

绕经钝体身部的高超音速流动

吴 江 航

(北 京 大 学)

文献 [1], [2], [3], [4] 等分析绕经钝头细长体高超音速流动, 将后身流场分为熵层和外层 (在本文中称作激波层), 给出了有如下列形式的熵层厚度和压力分布的近似关系式, 即压力面积公式:

$$p_c^{1/\gamma} (r_c^{j+1} - r_w^{j+1}) = C$$

文献 [2], [3], [4] 还研究了熵层和激波层相互作用的一致有效解。但是它们存在

三个缺点: (1) 没有给出唯一确定熵层边界的条件; (2) 大多是反问题; (3) 不能用于钝体头部和后身的过渡区。本文为了克服这三个缺点, 求解了绕经钝体身部的高超音速流动。

1. 熵层解 在如图 1 所示的坐标系中, 将熵层内流动参数所应满足的无量纲方程式写成第一积分的形式, 有

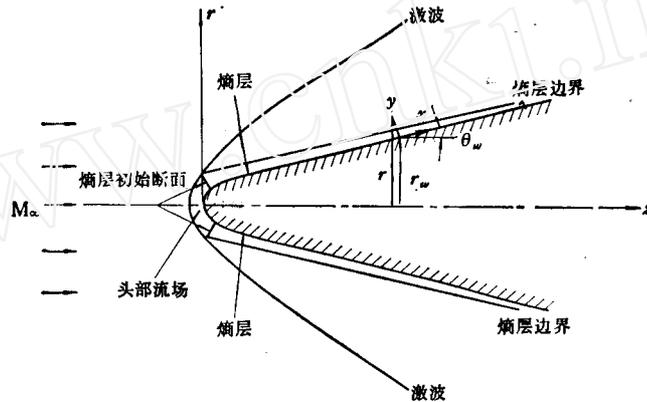


图 1 流场划分与坐标系

$$\begin{aligned} \psi &= \int_0^y \rho u r^j dy \\ p &= p_c(x) \\ \frac{p}{\rho r} &= \omega(\psi) \end{aligned}$$

$$u = \sqrt{1 - \frac{2\gamma}{\gamma-1} \omega^{1/\gamma}(\psi) p_c^{(1-1/\gamma)}(x)}$$

其中 $\omega(\psi)$ 为头部激波形状所决定的一已知函数。

由上列关系式可得

$$p_c^{1/\gamma}(x) \frac{(r_w + y \cos \theta_w)^{1+j} - r_w^{1+j}}{(1+j) \cos \theta_w}$$

$$= \int_0^\psi \frac{\omega^{1/\gamma}(\psi) d\psi}{\sqrt{1 - \frac{2\gamma}{\gamma-1} \omega^{1/\gamma}(\psi) p_c^{(1-1/\gamma)}(x)}}$$

在熵层边界有

$$\begin{aligned} p_c^{1/\gamma}(x) (r_c^{j+1} - r_w^{j+1}) &= (1+j) \cos \theta_w \\ &\times \int_0^{\psi_c} \frac{\omega^{1/\gamma}(\psi)}{\sqrt{1 - \frac{2\gamma}{\gamma-1} \omega^{1/\gamma}(\psi) p_c^{(1-1/\gamma)}(x)}} d\psi \end{aligned}$$

将上式应用于熵层的初始断面, 应与头部

本文于 1979 年 9 月收到。

流场连续衔接。通过与头部流场的逐步校合,即可定出熵层初始断面的位置 x_0 和熵层边界的流线 $\phi_c = \frac{1}{j+1} r_c^{j+1}$ 。

在细长体的后身 $p_c^{(1-\frac{1}{\gamma})}(x)$ 方为小量,有展式

$$p_c^{\frac{1}{\gamma}}(x)(r_c^{j+1} - r_w^{j+1}) = (j+1) \cos \theta_w \times \left[\int_0^{\phi_c} \omega^{\frac{1}{\gamma}}(\phi) d\phi + \dots \right]$$

若只取展式的首项,则与前面引用的公式形式一致,但此公式中无任何待定常数,熵层边界也是唯一确定的。

2. 激波层解 在身为超音速流场,可采用特征线形式的运动方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\partial f(\mu)}{\partial \xi} - \frac{\sin 2\mu}{2\gamma(\gamma-1)\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \\ + j \frac{\sin \theta \sin \mu}{\cos(\theta+\mu)r} \frac{\partial Z}{\partial \xi} = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\partial f(\mu)}{\partial \eta} + \frac{\sin 2\mu}{2\gamma(\gamma-1)\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \\ - j \frac{\sin \theta \sin \mu}{\cos(\theta-\mu)r} \frac{\partial Z}{\partial \eta} = 0 \\ \frac{\partial r}{\partial \xi} = \operatorname{tg}(\theta+\mu) \frac{\partial Z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} = \operatorname{tg}(\theta-\mu) \frac{\partial Z}{\partial \eta} \end{aligned}$$

其中 $f(\mu)$ 为 Prandtl-Meyer 函数。

引入变量

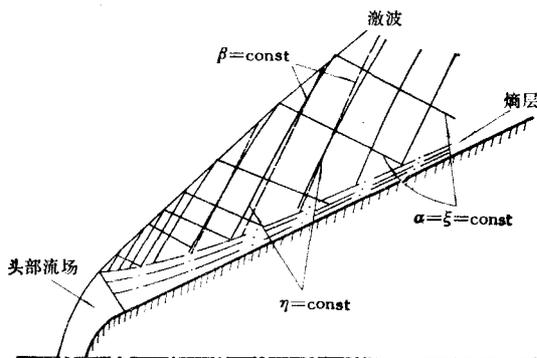


图2 特征线与 α, β 线

$$\alpha = \xi \quad \beta = \frac{1}{2}(\theta - f(\mu))$$

其中 $\alpha = \text{const.}$ 为正 Mach 线,即 $\frac{dr}{dZ} = \operatorname{tg}(\theta - \mu)$;

$\beta = \text{const.}$ 在平面等熵流动中与负 Mach 线重合,在非平面等熵流动中则与负 Mach 线有所偏离,设为

$$\frac{dr}{dZ} = \left(1 + \frac{G}{F}\right) \operatorname{tg}(\theta + \mu),$$

如图2。其中 $\frac{G}{F}$ 表示偏离度。

引入变量 $\phi = \frac{1}{2}(\theta + f(\mu))$, 将方程组转换到 (α, β) 上求解,并令

$$\frac{\partial Z}{\partial \alpha} = F(\alpha, \beta) \quad \frac{\partial Z}{\partial \beta} = H(\alpha, \beta)$$

有

$$\frac{\partial r}{\partial \alpha} = [F(\alpha, \beta) + G(\alpha, \beta)] \operatorname{tg}(\theta + \mu)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \beta} = H(\alpha, \beta) \operatorname{tg}(\theta - \mu)$$

$$G \operatorname{tg}(\theta + \mu) + \frac{\sin 2\mu}{4\gamma(\gamma-1)\omega}$$

$$\times \left\{ H[\operatorname{tg}(\theta - \mu) - \operatorname{tg}(\theta + \mu)] \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \right.$$

$$\left. - G \operatorname{tg}(\theta + \mu) \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \right\} - j \frac{\sin \theta \sin \mu}{2 \cos(\theta + \mu)r}$$

$$\times H \{ F[\operatorname{tg}(\theta - \mu) - \operatorname{tg}(\theta + \mu)]$$

$$- G \operatorname{tg}(\theta + \mu) \} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \beta} + \frac{\sin 2\mu}{4\gamma(\gamma-1)\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \beta}$$

$$- j \frac{\sin \theta \sin \mu}{2 \cos(\theta - \mu)r} H = 0$$

沿流线 $\omega = \omega(\alpha, \beta) = \text{const.}$, 因而有

$$H[\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg}(\theta - \mu)] \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + [(F + G)$$

$$\times \operatorname{tg}(\theta + \mu) - F \operatorname{tg} \theta] \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = 0$$

在激波上有

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{H[\operatorname{tg}(\theta - \mu) - \operatorname{tg}\delta_s]}{F \operatorname{tg}\delta_s - (F + G) \operatorname{tg}(\theta + \mu)}$$

其中 $\delta_s = \delta_s(M_\infty, \theta)$ 为激波斜角, 由激波条件所决定。

沿流线有

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{H[\operatorname{tg}(\theta - \mu) - \operatorname{tg}\theta]}{F \operatorname{tg}\theta - (F + G) \operatorname{tg}(\theta + \mu)}$$

解出 $\phi, \omega, F, H, G, Z, r$ 后亦可求得激波形状和流线。

对于高超音速流动可以找出大 M 数的渐近解, 忽略 $\varepsilon = O\left(\frac{1}{M}\right)$ 以上的小量, 有

$$G_0 = 0$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial \beta} = \frac{\partial H_0}{\partial \alpha}$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} [F_0 \operatorname{tg}(\theta + \mu)]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \alpha} [H_0 \operatorname{tg}(\theta - \mu)]$$

$$H_0 [\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}(\theta - \mu)] \frac{\partial \omega_0}{\partial \alpha}$$

$$+ F_0 [\operatorname{tg}(\theta + \mu) - \operatorname{tg}\theta] \frac{\partial \omega_0}{\partial \beta} = 0$$

它们的解为

$$\phi_0 = \phi_0(\alpha)$$

$$F_0 = C(\alpha)$$

$$\times \frac{\cos(\theta + \mu) [(r - \cos 2\mu)/2]^{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}}}{(\cos \mu)^{1/2} (\sin \mu)(\gamma + 1)/2(\gamma - 1)}$$

因为 α 只决定于正 Mach 线, 可令 $C(\alpha) = 1$, 这样

$$H_0 = F'_0(\beta)\alpha + D(\beta)$$

其中 $D(\beta)$ 由熵层解和激波层解连续衔接所决定。

沿后身斜激波, 近似有

$$\phi_0 = \frac{1}{2} (\theta + f(\mu)) = \text{const.}$$

即膨胀波的解。这对高超音速流动的激波

膨胀波法给予了理论上的说明。

3. 熵层边界 将激波层解应用于熵层边界上, 有

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\beta} &= \frac{H_0}{1 + \frac{y}{R}} \cos \theta_w \\ &\times \left\{ \frac{\operatorname{tg}(\theta - \mu) - \operatorname{tg}(\theta + \mu)}{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}(\theta + \mu)} \right\} \\ &\times (1 + \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\theta_w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\beta} &= H_0 \cos \theta_w \\ &\times \left\{ \frac{\operatorname{tg}(\theta - \mu) - \operatorname{tg}(\theta + \mu)}{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}(\theta + \mu)} \right\} \\ &\times (\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\theta_w) \end{aligned}$$

与熵层边界上的熵层解联立求解, 有

$$\begin{aligned} H_0 &= \left\{ \cos \theta_w \left[\frac{\operatorname{tg}(\theta - \mu) - \operatorname{tg}(\theta + \mu)}{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}(\theta + \mu)} \right] \right. \\ &\times \left[j y \sin \theta_w \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{y}{R}}{1 + \frac{y}{R}} (1 + \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\theta_w) \right. \\ &\left. \left. + (r_w + y \cos \theta_w)^j (\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\theta_w) \right]^{-1} \right. \\ &\left. \times L(p) \frac{dp}{d\mu} \frac{d\mu}{d\beta} \right\} \end{aligned}$$

其中

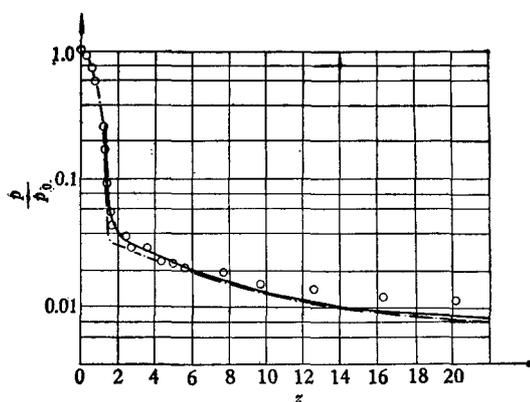


图 3 球头圆柱体上的压力分布

○ 实验 $M_\infty = 7$ ———— Чушкин 数值解 $M_\infty = 10$
—— 本文结果 $M_\infty = 10$

$$p = p_{sc} \left(\frac{\sin \mu}{\sin \mu_{sc}} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{d\mu}{d\beta} = \frac{\gamma-1}{2} + \frac{\sin^2 \mu}{\cos^2 \mu}$$

$$L(p) = \frac{1}{p^{(1+\frac{1}{\gamma})}}$$

$$\times \int_0^{\psi_c} \frac{\omega^{\frac{1}{\gamma}}(\psi) \left[-\frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \omega^{\frac{1}{\gamma}}(\psi) p^{(1-\frac{1}{\gamma})} \right]}{\left(1 - \frac{2\gamma}{\gamma-1} \omega^{\frac{1}{\gamma}}(\psi) p^{(1-\frac{1}{\gamma})} \right)^{3/2}} \times d\psi$$

由此而定出熵层边界位置和

$$D(\beta) = H_0 - F'_0(\beta)\alpha$$

根据本文给出的公式, 计算了 $M_\infty = 10$ 的球头圆柱体上的压力分布和激波形状, 与 Чушкин 的数值解和 $M_\infty = 7$ 的实

验结果的比较在图 3、图 4 中给出。符合程度是相当好的。

本文蒙孙天风教授的指教, 何道平同志进行数值计算, 李岫荣同志帮助制图, 谨致谢意。

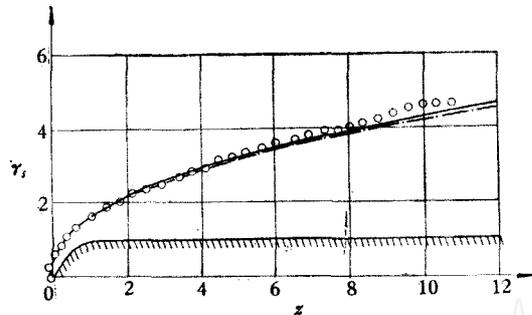


图 4 球头圆柱体绕流的激波形状

○ 实验 $M_\infty = 7$ ———— Чушкин 数值解
 $M_\infty = 10$ ———— 本文结果 $M_\infty = 10$

参 考 文 献

- [1] Cheng, H. K. (郑显基), Hypersonic Flow with Combined Leading-Edge Bluntness and Boundary-Layer Displacement Effect, Cornell Aero. Lab. Report AF-1285-A-4 (1960).
- [2] Yakara, J. K., Theory of Entropy Layers and Nose Bluntness in Hypersonic Flow, Hypersonic Flow Research, 421--470, (1962).
- [3] Guiraud, J. P., Asymptotic Theory in Hypersonic Flow, Fundamental Phenomena in Hypersonic Flow, 70--84, (1965).
- [4] Сычев, В. В., О методе малых возмущений в задачах обтекания тонких затуплённых Гиперзвуковым потоком газа, ПМТФ 6, (1962).

HYPersonic FLOW OVER AFTER-BODY WITH BLUNT-NOSE

Wu Jiang-hang
(Beijing University)