

叶轮机械流道中粘性可压缩流动的数值计算

(I) 静止叶列中轴对称流动的计算

蒋锦良

(复旦大学)

摘要 本文提出一种计算叶轮机械流道中粘性可压缩定常层流问题的数值方法, 通过在任意非正交曲线方向上的焓梯度方程、能量方程和熵方程之间的迭代计算, 可以得到整个流道中粘性可压缩定常流动问题的数值解。本文首先在静止坐标系中进行分析 and 讨论, 并描述了叶轮机械的静止叶列中轴对称流动的计算方法。计算实例表明, 本方法的特点是简单明了, 计算速度快, 可以广泛地应用于工程设计之中。

一、引言

自从吴仲华教授于1952年提出流面理论^[1]以来, 由于电子计算机的发展, 叶轮机械流道中三元流动的计算方法得到了迅速的发展, 并且还在努力获得真正的三元流动解(例如[2]等)。但是, 所有这些计算方法都是把流道中的流体作为无粘性的理想流体来处理, 而流体在流动过程中由于粘性所引起的机械能损失, 用一个通过实验而得到的损失因子来作修正。这种做法虽然回避了计算粘性流动的困难, 但是却带来了一定的误差, 并且也不能真正地计算叶轮机械中的二次流问题。

后来, 吴仲华教授又在文献[3]中导出了叶轮机械流道中粘性可压缩流动所满足的基本方程组, 并对粘性力的作用与粘性项的物理意义作了详细的分析。由此可以定性地看出粘性效应对流体流动所产生的影响, 同时也为叶轮机械流道中粘性流动的数值计算奠定了基础。近年来, 人们开始着手对叶轮机械流道中的粘性流动进行数值计算。如 Patankar 和 Spalding^[4] 提出采用推进积分方法计算管道中的粘性流动, Prataap 和 Majumdar^[5] 采用这种方法计算了绕垂直于主流方向的轴旋转的矩形截面直管道中的粘性不可压缩流动, Ghia 等^[6] 采用极坐标系计算了扇形截面直管道中的粘性不可压缩流动。这二种管道已经接近于叶轮机械流道, 但是, 由于他们所采用的方程形式的限制, 以及在计算中忽略了主流方向上的二阶导数项, 因此只解决了规则形状截面管道中的粘性流动问题, 而对于象叶轮机械流道那样非规则形状变截面弯曲管道中的粘性可压缩流动的计算, 至今尚未得到解决。

本文提出一种计算内部流场中粘性可压缩定常层流问题的数值方法。首先由粘性流体的运动方程(纳维-斯托克斯方程)出发建立一个焓梯度方程, 并与能量方程和熵方程一

本文于1979年1月17日收到。

起进行迭代计算,再通过流量校核,可以得到整个流场中粘性流动的数值解。由于本文所采用的方程都被写成在三个非正交曲线方向上的导数形式,因此可以用来计算任意形状变截面弯曲管道(包括叶轮机流道)中的粘性可压缩定常流动问题。

本文首先在静止坐标系中进行分析 and 讨论,导出静止坐标系中的方程形式,并用来计算叶轮机静止叶列中的粘性可压缩轴对称流动。这相当于把静止叶列看作为叶片数趋向于无限多,而叶片厚度趋向于无限薄的一种极限情况。这时,静止叶列中的三元流场可以看作为由无限个形如叶片中弧面的中间 S_2 流面排列而构成。于是,每个流面上流动参量的分布情况都相同,在数学上表示为流动与 θ 无关的轴对称流动问题,在力学上可以近似地看作为在中间 S_2 流面上进行计算。在设计问题(反问题)中经常采用这种流动模型来进行叶片设计计算的,在校核问题(正问题)中可以在此基础上再用本方法在 S_1 流面上进行计算,来得到静止叶列中准三元流动的数值解。

二、粘性可压缩流动的基本方程组

对于叶轮机流道中的气流,可以采用以下基本假设: 1. 流体是可压缩的牛顿流体,并满足富里埃热传导定律; 2. 流体是一种完全气体; 3. 流动状态是定常的。于是,粘性可压缩定常流动所满足的基本方程组为

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1)$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot [\boldsymbol{\tau}] \quad (2)$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla h = Q - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{1}{\rho} \mathbf{v} \cdot \nabla p + \frac{1}{\rho} [\boldsymbol{\tau}] \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (3)$$

$$p = R\rho T \quad (4)$$

$$h = C_p T \quad (5)$$

其中所包含的未知量为流体的流动速度 \mathbf{v} , 流体的密度 ρ , 流体的压力 p , 流体的温度 T 和单位质量流体的焓 h 。质量力 \mathbf{F} 和吸热量 Q 都是给定的, 在叶轮机中一般都可以忽略不计。气体常数 R 和定压比热 C_p 也都是给定的。粘性应力张量 $[\boldsymbol{\tau}]$ 和热传导量 \mathbf{q} 在假设 1. 下分别满足

$$[\boldsymbol{\tau}] = \mu \left\{ \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} [\mathbf{I}] \right\} \quad (6)$$

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (7)$$

其中 $(\nabla \mathbf{v})^T$ 为张量 $(\nabla \mathbf{v})$ 的转置张量, $[\mathbf{I}]$ 为单位张量, μ 为流体的动力粘性系数, k 为流体的热传导系数, 当温度变化不太大时, 可以把 μ 和 k 近似地取为常数。然而, C_p 和 μ, k 也可以取为温度的已知函数, 这除了会增加一些计算工作量外, 并不会给计算带来困难。由上可见, 方程组 (1) — (5) 是封闭的, 从理论上来说可以进行求解。但是, 在一般情况下要直接求解这个方程组还是相当困难的, 因此, 我们在进行数值计算之前, 先将这个方程组进行变换。

对于方程 (1), 在本方法中可以改用其积分形式为

$$\iint_A \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = G_0 \quad (8)$$

其中 A 为流道中任一横截面的面积, G_0 为给定的流量.

对于方程 (2), 利用热力学基本公式

$$T dS = dh - \frac{1}{\rho} dp \quad (9)$$

或者其梯度形式

$$T \nabla S = \nabla h - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (10)$$

合并式 (2) 和 (10), 消去 $\frac{1}{\rho} \nabla p$ 项, 并忽略质量力 F , 即可得

$$\nabla h = T \nabla S + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot [\tau] - (v \cdot \nabla) v \quad (11)$$

这方程表示在流场中焓梯度所应满足的关系式, 因此把它称为焓梯度方程. 焓梯度方程的建立是本方法的一个特点, 它的优点是在非正交曲线方向上与下面所述的能量方程和熵方程进行交叉迭代计算. 其中 S 为流体的熵, 由方程 (9) 积分可得

$$S = R \ln \frac{T^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}{p} \quad (12)$$

其中 κ 为流体的绝热指数.

对于方程 (3), 将式 (10) 投影在流线方向上得

$$v \cdot T \nabla S = v \cdot \nabla h - \frac{1}{\rho} v \cdot \nabla p$$

再将式 (3) 代入上式即可得到

$$v \cdot T \nabla S = Q + \frac{k}{\rho} \nabla^2 T + \frac{1}{\rho} [\tau] \cdot \nabla v \quad (13)$$

即

$$\frac{dS}{dl} = \frac{1}{vT} \left(Q + \frac{k}{\rho} \nabla^2 T + \frac{1}{\rho} [\tau] \cdot \nabla v \right) \quad (13')$$

其中 l 表示沿空间流线的距离坐标, $\frac{dS}{dl}$ 表示熵沿流线 l 的变化率, 因此把它称为熵方程.

最后来看焓梯度方程 (11) 沿流线方向的方程形式

$$v \cdot \nabla h = v \cdot T \nabla S + \frac{1}{\rho} v \cdot (\nabla \cdot [\tau]) - v \cdot (v \cdot \nabla) v$$

利用式 (13), 并通过向量运算后即可得

$$v \cdot \nabla \left(h + \frac{v^2}{2} \right) = Q + \frac{k}{\rho} \nabla^2 T + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot ([\tau] \cdot v). \quad (14)$$

引进 $h_0 = h + \frac{v^2}{2}$ 表示单位质量流体的总焓(即总能量), 于是上式可写为

$$\frac{dh_0}{dl} = \frac{1}{v} \left[Q + \frac{k}{\rho} \nabla^2 T + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot ([\tau] \cdot v) \right] \quad (14')$$

此式表示流体的总能量沿空间流线 l 的变化率, 因此把它称为能量方程. 由上可见, 能量方程只是焓梯度方程沿流线方向上的表示形式.

于是, 变换后的新方程组由方程 (4) (5) (8) (11) (12) (13) (14) 组成 (其中方程 (11) 只能再取除流线方向外的二个方向的方程形式), 其中包含的未知量为 v, ρ, ρ, T, h, S , 因此方程组仍然封闭, 可以用来进行数值计算.

三、叶轮机中的方程形式和边界条件

根据叶轮机中流体的流动特点, 可以选用柱面坐标系 (r, θ, z) 来进行讨论, 其中 z 轴与叶轮的轴相重合. 对于本文中所考虑的轴对称流动, 其所有的流动参量对 θ 的偏导数都为 0, 于是, 可以将上述诸方程写成下列形式

(一) 焓梯度方程 (11) 可以写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial r} &= T \frac{\partial S}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{4}{3} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{4}{3} \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{4}{3} \frac{v_r}{r^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v_x}{\partial r \partial z} \right] - \left[v_m \frac{dv_r}{dm} - \frac{v_\theta^2}{r} \right] \\ \frac{\partial h}{\partial \theta} &= \frac{\mu r}{\rho} \left[\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] - v_m \frac{d(rv_\theta)}{dm} \\ \frac{\partial h}{\partial z} &= T \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial z} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial z} \right] - v_m \frac{dv_x}{dm} \end{aligned} \right\} \quad (15)^*$$

其中 $\frac{d}{dm}$ 表示流动参量沿空间流线变化时对于子午流线所取的全导数, v_r, v_θ, v_x 为流体速度 v 在柱面坐标系 (r, θ, z) 中的分量, v_m 为 v 在子午面上的投影, 它们之间满足关系

$$v_r = v_m \sin \alpha \quad v_x = v_m \cos \alpha \quad v_\theta = v \sin \beta \quad v_m = v \cos \beta$$

其中 α 为子午流动角, β 为周向流动角 (见图 1).

对于流场中任一条空间曲线 q , 焓 h 沿该曲线 q 的方向导数为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dh}{dq} &= \frac{\partial h}{\partial r} \frac{dr}{dq} + \frac{\partial h}{\partial z} \frac{dz}{dq} + \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dq} = T \frac{dS}{dq} + \left\{ \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{4}{3} \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{4}{3} \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{4}{3} \frac{V_r}{r^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 V_x}{\partial r \partial z} \right] - \left[V_m \frac{dV_r}{dm} - \frac{V_\theta^2}{r} \right] \right\} \frac{dr}{dq} + \left\{ \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 V_r}{\partial r \partial z} \right] - V_m \frac{dV_x}{dm} \right\} \frac{dz}{dq} \\ &\quad + \left\{ \frac{\mu r}{\rho} \left[\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} \right] - V_m \frac{d(rv_\theta)}{dm} \right\} \frac{d\theta}{dq} \end{aligned} \right\} \quad (16)^*$$

* 对于轴对称流动, 理应取 $\frac{\partial h}{\partial \theta} = 0$, 于是此式就是无叶流道中轴对称流动所满足的方程. 至于现在所讨论的叶列流道中, 由于叶片力的存在, 应暂时保留 $\frac{\partial h}{\partial \theta}$ 这一项.

其中 q 可以任意取为三个互不共面的方向而得到这三个方向上所满足的方程。一般可以选取这样三个方向：第一个可取为流线方向，这个方向上的焓梯度方程就是前面所导出的能量方程 (14)；第二个可取为 θ 方向，对于轴对称流动来说， θ 方向上的方程是不必要的；第三个可取为与流线和 θ 方向不共面的一条空间曲线，这条曲线称为计算站线，简称为站线，当我们在中间 S_2 流面上计算时，这站线必须位于中间 S_2 流面上，站线在子午面上的投影曲线称为子午站线，一般可将子午站线取为与子午流线接近于正交的一条直线，这就是文献 [7] 中所谓的准正交线 (图 2, 3)。这时方程 (16) 可以改写为

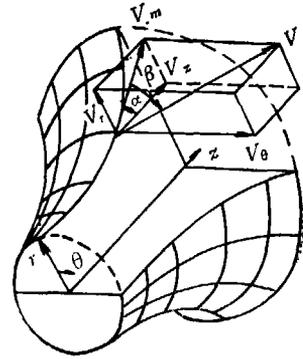


图 1

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dn} = T \frac{dS}{dn} + & \left\{ \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{4}{3} \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{4}{3} \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} \right. \right. \\ & - \frac{4}{3} \frac{V_r}{r^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 V_z}{\partial r \partial z} \left. \right] - \left[V_m \frac{dV_r}{dm} - \frac{V_\theta^2}{r} \right] \right\} \cdot \cos \varphi \\ & + \left\{ \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 V_r}{\partial r \partial z} \right. \right. \\ & - \left. \left. V_m \frac{dV_z}{dm} \right\} \cdot \sin \varphi + \left\{ \frac{\mu r}{\rho} \left[\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - V_m \frac{d(rV_\theta)}{dm} \right\} \frac{d\theta}{dn} \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $\frac{d}{dn}$ 表示流动参量沿空间站线变化时对子午站线 n 所取的全导数， φ 为子午站线角。

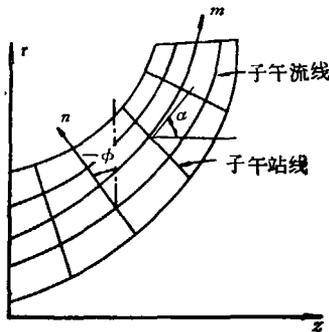


图 2

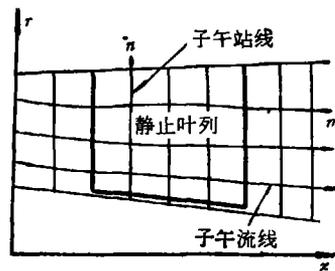


图 3

(二) 能量方程 (14) 可以写为

$$\begin{aligned} \frac{dh_0}{dm} = \frac{1}{V_m} \left\{ Q + \frac{k}{\rho} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{\rho} \left[V_r \left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{4}{3} \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} \right. \right. \right. \\ & - \frac{4}{3} \frac{V_r}{r^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 V_z}{\partial r \partial z} \left. \right) + V_\theta \left(\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} \right) \\ & \left. \left. + V_z \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 V_r}{\partial r \partial z} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{V_r}{r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right)^2 \\
 & + \left. \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 \right\} \quad (18)
 \end{aligned}$$

(三) 熵方程 (13) 可以写为

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dm} = \frac{1}{V_m T} \left\{ Q + \frac{k}{\rho} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{\rho} \left[2 \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{V_r}{r} \right)^2 \right. \right. \\
 \left. \left. + 2 \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right)^2 \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} \quad (19)
 \end{aligned}$$

以上三个方程都已写成了沿非正交曲线方向 m 和 n 上的导数形式, 如果方程式的右边项都能预先给出, 那么这些方程就成为简单的常微分方程, 于是问题变得非常简单, 而这在迭代计算中是容易做到的, 这也是本方法的一个特点。

要计算叶轮机静止叶列中的粘性可压缩轴对称流动问题, 还需要以下边界条件:

1. 叶列流道中内外壁面上的速度必须为 0, 即 $w_n = 0$ 。壁面上的温度可以有二种给法: (1) 等温壁面, 即给出壁面上的温度分布情况; (2) 绝热壁面, 即壁面上的温度法向导数必须为 0。根据温度与焓之间所满足的关系式 (5), 可以相应地写出焓的边界条件。

2. 在计算叶轮机叶列中的流动时, 为了消除进出口边界条件的人为选择而带来的影响和误差, 需要在其进出口处向上游和下游延伸一段距离。在上下游延伸的区域中, 由于是无叶区域, 没有叶片力的作用, 因此可由方程 (15) 的中间一式中令 $\frac{\partial h}{\partial \theta} = 0$ 而得到

$$\frac{d(rV_\theta)}{dm} = \frac{\mu r}{\rho V_m} \left(\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} \right) \quad (20)$$

这就是延伸区域中气流的周向速度 V_θ 所满足的公式。

四、数值计算方法和计算实例

本文采用流线迭代法进行数值计算, 现以叶轮机静止叶列中轴对称流动为例来叙述本方法的具体计算步骤。

1. 在中间 S_2 流面 (包括静止叶列内部和上下游延伸区域) 上, 先选取若干条站线 q , 再按流量的某种分配原则划出假设流线 l , 于是, 流线与站线组成了一个计算网格, 并在网格点上假设 V_m 、 ρ 和 T 的分布情况。

2. 将中间 S_2 流面上的计算网格投影到子午平面上, 从而得到由于子午流线 m 和子午站线 n 所组成的一个子午网格。利用数值微分来得到子午流动角 α 和子午站线角 φ :

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \arctg \frac{dr}{dz} \Big|_{\#m} \\
 \varphi &= \arctg \frac{dz}{dr} \Big|_{\#n}
 \end{aligned}$$

3. 在静止叶列内部区域中, 可根据静止叶片中弧面形状来计算 V_θ 和周向流动角 β :

$$V_\theta = V_m r \left. \frac{d\theta}{dm} \right|_{\text{叶片}} \quad (21)$$

$$\beta = \arctg \frac{V_\theta}{V_m} \quad (22)$$

对于反问题, 可以根据所选择的流型来计算 V_θ , 再按公式 (22) 得到 β 值.

在延伸区域中, 可以对方程 (20) 进行数值积分和迭代计算来得到 V_θ 值, 再按公式 (22) 得到 β 值.

4. 利用数值微分得到流动参量 V_r 、 V_θ 、 V_z 和 T 沿子午流线 m 和子午站线 n 的方向导数值, 再利用导数性质

$$\left. \begin{aligned} \frac{df}{dm} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{dr}{dm} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dm} \\ \frac{df}{dn} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{dr}{dn} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dn} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

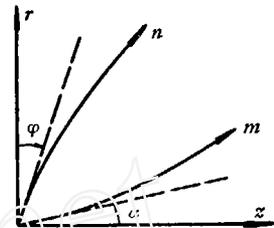


图 4

其中 f 表示某一个流动参量

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dm} &= \sin \alpha & \frac{dz}{dm} &= \cos \alpha \\ \frac{dr}{dn} &= \cos \varphi & \frac{dz}{dn} &= \sin \varphi \end{aligned} \right\}$$

这些都是已知的, 于是, 可以通过求解线性代数方程组 (23) 而得到 $\frac{\partial f}{\partial r}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial z}$ 的值.

对于二阶导数值, 同样可以通过求解线性代数方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2f}{dm^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \left(\frac{dr}{dm} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial r} \right) \frac{dr}{dm} \frac{dz}{dm} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \left(\frac{dz}{dm} \right)^2 \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{d^2r}{dm^2} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{d^2z}{dm^2} \\ \frac{d^2f}{dn^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \left(\frac{dr}{dn} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial r} \right) \frac{dr}{dn} \frac{dz}{dn} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \left(\frac{dz}{dn} \right)^2 \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{d^2r}{dn^2} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{d^2z}{dn^2} \\ \frac{d^2f}{dmdn} &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \frac{dr}{dm} \frac{dr}{dn} + \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial z} \frac{dr}{dm} \frac{dz}{dn} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial r} \frac{dz}{dm} \frac{dr}{dn} \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \frac{dz}{dm} \frac{dz}{dn} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{d^2r}{dmdn} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{d^2z}{dmdn} \\ \frac{d^2f}{dndm} &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \frac{dr}{dn} \frac{dr}{dm} + \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial z} \frac{dr}{dn} \frac{dz}{dm} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial r} \frac{dz}{dn} \frac{dr}{dm} \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \frac{dz}{dn} \frac{dz}{dm} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{d^2r}{dndm} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{d^2z}{dndm} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

来得到流动参量的二阶导数值 $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial z}$ 和 $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial r}$. 由于在理论上说必须有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial r},$$

因此我们可以取它们的平均值作为 $\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial z}$ 的值用到各个方程中去。

5. 在每条流线上(除壁面流线外)对能量方程(18)和熵方程(19)进行数值积分,并用进口处的总焓和熵的值来决定积分常数。即可得到整个流场(除壁面外)的总焓和熵的分布。

6. 在每条站线上对焓梯度方程(17)进行数值积分,并利用壁面边界条件即可得到焓 h 的分布,再利用总焓定义和式(12)、(4),可得到 v 、 p 、 ρ 的值,在数值积分中的一个积分常数可以利用流量公式(8)来决定。

7. 按照预定的流量分配原则,通过流量反插得到新的流线位置,并利用小于1的松弛因子得到新的假设流线位置,然后再回到第2步进行下一循环的迭代计算,直到假设流线位置与新的流线位置之间的差距满足精度要求时为止。这时所得到的计算结果就是我们所需要的数值解。

在以上所叙述的计算步骤中没有涉及到一些具体的数值计算方法和编制程序中的一些细节问题,这将在另文中再作详细的叙述和讨论。

利用本方法曾对多种流道进行了多种方案的计算,这里仅将某轴流式涡轮静止叶列中的部分计算结果画在图5中,从图中可以看出粘性效应对速度和温度分布的影响。

本方法的特点是基本方程简单明了,计算简便,计算速度快,以上算例中取21条流

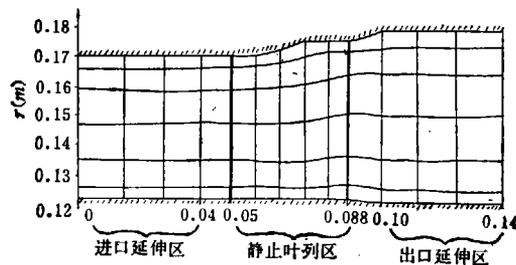


图5(a) 轴流式涡轮静止叶列流道中子午流线与子午站线分布图

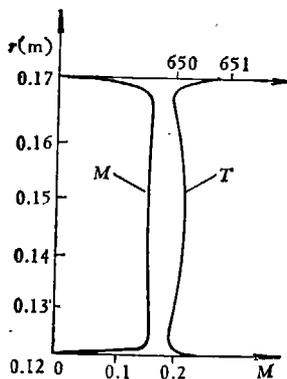


图5(b) 进口截面上M和T的分布

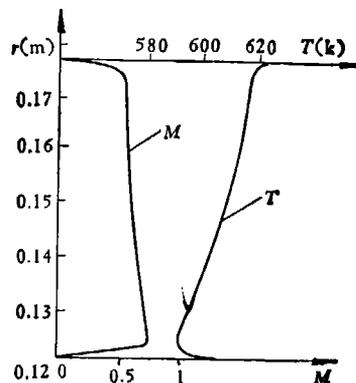


图5(c) 出口截面上M和T的分布

线, 14 条站线, 在要求流线误差不超过 0.1 mm 时, 在 719 计算机 (12.5 万次/秒) 上的计算时间不超过 5 分钟 (不包括打印时间), 而且所需要的计算机内存也并不太多。因此, 本方法可以广泛地应用于工程设计之中。

五、结 论

本文提出了一种新的数值计算方法, 通过任意非正交曲线方向上的焓梯度方程、能量方程和熵方程之间的迭代计算, 可以得到任意形状的变截面弯曲管道中粘性可压缩定常层流问题的数值解。本方法的特点是在任意非正交曲线网格中建立了粘性流动的基本方程, 而且在迭代计算中这方程都可以简化为常微分方程, 因此使计算特别简便。

本文讨论了静止坐标系中的基本方程和轴对称流动问题的计算方法, 并对叶轮机械静止叶列中的轴对称流动进行了数值计算。计算结果表明本方法是简便和适用的。在第二部分中将建立旋转坐标系中粘性可压缩流动的基本方程, 并对叶轮机械旋转叶列中的轴对称流动进行数值计算。

参 考 文 献

- [1] Wu, C. H. (吴仲华). A general theory of three-dimensional flow in subsonic and supersonic turbomachines of axial radial and mixed flow types, NACA TN 2604 (1952).
- [2] 沂孝康, 蒋锦良, 朱士如, 力学学报, 1 (1979), 42—51.
- [3] 吴仲华, 静止与运动坐标系下的气动热力学基本方程粘性力的作用与粘性项的物理意义, 机械工程学报, 13, 4 (1965).
- [4] Patankar, S. V., Spalding, D. B., A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows, *International journal of heat and mass transfer*, 15 (1972).
- [5] Pratap, V. S., Majumder, A. K., Spalding, D. B., Numerical computation of flow in rotating ducts, *T. ASME. SI.*, 99, 1 (1977).
- [6] Ghia, V., Ghia, K. N., Staderus, C. J., Three-dimensional laminar incompressible flow in straight polar ducts, *Computers and fluids*, 5, 4 (1977).
- [7] Katsanis T., Use of arbitrary quasi-orthogonals for calculating flow distribution in the meridional plane of a turbomachine, NASA TN D-2546 (1964).

NUMERICAL COMPUTATION OF THE VISCOUS COMPRESSIBLE FLOW IN TURBOMACHINERY. (I) COMPUTATION OF AXISYMMETRICAL FLOW IN THE STATOR

Jiang Jin-liang

(Fudan University, Shanghai)

Abstract

Paper presents a numerical method for computing the viscous compressible steady laminar flow in turbomachinery. Numerical solution is obtained by iterative computation based on the enthalpy gradient equation, energy equation and entropy equation, expressed along arbitrary curved lines. This paper describes the computational method of axisymmetrical flow in the stator.