Rice 积分的改进

高 玉 臣
(哈尔滨船舶工程学院)

1. H 积分的一般定义 为了将 Rice 积分推广到大变形及塑性情况，我们考虑 H 积分．在三维弹塑性变形场中取直角坐标 x、y、z，通常记为 $x_i(i=1,2,3)$．以 $\mathring{x}_i$ 表示变形前质点的坐标．设 Γ 是一条给定的封闭曲线，F 是以 Γ 为周界的任意一个曲面．我们定义面积分 H_F 为

$$H_F=\int_F(\overset{*}{W}\cdot n_x-T_iV_i)dF \tag{1.1}$$

其中，n_x 是 F 的法向量的 x 分量．其余量由以下诸式给出：

$$V_i=Q_{ij}\partial u_j/\partial x \quad (1.2),\qquad u_i=x_i-\mathring{x}_i \quad (1.3)$$

$$Q_{ij}=\partial x_i/\partial x_j \quad (1.4),\qquad T_i=(\sigma_{ij}-\overset{*}{W}\delta_{ij})n_j \quad (1.5)$$

$$\overset{*}{W}=\rho\cdot\int\frac{1}{\rho}\mathring{\sigma}_{ij}\tilde{d}\mathring{\varepsilon}_{ij} \tag{1.6}$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathring{\varepsilon}_{ij}=\dfrac{1}{2}(Q_{ki}Q_{kj}-\delta_{ij})(1.7),\qquad \rho=\rho_0\det|P_{ij}|(1.8)\\ P_{ij}=\dfrac{\partial\mathring{x}_i}{\partial x_j}\quad(1.9)\end{array}\right\}$$

式中，ρ_0 为变形前介质密度，u_i 为位移分量，$\mathring{\varepsilon}_{ij}$ 及 $\mathring{\sigma}_{ij}$ 分别为 $\mathring{x}_i$ 坐标系中的应变及应力，$\overset{*}{W}$ 暂为形式地引入函数，这里不要求 $\overset{*}{W}$ 是状态函数．在式 1.6 中 $\tilde{d}$ 表示微分．是对空间点沿 $(-V_i)$ 方向取的．

2. 平面问题中的 H 积分 对平面问题，式 (1.1) 简化为

$$H=\int_A^B\overset{*}{W}dy-\int_A^B T_iV_ids \tag{2.1}$$

其中，

$$\left.\begin{array}{l}V_1=\dfrac{1}{\Delta}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x}-\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}+\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\\ V_2=\dfrac{1}{\Delta}\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\end{array}\right\} \tag{2.2}$$

$$\Delta=1-\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \tag{2.3}$$

此外

$$\rho=\rho_0\Delta \tag{2.4}$$

本文于 1978 年 4 月 8 日收到．

若忽略体应变(如塑性变形很大时)则可取 $\rho=\rho_0$.

3. 与路径无关性 此处将证明,式(1.1)仅依赖于边界线 Γ 而不依赖于 F,为此仅需证明对任何封闭曲面 $\overset{*}{F}$,面积分 $H_{\overset{*}{F}}=0$ 即可. 同样可证明(2.1)仅依赖于 A、B 而不依赖于路径.

首先,利用格林公式可将 $H_{\overset{*}{F}}$ 化为体积分

$$H_{\overset{*}{F}}=\int_V h d\tau \tag{3.1}$$

其中

$$h=\frac{\partial \overset{*}{W}}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x_j}[V_i(\sigma_{ij}-\overset{*}{W}\delta_{ij})] \tag{3.2}$$

由于

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}=0$$

及 $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$,式(3.2)可化为:

$$h=\frac{\partial \overset{*}{W}}{\partial x}+V_i\frac{\partial \overset{*}{W}}{\partial x_i}+\overset{*}{W}\frac{\partial V_i}{\partial x_i}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)\sigma_{ij} \tag{3.3}$$

此外,由式(1.6)可得

$$\frac{\partial \overset{*}{W}}{\partial x}+V_i\frac{\partial \overset{*}{W}}{\partial x_i}+\overset{*}{W}\frac{\partial V_i}{\partial x_i}=\frac{\overset{*}{W}}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}+V_i\frac{\partial \rho}{\partial x_i}+\rho\frac{\partial V_i}{\partial x_i}\right)+\mathring{\sigma}_{ij}\mathscr{L}(\mathring{\varepsilon}_{ij}) \tag{3.4}$$

其中

$$\mathscr{L}(\quad)=\frac{\partial(\quad)}{\partial x}+V_i\frac{\partial(\quad)}{\partial x_i} \tag{3.5}$$

而利用大变形关系可证明

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}+V_i\frac{\partial \rho}{\partial x_i}+\rho\frac{\partial V_i}{\partial x_i}=0 \tag{3.6}$$

$$\mathring{\sigma}_{ij}\mathscr{L}(\mathring{\varepsilon}_{ij})=\sigma_{ij}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.7}$$

由式(3.6),(3.7),(3.4),(3.3)可知,$h=0$,即 $H_{\overset{*}{F}}=0$.

4. 物理解释 首先定义内能(或形变功)为

$$W=\rho\int\frac{1}{\rho}\mathring{\sigma}_{ij}\mathring{d}\mathring{\varepsilon}_{ij} \tag{4.1}$$

此式与(1.6)的 $\overset{*}{W}$ 一般是不同的. (4.1)中的 $\mathring{d}$ 表示随质点本身的历史进行积分.

在三维弹塑性流场内考虑运动着的封闭曲面 $\overset{*}{F}$,包含在 $\overset{*}{F}$ 中的总内能为体积分:

$$U=\int_V W d\tau \tag{4.2}$$

设 $\overset{*}{F}$ 的运动速度的法向分量为 V_n,而质点的速度为 du_i/dt,t 表示时间参数,于是由定义可知:

$$\frac{dU}{dt}=\int_V\frac{\partial W}{\partial t}d\tau+\int_{\overset{*}{F}}V_n\cdot W dF \tag{4.3}$$

下面讨论一个具体情况. 如果 $\overset{*}{F}$ 形状不变仅沿 x 轴方向平移,我们取 $\overset{*}{F}$ 前进的距离

l 为时间参数，于是有

$$V_n = n_x \tag{4.4}$$

此外，我们假定在与 $\overset{*}{F}$ 固结的动坐标系 x'、y'、z' 中观察，流场是定常的，于是

$$\frac{dU}{dl} = 0,$$

此式可化为

$$0 = \int_{\overset{*}{F}} [W \cdot n_x - (\sigma_{ij} - W\delta_{ij})V_i n_j] dF \tag{4.5}$$

式(4.5)表明，定常弹塑性流场中穿过固定非封闭曲面 F 的总能流只与曲面周界有关，而与曲面 F 无关．即

$$H_F = \int_F [W \cdot n_x - (\sigma_{ij} - W\delta_{ij})V_i n_j] dF \tag{4.6}$$

然而，对定常流场，式(4.1)的 W 与式(1.6)中的 $\overset{*}{W}$ 是相等的．所以式(4.6)与(1.1)是一回事．因而式(1.1)也代表其对应的定常流场的能流．

5. 举例　图 1 表示位于两平行平面 $y = \pm\frac{a}{2}$ 之间的弹性体．初始状态是 $\sigma_y = \sigma$，其他应力分量为零．在 $y = \pm\frac{a}{2}$ 的约束条件为：

$$(u_1, u_2, u_3)_{y=\pm\frac{a}{2}} = 0 \tag{5.1}$$

此外，假定所有量与 z 无关，即问题属于二维的．因而只在 $z = 0$ 平面内考察即可．设想位于 $y = 0$ 平面内的裂纹沿 x 轴方向定常扩展，现在我们分别沿大回路 C_1 及小回路 C 计算 H 积分与 J 积分．

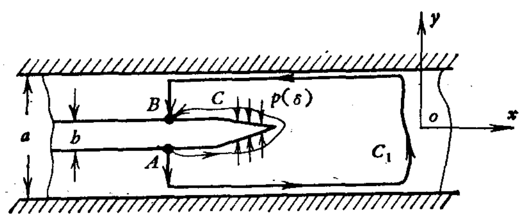

图 1

1) 对 C_1 的 H 与 J

由于 C_1 上 $V_i = 0$，在前方远处

$$\sigma_y = \sigma, \quad \sigma_x = \sigma_z = 0.$$

所以，$W = \sigma^2/2E$．在后方远处

$$\sigma_y = 0, \quad \sigma_x = \sigma_z = -\frac{\nu}{1-\nu}\sigma.$$

所以，$W = \frac{\sigma^2}{E} \cdot \frac{\nu^2}{1-\nu}$，最后有

$$H = \frac{\sigma^2}{2E}\left[a - \frac{2\nu^2}{1-\nu}(a-b)\right] \tag{5.2}$$

当 $\sigma/E \ll 1$ 时，$b/a \ll 1$，于是

$$H = \frac{a\sigma^2}{2E}\left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu}\right) \tag{5.3}$$

此外，由 J 积分定义可得

$$J = \frac{a\sigma^2}{2E}\left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu}\right) \tag{5.4}$$

就是说，对于小变形情况，在大回路上 J 与 H 相等．

2）对 C 的 H 与 J

设裂口张开的轮廓线为 C. 由裂纹定常扩展的条件知，c 仅向前平移. 如果质点不穿行 c，则有

$$n_i \frac{du_i}{dl} = n_x, \text{ 即 } n_i V_i = n_x \tag{5.5}$$

其中 n_x 为 C 的法向量的 x 分量.

由式(5.5)可将式(2.1)化为:

$$H = -\int_c \sigma_{ij} n_i V_j ds \tag{5.6}$$

采用 Barenblatt 模型，$V < \delta$ 表示裂口张开距离. 设裂纹尖端两侧单位长度(指变形前为单位长度)上相互吸引力为 $p(\delta)$. 且当 $\delta > \delta_c$ 时 $p = 0$，于是有

$$\sigma_{1i} \cdot n_i = 0, \quad \sigma_{2i} \cdot n_i = -p(\delta) \frac{d\mathring{s}}{ds} \tag{5.7}$$

其中 $d\mathring{s}$ 表示弧微元 ds 在变形前的长度. 对于 C 上点，$u_2 = \delta/2$，而且可以证明 $ds_0/dl = 1$，所以

$$V_2 = \frac{du_2}{ds_0} \frac{ds_0}{dl} = \frac{du_2}{ds_0} = \frac{1}{2} \frac{d\delta}{ds_0} \tag{5.8}$$

由式(5.6)—(5.8)可得:

$$H = P(\delta_c) \tag{5.9}$$

其中,

$$P(\delta) = \int_0^\delta p(\delta) d\delta$$

恰是能量释放率.

利用 J 积分的定义可得

$$J = P(\delta_c) + \int_c W dy \tag{5.10}$$

当 $b/a \to 0$ 时，式(5.10)后项并不趋于零. 所以 $J \neq H$. 这样，J 在小回路 C 上不能代表能量释放率，而 H 仍代表能量释放率.

参 考 文 献

[1] Rice, J. R., A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, *J. Appl. Mech*, **35**, 2 (1968).

AN IMPROVEMENT ON RICE'S INTEGRAL

Gao Yu-chen
(Harbin Ship Building Engineering Institute)