

气体动压轴承频率响应计算方法

周 恒

(天 津 大 学)

提要 设计气体动压轴承时,需知其刚度及频率响应。由于轴上常开有螺旋槽,使计算复杂。对H型轴承(即有止推板和颈轴承同时工作),由于止推板和颈轴承相互影响,更复杂些。本文主要研究H型轴承的计算问题。

一、基本方法概述

陀螺仪中常用带螺旋槽气体动压轴承。设计时需知其刚度及频率响应^[1,2],其算法已有多人研究^[1,3,4]。但文献[1]中需假定槽数无限多,据有些单位认为,算出的止推板刚度偏大;文献[3]仅求了止推板静刚度;文献[4]则研究的是球轴承;本文将文献[4]中方法推广用于H型轴承。

对颈轴承部分(图1),选坐标 θ, y ,再令 $u = y/r_0$,则 θ, u 均无量纲。在 θ, u 平面,轴承表面如图1(b)所示。

对止推板部分(图2),选坐标 θ, r 。令 $R = r/r_0$,则 θ, R 也无量纲。再令 $u = \ln R$,则在 θ, u 平面,轴承表面也将如图1(b)所示。只是 θ 轴应位于槽上边,即 ac 线上。

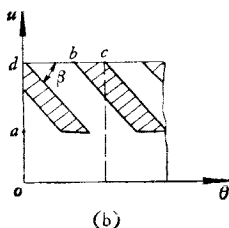
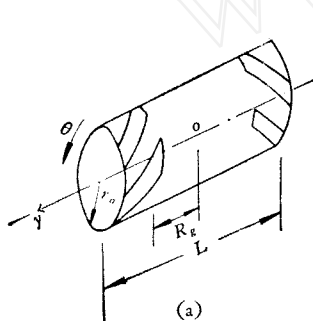


图 1

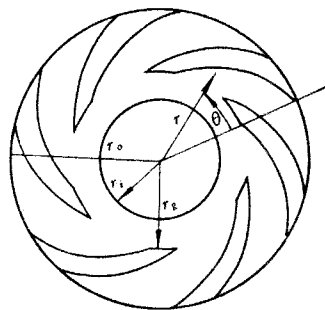


图 2

设槽数为 N 。取轴承的 N 分之一研究,如图3(a)所示。在 θ 向将其等分为 N_1 份,并设一个台与一个槽正好分别分为 N_2 及 $N_1 - N_2$ 份。每份对应的 $\Delta\theta = 2\pi/N \times N_1$ 。

令 $\Delta u = \Delta\theta \tan \beta$,用其等分 u 方向,设有槽区正好分为 N_3 段,全长则分为 N_4 段。等分点分别用 i, j 计数。以点 i, j 为中心, $\Delta\theta, \Delta u$ 为边长作矩形,则其中槽台分布线有7种类型如图3(b)所示。在此线上,气膜厚度有间断。

先求转子位于中性位置(颈轴承与转子同心,两端止推板间隙相等)时的解。

本文于1979年2月12日收到。

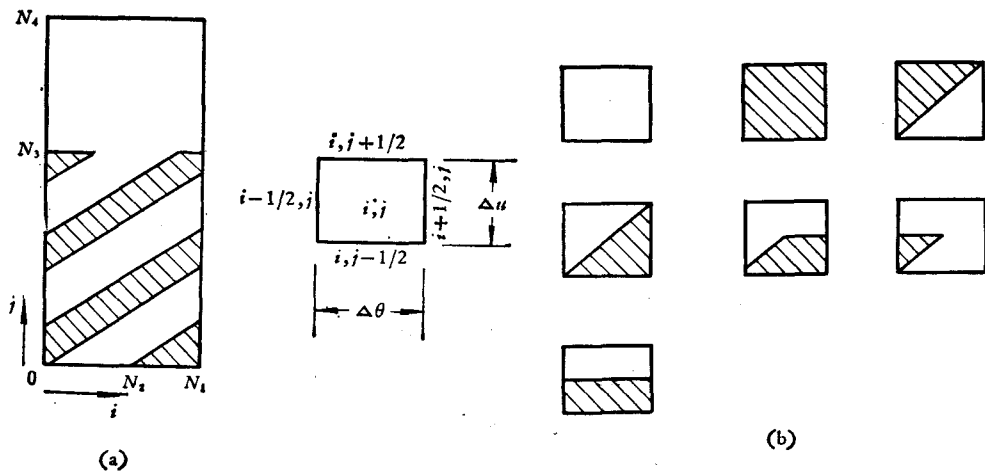


图 3

设 H 、 P 分别为无量纲气膜厚度及压力, $Q = P^2$, 则可导出 Q 所满足的方程^[4].

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j}(Q) = & Q_{i,j}(a + bQ_{i,j}^{-1/2}) + Q_{i+1,j}(c + dQ_{i,j}^{-1/2}) \\ & + Q_{i-1,j}(e + fQ_{i,j}^{-1/2}) - Q_{i,j+1} + gQ_{i,j-1} = 0 \\ & i = 1, 2, \dots, N_2; \quad j = 1, 2, \dots, N_4 \end{aligned} \quad (1)$$

对这一非线性方程组, 可用 Newton-Raphson 法求解. 即设一组 $Q_{i,j}$ 值, 然后求其修正值 $\Delta_{i,j}$, 则 $\Delta_{i,j}$ 满足线性方程组^[4]

$$\Delta_{i,j+1} = A_{i-1,j}\Delta_{i-1,j} + A_{i,j}\Delta_{i,j} + A_{i+1,j}\Delta_{i+1,j} + B_{i,j}\Delta_{i,j-1} + \gamma_{i,j} \quad (2)$$

无论是 Q 还是 Δ , 在 θ 向均以 $2\pi/N$ 为周期, 而在 $j = 0, N_4$ 处则应满足边界条件.

由式 (2), 考虑到在 $i = 0$ 处 Q 已知, 因此 $\Delta_{i,0} = 0$, 可得递推公式

$$\{\Delta\}_j = \{K\}_j\{\Delta\}_1 + \{G\}_j \quad (3)$$

其中 $\{\Delta\}_j = \{\Delta_{1,j}, \Delta_{2,j}, \dots, \Delta_{N_1,j}\}^T$. $\{K\}_j$ 是 $N_1 \times N_1$ 系数矩阵, $\{G\}_j$ 是 N_1 列矩阵.

递推至 $j = N_4$ 处, 利用边界条件求出 $\{\Delta\}_1$, 则由式 (3) 即得各 $\{\Delta\}_j$. 若精度还不够, 则可重复此过程, 一般三至四次即可满足要求.

已知中性位置解后, 即可求小扰动时频率响应.

设 h' 、 p' 为无量纲气膜厚度及压力的扰动值. P_0 为转子位于中性位置时无量纲压力. $q = P_0 p'$, 则 q 所满足的方程如下^[4]:

$$\begin{aligned} q_{i,j+1} = & \alpha_1 q_{i,j} + \alpha_2 q_{i+1,j} + \alpha_3 q_{i-1,j} + \alpha_4 q_{i,j-1} + \alpha_5 \frac{dq_{i,j}}{dT} \\ & - \beta_1 h'_{i+1/2,j} + \beta_2 h'_{i-1/2,j} - \beta_3 h'_{i,j+1/2} + \beta_4 h'_{i,j-1/2} + \beta_5 \frac{dh_{i,j}}{dT} \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $T = \omega t$, 而 ω 为转子角速度, t 为时间.

式 (4) 和 (2) 相似, 因而解法一样. 但由下面可知, 在每一网格点, $q_{i,j}$ 实际有两个分量, 故式 (4) 的方程数比式 (2) 的多一倍.

在小扰动假设下, 由于式 (4) 的系数在 θ 向以 $2\pi/N$ 为周期, 因此 q 在 θ 向也和以上的 Q 一样, 以 $2\pi/N$ 为周期.

二、扰动形式及气膜反力公式

为了求解式(4),需先给定 h' . 而由 [11]、[2] 可知,为了研究稳定性问题,需假定转子作各种形式涡动并求其频率响应. 静态刚度则是涡动频率为零时的特例. 因而 h' 的形式应根据涡动形式而定.

对于陀螺仪的 H 型轴承,需考虑转子作轴向、圆周平行及锥型涡动三种情况(图 4).

用 Ω 表示涡动频率,并令 $\omega^* = \Omega/\omega$.

1. 轴向涡动情况: 转子沿轴向作简谐振动,对止推板应设(图 4(a))

$$\left. \begin{aligned} h' &= \operatorname{Re}(\beta e^{-i\omega^* T}) \\ q &= \operatorname{Re}[(S_1 + iS_2)\beta e^{-i\omega^* T}] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

相应地

其中 β 是小参数. 作用在转子上的轴向力动刚度若写为

$$F = F_1 \cos \omega^* T + F_2 \sin \omega^* T \quad (6)$$

则可得

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= -N \frac{p_a r_0^2}{C} \left\{ \int \int \frac{S_1}{P_0} e^{2u} d\theta du \right\} \\ F_2 &= -N \frac{p_a r_0^2}{C} \left\{ \int \int \frac{S_2}{P_0} e^{2u} d\theta du \right\} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中 p_a 、 C 为无量纲化时压力及气膜厚度的参考值,式(7)的积分区间为图 3(a) 所包区间(下边式(9)、(10)、(11)均同).

2. 圆周平行涡动情况: 转子轴平行于轴承轴且以 Ω 为角速度作圆周运动(图 4(b)). 由图可见对颈轴承可设

$$\left. \begin{aligned} h' &= \operatorname{Re}[\beta e^{i(\theta - \omega^* T)}] \\ q' &= \operatorname{Re}[(S_1 + iS_2)\beta e^{i(\theta - \omega^* T)}] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

相应地

而作用在转子上的径向力动刚度则为

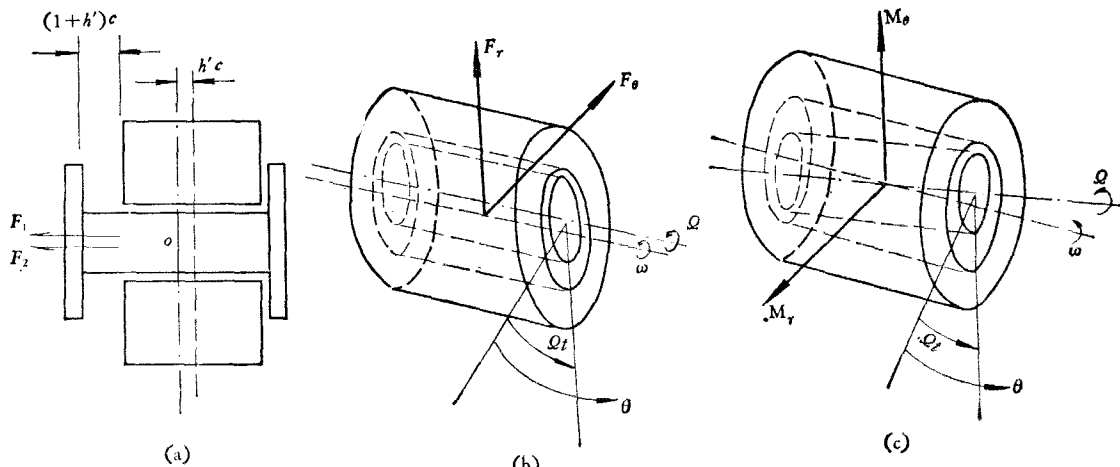


图 4

$$\left. \begin{aligned} F_r &= -\frac{1}{2} N \frac{p_a r_0^2}{C} \iint \frac{S_1}{P_0} d\theta du \\ F_\theta &= -\frac{1}{2} N \frac{p_a r_0^2}{C} \iint \frac{S_2}{P_0} d\theta du \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

圆周平行涡动对止推板无影响。

3. 锥型涡动情况: 转子中心与轴承中心重合, 但二者的轴保持一固定夹角, 转子轴绕轴承轴以角速度 Ω 旋转(图4(c)). 此时对颈轴承应设

$$\left. \begin{aligned} h' &= \operatorname{Re} [\beta u e^{i(\theta - \omega^* T)}] \\ q &= \operatorname{Re} [(S_1 + iS_2) \beta e^{i(\theta - \omega^* T)}] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

由颈轴承作用在转子上的力矩动角刚度为

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -\frac{1}{2} N \frac{p_a r_0^4}{C} \iint \frac{S_1}{P_0} u d\theta du \\ M_\theta &= -\frac{1}{2} N \frac{p_a r_0^4}{C} \iint \frac{S_2}{P_0} u d\theta du \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

对止推板则应设

$$\left. \begin{aligned} h' &= \operatorname{Re} (\beta e^{i(\theta - \omega^* T)}) \\ q &= \operatorname{Re} [(S_1 + S_2) \beta e^{i(\theta - \omega^* T)}] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

由止推板作用于转子上的力矩动角刚度为

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -\frac{1}{2} N \frac{p_a r_0^4}{C} \iint \frac{S_1}{P_0} e^{3i\theta} d\theta du \\ M_\theta &= -\frac{1}{2} N \frac{p_a r_0^4}{C} \iint \frac{S_1}{P_0} e^{3i\theta} d\theta du \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

在实际计算中, 应将各积分公式转换为相应的求和公式。

若槽开在转子上, 则可转换成一槽开于轴承上的等价情况。参看图5, 转子自转角速度为 ω , 其中心 o' 绕轴承中心 o 以角速度 Ω 涡动。由于气体润滑理论中不考虑气体惯性, 故可选用固结于转子上的动坐标而不改变润滑方程。在此坐标系中, 转子不动, 而轴承则有自转及涡动。自转角速度为 $-\omega$, 涡动角速度则仍为 Ω 。这就是槽开于定子(实际是动坐标中的转子)上的等价情况。

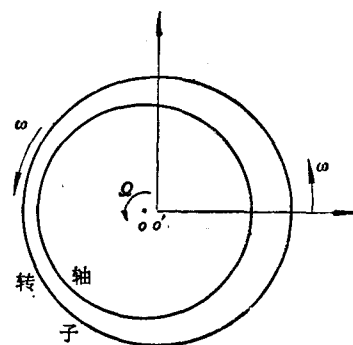


图 5

三、边界条件各种情况

1. 止推板外径处: 一般与环境气体相通。压力已知为 $P = 1$, $Q = 1$ 。所以在该处

$$\Delta_{i,0} = 0, \quad q_{i,0} = 0 \quad i = 1, \dots, N_1$$

2. 止推板内径处开通: 若从工艺上保证该处也与环境气体相通, 则在该处压力也已知, 故

$$\Delta_{i,N_1} = 0, \quad q_{i,N_1} = 0 \quad i = 1, \dots, N_1$$

与此相应, 颈轴承入口处有

$$\Delta_{i,0} = 0, \quad q_{i,0} = 0 \quad i = 1, \dots, N_1$$

3. 颈轴承内端开通(图 6(a)): 即颈轴承内部与环境气体相通, 该处压力已知, 故有

$$\Delta_{i, N_1} = 0, \quad q_{i, N_1} = 0 \quad i = 1, \dots, N_1$$

4. 颈轴承内端不开通(图 6(b)):

1) 转子位于中性位置时, 由于对称性, 在轴承中点应有 $\partial Q / \partial u = 0$, 或近似地

$$Q_{i, N_1} - Q_{i, N_1-1} = 0 \quad i = 1, \dots, N_1$$

2) 转子作圆周平行涡动, 由于仍保持对称, 故仍有 $\partial q / \partial u = 0$, 或近似地

$$q_{i, N_1} - q_{i, N_1-1} = 0 \quad i = 1, \dots, N_1$$

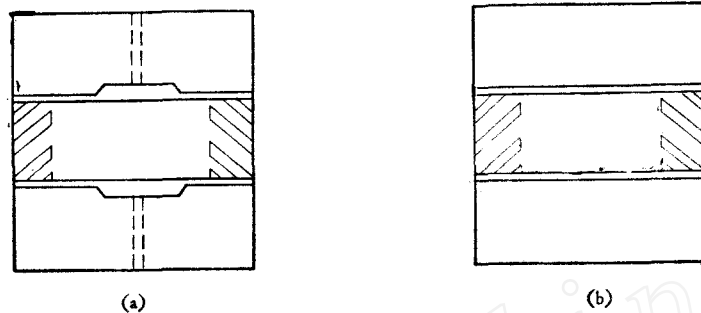


图 6

3) 转子作轴向或锥型涡动, 易见压力分布是反对称的, 因而该处扰动压力应为零, 即

$$q_{i, N_1} = 0 \quad i = 1, \dots, N_1$$

5. 止推板内径与颈轴承通过一倒角相接但不开通: 这是一般采用的形式。此时止推板和颈轴承将相互影响。

1) 转子位于中性位置时: 在倒角空腔内, 压力均匀, 因而在该处有

$$(Q_{i, N_1})_{\text{止推}} = (Q_{i, 0})_{\text{颈轴}} = \text{常值 } P_c^2 \quad i = 1, \dots, N_1$$

P_c 为未知。

在该处还应有流量连续条件, 即

$$\left\{ N \frac{p_a C^3 r_i}{24 \mu \nu T_0} \sum_{i=1}^{N_1} [Q_{i, N_1-1} - Q_{i, N_1}] \frac{\Delta \theta}{\Delta u} \right\}_{\text{止推}} \\ = \left\{ N \frac{p_a C^3 r_0}{24 \mu \nu T_0} \sum_{i=1}^{N_1} [Q_{i, N_1-1} - Q_{i, N_1}] \frac{\Delta \theta}{\Delta u} \right\}_{\text{颈轴承}}$$

其中 μ 为粘性系数, ν 为气体常数, T_0 为温度, C 为轴承间隙, r_i 为止推板内径, r_0 为颈轴承半径。

实际计算时, 由于止推板和颈轴承分别进行, 故上述条件不便直接应用。可设若干 P_c^2 值, 求解止推板及颈轴承问题, 并同时算出二者流量。画流量与 P_c^2 关系曲线, 由两曲线交点即可定出 P_c^2 值。结果表明, 此流量与 P_c^2 关系曲线近似一直线, 故只要设 2—3 个 P_c^2 值就够了。

2) 转子作圆周平行涡动或锥型涡动。这时准确到一阶微量, 倒角空腔体积并无变化, 止推板及颈轴承流量亦无变化, 故倒角内压力仍与转子位于中性位置而无涡动时相

同。从而该处边界条件为

$$(q_{i, N_4})_{\text{止推}} = (q_{i, 0})_{\text{颈轴}} = 0 \quad i = 1, \dots, N_1$$

3) 转子作轴向涡动。此时较为复杂。

由于此时对止推板应设 $h' = \text{Re}(\beta e^{-i\omega^* T})$, 故相应地应设倒角内无量纲压力脉动值为

$$p = \text{Re}[\beta p_0 e^{-i(\omega^* T + \alpha)}] \quad (14)$$

设倒角体积为 V , 则其中气体质量 $M = \rho V$ 。设脉动过程中气体仍为等温过程(实际可能不是等温过程。但小扰动时相当于用切线代替实际压力-密度线, 此误差相当于 1 相差不大的因子)。则

$$dM = V d\rho = V \frac{p_0 d p}{\nu T_0} \quad (15)$$

式中略去 ρdV 项, 因 dV 实际为二阶微量。

令 M_{u1} 、 M_{u2} 分别表示颈轴承及止推板流量, 则

$$dM = (M_{u2} - M_{u1}) dt \quad (16)$$

转子轴向脉动不影响颈轴承气膜厚度, 一般轴承尺寸不大, 扰动自一端传至另一端的时间远小于脉动周期, 故 M_{u1} 与 p 同相而可设

$$M_{u1} = \text{Re}[\beta M_1 e^{-i(\omega^* T + \alpha)}] \quad (17)$$

而

$$M_{u2} = \text{Re}[\beta M_2 e^{-i(\omega^* T + \alpha + \alpha_1)}]$$

将式 (15)、(17) 代入 (16), 令 $\omega^* \omega \frac{V p_0}{\nu T_0} = H$, 可得

$$-iH p_0 = M_2 e^{-i\alpha_1} - M_1$$

由此可解得

$$M_2 \cos \alpha_1 = M_1, \quad M_2 \sin \alpha_1 = H p_0$$

或

$$\left. \begin{aligned} M_2 &= \sqrt{M_1^2 + (H p_0)^2} = C_1 p_0 \\ \alpha_1 &= \text{tg}^{-1} \frac{H p_0}{M_1} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

M_1 和 p_0 的关系可从前述解中性位置时所画颈轴承的流量- P_0^2 关系中求得(事实上, M_1 、 p_0 分别就是自工作点出发沿该曲线的流量及压力的微增量)。代入式 (18), 就可求得 C_1 及 α_1 。

由此可得止推板内径处的边界条件为

$$p_{e, q_{i, N_4}} = \text{Re}[\beta p_0 e^{-i(\omega^* T + \alpha)}] \quad i = 1, \dots, N_1 \quad (19)$$

$$\begin{aligned} N \cdot \frac{p_0^2 C^3 r_i}{12 \mu \nu T_0} \sum_{i=1}^{N_1} \{ (q_{i, N_4-1} - q_{i, N_4}) + 1.5 h'_{i, N_4} [(Q_0)_{i, N_4-1} - (Q_0)_{i, N_4}] \} \frac{\Delta \theta}{\Delta u} \\ = \text{Re}[\beta C_1 p_0 e^{-i(\omega^* T + \alpha + \alpha_1)}] \end{aligned} \quad (20)$$

式 (19) 为压力条件, 式 (20) 为流量条件。从中消去 α , 就得所需条件。

以上处理方法, 同样适用于颈轴承内部不开通(图 6(b)) 情况。但应注意当转子位于中性位置时, 流量等于零。而在有轴向扰动时, 颈轴承中点扰动压力应等于零。

四、几点说明

1. 在按式(4)递推时,如文献[4]中指出,应按文献[5]中方法在适当地方使系数矩阵重新正交归一化。一般可递推5—7次进行一次。否则若 N_1 超过20,就可能得到完全无意义的结果。

2. 文中用了摄动法,要求 $\beta \ll 1$ 。若为配合稳定性研究^[1,2]是够了的。若用以估算极限载荷,则不够准确。但对轴向支承力来说,可以不用摄动法而直接求任意位移下反力。对径向反力或力矩来说,则不难证明和无槽情况^[7]一样,二级近似不影响反力及力矩,故虽是摄动法,但当 $\beta = 0.4$ 时,仍可用以估算。再外推则误差较大,一般认为偏于保守。

3. 本法实质是差分方法,收敛是有保证的。根据实际计算结果,一般 $N \times N_1 \geq 80$ 时,再增加网格点,结果也基本不变了。

4. 把用本法计算结果与其他方法的计算结果相比。对止推板,与文献[3]的结果及我们自己用有限单元法试算结果比,相差均在6%以内。对颈轴承,无槽情况结果与国外常被引用的结果[8]比较,相差也在5%以内。但文献[1]中结果,无论止推板还是颈轴承均较我们的大1倍左右。

5. 文献[2]中例题,就是用本法所算的一种H型轴承,倒角处无量纲压力可达3.05,止推板轴向刚度为5.48。而若为开通式时仅为3.93。这是颈轴承与止推板相互影响的结果。

6. 用本法计算结果推算的极限承载力及力矩与实验结果大体相符。校核的陀螺仪锥型涡动稳定性也基本与实际情况相符。

7. 本文方法优点是节省机时但需较多内存。计算时间约与 $N_1^2 \times N_2$ 成正比。

参 考 文 献

- [1] Vohr, J. H., Pan, C. H. T, MTI-68 TR29 (1968), 6.
- [2] 周 恒, 力学学报, 1(1979), 83.
- [3] 戴 镔, 计算技术通讯, 3(1975), 上海计算技术研究所.
- [4] Le Boulbot, J., Quem, R., Sagot, J., 5th gas bearing symposium, Univ. of Southampton, (1971), 第11篇.
- [5] Conte, S. D., *S. I. A. M Review*, 8, 3(1966), 309.
- [6] Coleman, R., *Tran. ASME, Series F*, 90, 4(1968), 773.
- [7] Gross, W. A., *Gas film lubrication*, Wiley, (1962).
- [8] Raimondi, A. A., *Tran. ASLE*, 4, 1(1961), 131.

A METHOD FOR COMPUTING FREQUENCY CHARACTERISTICS OF HYDRODYNAMIC GAS BEARINGS

Zhou Heng

(Tianjin University)

Abstract

In designing hydrodynamic gas bearings, the stiffness and frequency characteristics of the bearings should be known. In this paper, method for computing the frequency characteristics of spiral-grooved H-type bearings is considered.