

叶轮机械完全三元流动解的若干问题

陈 静 宜 刘 殿 魁

(中国科学院工程热物理研究所)

提要 目前叶轮机械内的完全三元流动解法大都立足于吴仲华教授的两类流面理论。本文澄清了完全三元解精度的概念,讨论了求解亚音速流场时边界条件的提法,同时给出了一个边界条件提法的新建议。分析表明,只有当两类流面的边界条件是在严格满足三元方程意义下的完全相容时,三元流场解的精度才可以收敛到误差小于任意规定的小量。结合本文分析,对 1978 年以来国内外开始发表的叶轮机械完全三元流动解法^[1,2]进行了初步的比较和评价。

前 言

关于叶轮机械内的三元流动计算,目前国内外都有进展,出现了所谓完全三元解法^[1,2]。这种解法虽已出现,但远未成熟,例如同样是计算经流式叶轮内部流场,文献[1]的结果是流面翘曲相当显著,表明了完全三元解的十分必要;但文献[2]的结果是 s_1 流面翘曲量很小,与通常的二元解差别很小。同样,文献[1]认为作数值解时速度收敛的精度是有限的,且因物理问题不同而异,该文例题只达到 6%;而文献[2]却无此限制,达到了相对马赫数误差 3×10^{-4} 的量级,究竟哪个更合理?我们拟结合自己的工作^[3],对这些问题进行较为详细的比较和讨论。

对解法的讨论

文献[1],[2]和[3]的解法都是基于吴仲华教授在文献[4]中建立的 s_1 和 s_2 两类流面理论,实质上都是把三元问题采用流面概念降维为 s_1 和 s_2 流面上的二元问题。可以证明,在定常、无粘、亚音流动的前提下,这些二元问题是用非线性的椭圆型偏微分方程描述的。完全三元解就在于找出一个三维场,它既满足一系列的 s_1 流面边值问题,又满足一系列的 s_2 流面边值问题。对此可作如下形象的描述:将某一叶道空间划分为一系列具有一定流片厚度的 s_1 流面和一系列 s_2 流面,对二元问题而言,是在形状和厚度这两个几何特征均为固定的流面上解边值问题,而三元问题则是在二者均为浮动的流面上解边值问题,每一系列流面的求解都将告诉另一系列流面:它们的几何特征应该怎样变动。随着交叉迭代的继续,变动量不断减少,直至完全静止不动,此时两组边值问题的解将在三元流场内处处重合,这就是完全三元流动的终解。显然这与通常的二元边值问题不是一个概念,判断其求解精度的方法也完全不同。

根据上面讨论,可按以下条件衡量完全三元解的精度^{[1][3]}:

本文于 1979 年 11 月 26 日收到。

$$\varepsilon_W = |W_{s_1} - W_{s_2}|_{\max} < \varepsilon$$

其中的 W_{s_1} 和 W_{s_2} 分别为同一节点上按 s_1 和 s_2 流面求解得到的相对速度。而文献 [2] 中采用的衡量收敛精度的条件是:

$$\varepsilon_W = |W_{v+1} - W_v|_{\max} < \varepsilon$$

其中 v 为迭代次数, $W_v = (W_{s_1} + W_{s_2})/2$ 。

显然, W_v 与 W_{v+1} 的收敛并不代表 s_1 和 s_2 两组二元解的彼此重合, 这样得到的速度场无论是 s_1 还是 s_2 流面的边值问题都未满足, 文献 [2] 认为这是在‘平均意义’上的同时满足, 但‘平均化’本身就有人为加权的任意性, 例如我们还可取 $W_v = A_1 W_{s_1} + A_2 W_{s_2}$ (A_1 、 A_2 为任意取的加权常数)。可以预见, 按文献 [2] 的解法同样‘收敛’, 其结果则会完全不同了, 因此文献 [2] 给出的精度 3×10^{-4} 量级值得商榷。文献 [2] 中还采用了其他一系列的‘平均’作法 (除运动方程外, 还有连续方程等), 这样作的结果可能模糊了 s_1 和 s_2 流面的‘个性’, 以至最后算出的 s_1 流面翘曲量很小。

边值问题的提法

在边值问题的求解中, 为使给定的边界条件与实际物理问题一致, 对叶栅计算, 传统的作法是将叶道分别向上、下游延伸到约 2 倍栅距以远的‘无穷远’处 (i 、 e 站), 并在此处给出均匀流条件 (图 1), 以期在边界上也能自动地满足运动方程, 从而使物理问题本身的提法合理。但是上、下游区边界流线的形状、以及流片厚度的分布却难于事先给出。例

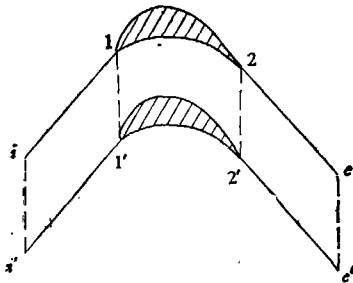


图 1

如在 s_2 流面计算中, 对带有内进气圆锥轴流式压气机的上游站和离心式压气机的下游站, 子午通道延伸的任意性十分明显。对离心叶轮, 为避免随半径增加出现超音的困难, 甚至只好将下游子午通道改为扩张型。另外, 对实际叶轮机械的中间级, 与平面叶栅风洞不同, 叶片前后往往只有很小的间隙即为另一排叶片, 边界流线同样难于向上、下游延伸。我们曾计算了两个同样的离心叶轮, 其区别仅在于 $K+1$ 站外子午面型线的 z 坐标相差 0.72 毫米, 若认为 $K+1$ 站就是下游延伸站, 计算表明这对叶轮出口流场 (K 站) 所引起的变化是很显著的 (图 2 为中分 s_2 流面上的速度分布)。

我们在文献 [5] 中引进了另一种解法: 把边界限定在叶栅前后缘或向外扩展很短一站, 并让边界上的参量和内部流场一同求解。现以标准的二元边值问题 $\nabla^2 \phi = 0$ 为例说明之 (图 3), 若 x 、 y 向均取同样的等距步长, 并在下标 $K = Km$ 和 Ko 的上、下壁面给定边值, 则对求解域中的所有内节点、下标 $j = jo$ 的上游各点和下标 $j = jm$ 的下游各点可分别按如下的中心、向前和向后差分格式

$$\phi_{j-1,K} + \phi_{j+1,K} - 4\phi_{j,K} + \phi_{j,K-1} + \phi_{j,K+1} = 0$$

$$\phi_{jo+2,K} - 2\phi_{jo+1,K} - \phi_{jo,K} + \phi_{jo,K-1} + \phi_{jo,K+1} = 0$$

$$\phi_{jm-2,K} - 2\phi_{jm-1,K} - \phi_{jm,K} + \phi_{jm,K-1} + \phi_{jm,K+1} = 0$$

写出共 $(Km - Ko - 1) \times (jm - jo + 1)$ 个线性独立的方程, 因此即可用以求解

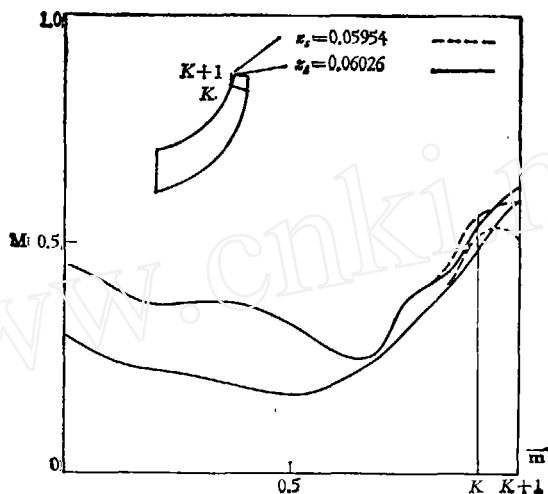


图 2

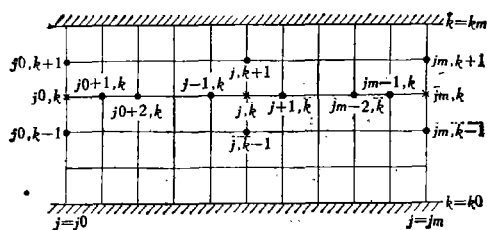


图 3

包括内节点和上、下游各点同样个数的未知函数 ψ 。

对于经典的边值问题,是只对内节点按中心差分格式写出共 $(K_m - K_o + 1) \times (j_m - j_o - 1)$ 个方程,并只对内节点求解,对上、下游各点则需要按未知函数本身(第一类)或其导数(第二类)的某种变化规律给定边值。对比之下看出,我们的解法则相当于按照运动方程本身所要求的气流参量变化规律给定了边值条件(注意上面的差分格式正相当于按样条函数作数值计算时二阶导数不变的端点条件),计算实践表明,对二元问题这种边界条件提法仍然是稳定、收敛的,用流线迭代法在计算机上可把包括进、出口站在内的全场流线收敛到满意的精度,例如绝对误差不大于 10^{-6} 毫米,并且迭代求解时不受初值扰动的影响。我们认为这种提法由于在边界上也满足方程(虽然由于不能用中心差分格式,还不是严格地满足方程),使得物理问题比较合理,同时又避免了向上、下游延伸的任意性,因此作为工程计算中边值条件的一种处理方法是合适的。

文献[3]中的完全三元解就是采用这种解法,同时为使叶轮出口满足周期性条件,我们自叶轮出口延伸一站作为下游边界,其周向坐标 θ 的调整量以 $\Delta\theta$ 表示,其同一迴转弧线上吸力面与压力面速度之差以 ΔW 表示,则与文献[5]类似,我们可采用任何求根方法,在计算机上自动寻找满足 $\Delta W = 0$ 的 $\Delta\theta$ 。文献[3]对一个后弯叶轮作了详细的三元流场计算,图4和图5分别给出了最靠近外壁的 s_1 流面上下游边界调整前后流线形状

和速度分布的对比。还应指出：随着周期性条件的接近满足，也改善了 s_1 和 s_2 流面边值的相容性，使三元流场解的精度由调整前的 $\varepsilon_w = 10\%$ 提高到 $\varepsilon_w = 3.5\%$ 。

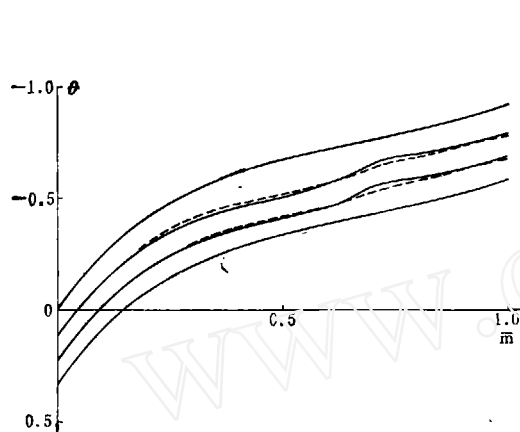


图 4
——调整后 ——调整前

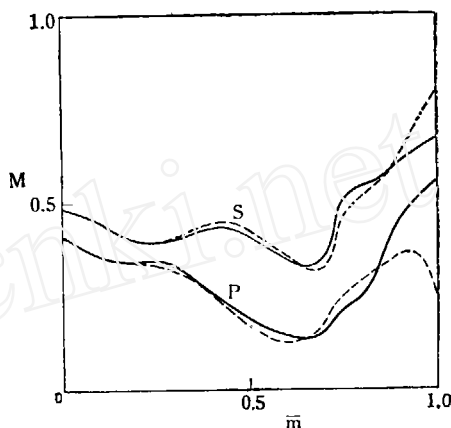


图 5
——调整后 ——调整前

我们看到文献[2]的计算中没有进行这种调整，文献[2]中图7、8、9所给出的速度场都是越接近出口载荷越大，因此 s_2 流面不是如实际现象所看到的那样向叶片压力面靠拢，反而是向叶片吸力面靠拢（叶轮滑动系数 μ 将大于1）。

应该指出，对于叶片载荷很大，试验证明经常处于分离流动状态的离心叶轮（特别是径向出口叶片、或叶片数很少的叶轮），采用上述调整方法往往并不能奏效，计算表明，这时所要求的下游边界流线位置的偏移量将如此之大，以至使出口站的流线曲率变化太大（因为无粘性计算中要求叶片表面就是流面），而常常使计算溢出——这也恰恰说明了物理现象与数学描述的关系，即：在叶片出口附近将产生分离流动。采用流函数方程求解时，在尾缘区加密计算站尽管能算出满足周期性条件的结果，但是强迫卸载必然使出口附近叶片吸力面上有急剧的压力上升（往往还伴有剧烈的波动），实际上流动早已分离，其计算结果仍然是不可信的。文献[1]中的例题也是径向出口叶片离心叶轮，但是仍用没有考虑分离的周期性条件来计算出口流场，虽然文献[1]中叶轮的载荷较小（出口截面叶片两表面相对马赫数之差小于0.3），但与实际模型是否一致，还有待于进一步验证。

完全三元解的精度

完全三元解的精度实质上是两类二元边值问题的重合程度，因此影响其精度的首要因素必然是边界条件的**相容性**。此外，由于 s_1 和 s_2 总是分别求解，而其差分方程不会以完全相同的特性去逼近原方程，例如由于 s_1 、 s_2 两个方向网格宽度比从进口到出口发生剧烈变化（指径流式叶轮），要使它们的截断误差相同是不可能的。这些就是精度有一定‘限制’的原因。文献[1]认为原因在于局部网格的变形，似乎只是后一因素的影响，我们认为前者可能是更本质的东西。

首先看一个很有趣的数值试验：按文献[3]中的例题2，当我们采用前述将进、出口站也包括在求解范围之内的解法，在 s_1 和 s_2 交叉迭代了40次左右时，达到的‘最佳’精度

为 $\varepsilon_W = |(W_{s_1} - W_{s_2}) / W_{s_1}|_{\max} < 5\%$, 流线网格在 θ 方向和 n 方向的收敛精度达到 $\varepsilon_{s_1, s_2} \approx 0.3$ 毫米左右, 进一步迭代下去将发生极其缓慢的发散(参见图 6 给出的另一轴流叶轮的计算结果); 但是如果我们把进、出口站的流线分布按第 40 次迭代的结果固定住(相当于取不严格满足运动方程的边值条件), 再作 s_1 、 s_2 迭代, 则可将求解精度改善到 $\varepsilon_W \approx 1\%$ 和 $\varepsilon_{s_1, s_2} \approx 0.04$ 毫米, 继续迭代则又发生极缓慢的回升^[2]; 如果我们再进一步固定住进、出口向内邻近一站的流线, 则又可以前进到 $\varepsilon_W \approx 0.5\%$ 和 $\varepsilon_{s_1, s_2} \approx 0.03$ 毫米(图 7), 而且在以上计算中, 只要最大流线位置误差发生在求解域的边界截面, 即达到了了解的‘极限’精度。

以上计算充分显示了边值的重要影响, 固定边界之所以能够提高解的精度, 除了改为按第一类边值问题求解所带来的好处外, 是因为使 s_1 和 s_2 本来不相容的边界条件强迫相容, 并使边界附近的流场与之相适应。然而由于是强迫相容, 此时的边界条件并不严格满足三元方程, 因此精度的改善又是有限的。固定边界的截面越向内移, 边界条件满足三元方程的程度越高, 相容性越好, 因此上述改善精度的过程则不断在更高的水平上再现一次。因此我们认为: 只有当给定的边界条件严格满足三元运动方程时, 它们才是完全相容的, 此时三元流场解的精度才可以任意给定。我们还可以推论: 如果能把求解域延伸到上、下游无穷远处, 那里的流场真正是均匀的(亦即自动满足了三元的运动方程), 则三元流场解的精度也是可以任意给定的。

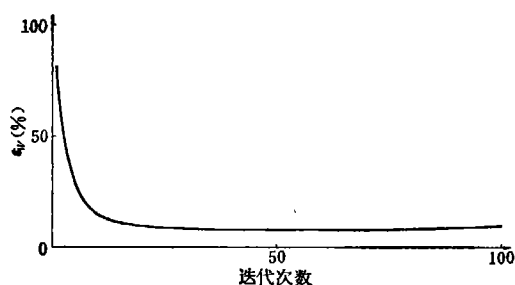


图 6

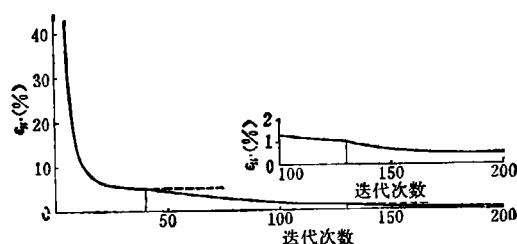


图 7

应该说明, 以上讨论都是针对用两个二元问题的交叉迭代来获得三元解的方法而言的。这种方法简捷明了, 概念清晰, 但确在数值求解上带来了新的问题。通常的二元边值问题, 可以任意给定边值(尽管不一定满足方程), 数学上就能够得到稳定收敛解, 而在三元解中则提出了两个二元问题相容的要求。由此带来的区别还表现在网格疏密的影响上, 同一例题, 沿流线方向计算站的数目不变, 但在求解 s_1 和 s_2 运动方程的方向取疏密不同的网格, 对二元问题网格越密精度越高, 对三元问题则相反。此外我们知道, 微分方程只有与其初、边值条件一起才能构成定解问题, 正是这一基本事实影响着微分方程相互迭代解的精度, 并从根本上有别于代数方程组的迭代解。前面我们讨论了用降维方法构成微分方程迭代解的精度, 近年来还有用改变未知函数个数的方法来构成微分方程的迭代解, 此时解的精度也存在类似的限制, 如文献[6]的解法收敛到误差不大于 6%。

1) 作者感谢朱荣国同志在以上计算中给予的建议与协助。

结 束 语

1. 采用两类流面上二元问题的交叉迭代,从而获得三元流场的解法给数学上带来了需要探讨的新问题。我们目前的认识是:完全三元流动解的精度是指这两类二元问题解的重合程度,这与通常二元边值问题解的精度概念是不同的。只有当边界条件是在严格满足三元方程意义下的完全相容时,三元流场解的精度才可以任意给定。

2. 采用边界上的参量与内部流场一同求解,亦即按运动方程本身所要求的变化规律给定边值的解法避免了将求解域向上、下游延伸的任意性,也使得物理问题比较合理。

3. 在不考虑粘性 and 分离的计算中,从满足周期性条件出发,进行上、下游边界的调整是必要的,对改善三元解的精度也是有利的。但对于叶片载荷很大的离心叶轮,则应该建立更为符合实际分离流动模型的计算方法。

参 考 文 献

- [1] Krimmerman, Y., Adler, D., The Complete Three-Dimensional Calculation of the Compressible Flow Field in Turbo-Impellers, *Journal of Mechanical Engineering Science*, 20, 3 (1978).
- [2] 忻孝康,蒋锦良,朱士灿,计算叶轮机械三元流动的任意准正交面方法(II)——S₁ 流面翘曲的三元流动计算,力学学报, 1 (1979).
- [3] 刘殿魁,陈静宜,叶轮机械内的三元流动解法——“流面坐标”迭代法,工程热物理学报, 3 (1980).
- [4] 吴仲华, A General Theory of Three-Dimensional Flow in Subsonic and Supersonic Turbomachines of Axial, Radial, and Mixed-Flow Types, NACA TN 2604 (1952).
- [5] 陈静宜,刘殿魁,叶轮机械沿任意曲线运动方程的通用形式及其应用,叶轮机械气动热力计算,设计与试验交流文集 (1976).
- [6] Dodge, P. R., Separated Flow Program, AD A-015707 (1975).

SOME PROBLEMS CONCERNING THE METHODS FOR SOLVING THE THREE-DIMENSIONAL FLOW IN TURBOMACHINERY

Chen Jing-yi Liu Dian-kui

(Institute of Engineering Thermophysics, Academia Sinica)

Abstract

At present, most of the methods for solving the complete three-dimensional flow in turbomachinery have their foothold on Wu's theory of two families of stream-surfaces. In this paper the concept of the accuracy of the complete three-dimensional solution is clarified. The specification of boundary conditions is discussed for the subsonic case and a new suggestion for giving the boundary condition is presented. It is shown, that only if the boundary conditions of the two families of streamsurfaces are fully compatible in the sense of rigorously satisfying the three-dimensional equations, would the complete three-dimensional flow solution converge to within an error less than any specified small value. In connection with the analysis of this paper some preliminary comparison and evaluation have been made with regard to the methods for solving complete three-dimensional flow in turbomachinery published since 1978.