2 - k_1)k_1^2]$
则方程 $F = 0$ 可能给出唯一的正实根

$$l^* = \frac{2\sqrt{(3k_1 - 2k_2)k_1} - 3(k_1 + k_2)k_1}{3k_1 + k_2} = \frac{2\sqrt{3 - 2\alpha} - 3(1 + \alpha)}{3 + \alpha} k_1 \quad (13)$$

其中参量(近拱点极径比) $\alpha = \frac{k_2}{k_1} > 0$. 由上式知, 正实根的条件是 $4(3 - 2\alpha) - 9(1 + \alpha)^2 > 0$, 解得 $0 < \alpha < \frac{1}{9}$. 又因 $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right|_{l=0} > 0$, 故在 l^* 处函数 $\varphi(l)$ 取极大值. 特别是, 当 $l^* = k_2$ 时式 (13) 化为三次方程

$$\alpha^3 + 9\alpha^2 + 15\alpha - 1 = 0 \quad (14)$$

它的唯一正实根是 $\alpha^* = 4 \cos 40^\circ - 3 \approx \frac{1}{15.582}$.

图 6 上给出函数 $\varphi(l)$ 的图象. $OM_0 = \varphi_0 = \sqrt{k_2} + \sqrt{k_1}$. 曲线 $\varphi(l)$ 上水平弦 M_0M 右端 M 的横坐标 l_{1m} 由下式确定

$$\varphi_0 = \sqrt{k_2} + \sqrt{k_1} = \sqrt{k_2 + l_{1m}} + \frac{k_1 - l_{1m}}{\sqrt{k_1 + l_{1m}}} \quad (15)$$

或

$$(1 + \sqrt{\alpha})^2 \left(\frac{l_{1m}}{k_1} \right)^3 - 2(1 + \alpha) \left(\frac{l_{1m}}{k_1} \right)^2 + (1 - 2\sqrt{\alpha} - 3\alpha) \left(\frac{l_{1m}}{k_1} \right) = 0$$

此式除对应于 M_0 的零根外, 有一个正实根

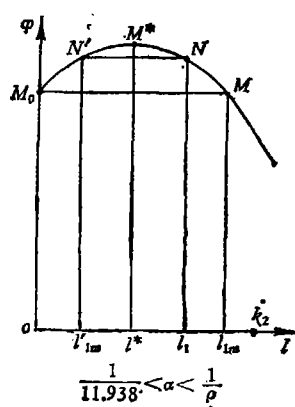


图 6

$$l_{1m} = \frac{(1 + \alpha) - 2\sqrt{\alpha(2 + 2\sqrt{\alpha} + \alpha)}}{(1 + \sqrt{\alpha})^2}$$

当 $\alpha = \frac{1}{9}$, 有 $l_{1m} = 0$. 另一方面, 如 $l_{1m} = k_2$, 则方程 (15) 化成为三次式

$$x^{3/2} + \alpha - (2\sqrt{2} + 1)\alpha^{1/2} + 1 = 0 \quad (16)$$

由此可解得一个正实根 $\alpha = \frac{1}{11.938}$. 当 $\alpha < \frac{1}{11.938}$,

有 $l_{1m} > k_2$.

在区间 $\frac{1}{11.938} < \alpha < \frac{1}{9}$, 恒有 $l_{1m} < k_2$. 取 $l_1 < l_{1m}$,

并在点 $N(l_1, \varphi_1)$ 作出曲线 $\varphi(l)$ 的水平弦 $N'N$, 则其左端 N' 的横坐标 l'_{1m} 可由下列方程确定

$$\sqrt{k_2 + l'_{1m}} + \frac{k_1 - l'_{1m}}{\sqrt{k_1 + l'_{1m}}} = \sqrt{k_2 + l_1} + \frac{k_1 - l_1}{\sqrt{k_1 + l_1}} = \varphi_1 \quad (17)$$

它可以化成 l'_{1m} 的三次方程. 显然, 当 $0 < l_2 < l'_{1m}$, 恒有 $\varphi_2 < \varphi_1$. 现在可根据函数 $\varphi(l)$ 的上述特性, 得出关于两种过渡方式之间相对优劣的判据:

1) 当 $\alpha > \frac{1}{9}$, 在 l 的正区间, 函数 $\varphi(l)$ 是递减的, 因而恒有 $\varphi_2 < \varphi_1, \Phi > 0$. 即**迳直过渡恒优于迂回过渡**.

2) 当 $\frac{1}{11.938} < \alpha < \frac{1}{9}$, 且 $l_{1m} < l_1 < k_2$, 结论和 1) 相同. 如 $l_1 < l_{1m}$, 则结论将分别由 3) 和 4) 给出 (参看图 6 和 7).

3) 当 $\frac{1}{15.582} < \alpha < \frac{1}{11.938}$, 且 $l^* < l_1 < k_2 < l_{1m}$, 则存在区间 $l'_1 < l_2 < l_1$, 其中结论 1 成立.

4) 当 α 同 3) 而 $0 < l_2 < l'_1$ 时, **迂回过渡优于迳直过渡**, 而且**通过无穷远处 ($l_1 = 0$) 的迂回过渡为最佳**.

5) 如 $\alpha < \frac{1}{15.582} = 4 \cos 40^\circ - 3$, 则 $l^* = k_2 < l_{1m}$, 从而对任何 $l_1 (< k_2)$ 都不存在 l'_1 , 即**迂回过渡恒优于迳直过渡**. 同样, 在 $\alpha < \frac{1}{9}$ 的任何情况下, 只要 $l_1 < l^*$, 也成立这个优劣判据.

图 7 上示出情况 3). 阴影区内所有迂回过渡都不及迳直过渡, 但在打点区内的迂回过渡 1—3—2—4 都优于迳直过渡 1—4.

四、多冲击过渡及其改进和排除

回到图 3 可以看出, 在由 E_1 到 E_2 或由 E_3 到 E_4 的最佳霍曼双冲击过渡中都包含着

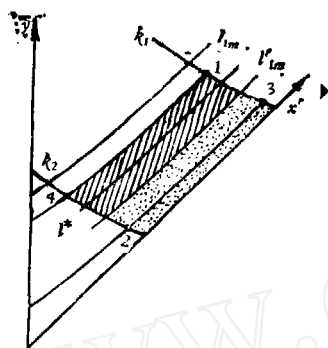


图 7

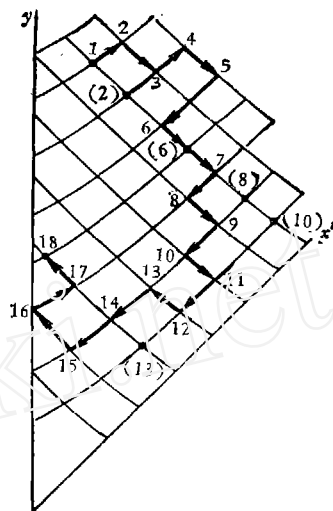


图 8

一次远拱点的迳直过渡。 $V_{132} = V_{13} + V_{23}$, $V_{324} = V_{32} + V_{24}$, 其中 E_3 到 E_2 是远拱点过渡。这样这些霍曼双冲击过渡能否成为全局最佳, 将取决于 V_{23} 与迂回过渡中所需速度总增值间的相对大小; 显然, 其优劣判据和上节所述完全一样。

现在来考虑最一般的多冲击过渡。首先可以作局部的优化, 把其中每次冲击都代以最佳的霍曼双冲击过渡。结果, 全过程变成一连串的霍曼过渡。在速度平面图上, 这一过程表示为一条折线, 其每一段都和斜方格的一条边相合, 因为霍曼过渡要求每个冲击都在共轴、同相椭圆轨道相切的拱点上进行。

图 8 上示出由椭圆轨道 E_1 到 E_{18} 的多冲击过渡。各椭圆都已排成共轴、同相。不必按上节所述逐一地分析各远拱点过渡, 而可以先利用不等式 (8), (9) 来逐段地改善过渡轨道:

先把霍曼轨道 1—2—3 换成更优的霍曼轨道 1—(2)—3; 再把迂回式过渡轨道 (2)—4—5—6 换成较优的迳直过渡轨道 (2)—6; 接着把 7—8—9 换成 7—(8)—9 过渡; 再把由 14 到 18 的迂回式换成迳直式。

对于由 10 到 13 的迂回过渡可暂不讨论其优劣, 而先把由 (12) 到 (14) 的霍曼轨道换成更优的 12—(13)—14 轨道, 并把 (8)—10—11 的过渡改成 (8)—(10)—11 过渡。

现在, 全程已改换成 1—(10)—(13)—18。这个较原程为优的路线是由始末两条等 k 线和最低的等 l 线构成的。

剩下只须再明确是否宜于在 (6) 到 18 间采取迳直式远点过渡? 这要由 1, (6), 18 三椭圆的参数比值来确定。如 $\frac{k_{18}}{k_1} = \alpha > \frac{1}{9}$, 则迳直式较优, 而全程宜于采取霍曼过渡 1—(6)—18。如 $\alpha < \frac{1}{15.582}$, 则任何迂回式过渡都优于迳直式过渡。如 $\frac{1}{15.582} < \alpha < \frac{1}{9}$, 则应按上节第 2), 3), 4) 各条来处理, 特别是, 当 $\frac{1}{15.582} < \alpha < \frac{1}{11.938}$, 将有一个如图 7 所示的打点区, 其中迂回过渡较优, 而通过无穷远的迂回过渡永远是迂回过渡中的最佳

者。另一方面,如 $\alpha > \frac{1}{11.938}$, 则这个打点区是否存在还和 $l_{(0)}$ 有关。

上述例子具有普遍性意义。它也适用于持续加速方式的过渡,因为可以把持续加速看成无数次相继进行的微小冲击的极限情况。这样,图 8 上的折线可以看成一条连续曲线。上述分析表明,经过优化后,最佳过渡应在始末轨道间霍曼双冲击过渡和通过无穷远处的三冲击过渡这两者中选择。因此,应当把速度的增值尽量地集中到首尾两端(在无穷远处的冲击事实上等于零)。这样,就排除了持续加速的优越性。

但是,通过无穷远处的三冲击过渡在理论上虽有意义,而实际上由于时间的无限增长,是无法体现的。重要的是要找出迂回过渡优于径直过渡的区间,以便在时间损失和速度节省这两者间合理折衷。

最后指出,本文的结果可应用于一个圆轨道到定向椭圆轨道的平面过渡。也可用作空间定向轨道间过渡优化分析的辅助。如文献[7]中所作的,但这是一个仍然值得研究的问题。

参 考 文 献

- [1] Gobetz, F. W. and Doll, J. R., *AIAA J*, 7, 5(1969), 801—834.
- [2] 吕茂烈,西北工业大学科技资料总 697 期(1978).
- [3] Barrar, R. R., *AIAA J*, 1, 1(1963), 65—68.
- [4] Barrar, R. R., *Astron. Acta*, 9, 1(1963), 1—11.
- [5] Ting, L., *ARS J*, 30(1960), 1013—1018.
- [6] Ting, L., *Astron. Acta*, 6(1960), 256—265.
- [7] Rider, L., *ARS J*, 31(1961), 345—351.

OPTIMUM IMPULSIVE TRANSFER BETWEEN TWO ARBITRARY ORIENTED ELLIPTICAL ORBITS

Lü Mao-lie

(Northwestern Polytechnical University)

Abstract

Apsidal transfer can be carried out straightforwardly or by devious ways. It is shown that at the apogee the straight transfer is not always optimal; in certain cases, the devious transfer may be more economical. The problem of multi-impulse transfer is discussed. It is concluded that any multi-impulse transfer can be replaced by a more economical three-impulse transfer, and the optimal transfer may be either the Hohman transfer or a three-impulse transfer through infinity.