

理想塑性介质中裂纹定常扩展的弹塑性场

高玉臣

(哈尔滨船舶工程学院)

摘要 本文从理想弹塑性介质的基本方程出发,对平面应变问题导出了依赖于应力应变历史的屈服条件和应力应变关系.文中引入了应变间断量的概念,并导出了在区域交界所应满足的四个连接条件.把这些结果用于I型定常扩展裂纹的尖端,对 $\nu = \frac{1}{2}$ 的情况求出了应力应变分布的渐近解,此解表明,在初始塑性区后面存在着第二塑性区.

断裂力学的根本课题就是研究各种不同情况下裂纹扩展的条件及规律.为此就要研究各种情况下的断裂机理即断裂模型.不管采用何种微观模型,最后总要考虑它与宏观应力应变分布的制约关系.然而,裂纹尖端的弹塑性应力应变分布问题一直被认为数学障碍难以解决.对线性硬化材料中裂纹定常扩展问题,[1]中得到了数值解.但对理想塑性介质中裂纹定常扩展问题,却只解决了较简单的反平面剪切问题^[2].况且III型裂纹与I型裂纹是否有类似之处,仍是无法回答的问题.因为,III型裂纹的应力函数 φ 满足的是二阶方程,而I型的应力函数则满足更复杂的四阶方程,边界连接条件的数目也不是二个而是四个.本文由于认真处理了弹塑性基本方程和四个连接条件,并且引入了应变间断量的概念,因而使I型问题得到了解决.

此外,[2]中存在着错误的推导和结论,这将在本文中进行适当讨论.

一、基本方程

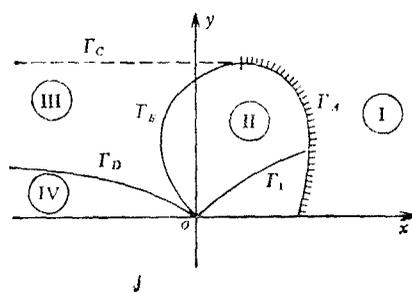


图1

1. 应力函数及应力

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

2. 应变

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^{*e} + \varepsilon_x^{*p}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y^{*e} + \varepsilon_y^{*p} \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xy}^{*e} + \varepsilon_{xy}^{*p}, \quad \varepsilon_z = \varepsilon_z^{*e} + \varepsilon_z^{*p} \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^{*e} &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z), \quad \varepsilon_y^{*e} = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) \\ \varepsilon_{xy}^{*e} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}, \quad \varepsilon_z^{*e} = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

本文于1977年10月收到.

对塑性应变采用 Reuss 关系则有:

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_x^{*P} &= \frac{\lambda}{3} (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) da, & d\varepsilon_y^{*P} &= \frac{\lambda}{3} (2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z) da \\ d\varepsilon_{xy}^{*P} &= \lambda \tau_{xy} da, & d\varepsilon_z^{*P} &= \frac{\lambda}{3} (2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) da \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

这里 $2a$ 表示裂纹长度. 为了简便, 以下推导均只对重要而又困难的平面应变问题进行. 显然, σ_z 应由以下约束条件定出:

$$d\varepsilon_z = d\varepsilon_z^{*e} + d\varepsilon_z^{*P} = 0 \quad (1.5)$$

假定在我们所研究的范围内裂纹可看成是定常扩展的, 于是对直角坐标内的物理量便有:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial a} = -\frac{\partial}{\partial z} \quad (1.6)$$

由 (1.5) 及 (1.3)、(1.4) 可得:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) + \left(\frac{1}{2} - \nu\right)\sigma_p \quad (1.7)$$

其中,

$$\sigma_p = \frac{2E}{3} e^{-\frac{2\lambda a}{3}} \int_x^{x_A} \lambda(\sigma_x + \sigma_y) e^{\frac{2\lambda x}{3}} dx \quad (1.8)$$

$$\Lambda = \int_x^{x_A} \lambda dx \quad (1.9)$$

式中的 x_A 表示在塑性前缘 Γ_A 上的 x 值.

将 (1.7) 代入 (1.3)、(1.4) 再利用 (1.8), 则 (1.2) 式可改写为:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^e + \varepsilon_x^P, & \varepsilon_y &= \varepsilon_y^e + \varepsilon_y^P \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xy}^e + \varepsilon_{xy}^P \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^e &= \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_x - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_y, & \varepsilon_y^e &= \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_y - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_x \\ \varepsilon_{xy}^e &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^P &= \frac{1}{2} \int_x^{x_A} \lambda(\sigma_x - \sigma_y) dx + \left(\frac{1}{2} - \nu\right) \frac{\sigma_p}{E}, & \varepsilon_{xy}^P &= \int_x^{x_A} \lambda \tau_{xy} dx \\ \varepsilon_y^P &= \frac{1}{2} \int_x^{x_A} \lambda(\sigma_y - \sigma_x) dx + \left(\frac{1}{2} - \nu\right) \frac{\sigma_p}{E} \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

3. 屈服条件 对于理想塑性, 采用 Mises 屈服条件, 并利用 (1.7) 则有:

$$\frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \nu\right)^2 \cdot (\sigma_x + \sigma_y - \sigma_p)^2 = k^2 \quad (1.13)$$

式中 k 为剪切屈服极限.

4. 协调方程

$$\frac{1-\nu^2}{E} \Delta \Delta \varphi + \frac{\partial^2 \varepsilon_x^P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^P}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}^P}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.14)$$

在初始弹性区 (I 区), $\varepsilon_x^P = \varepsilon_y^P = \varepsilon_{xy}^P = 0$. 在卸载后弹性区 (III 区), ε_x^P 、 ε_y^P 、 ε_{xy}^P 只是 y

的函数。

二、区域连接条件

1. 一般关系 设 Γ 为任意曲线, 取 Γ 的平行线族及其法线为坐标线, 以 $[m]_r$ 表示 m 通过 Γ 的间断量, 即 $[m]_r = m|_{n=+0} - m|_{n=-0}$, 显然, 由平衡条件可得: $[\sigma_n]_r = [\tau_{ns}]_r = 0$, 所以,

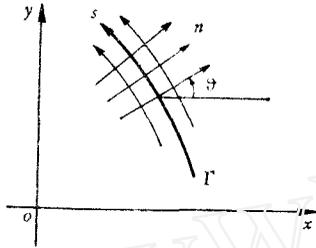


图 2

$$\left. \begin{aligned} [\varphi]_r &= 0 \\ \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

由 Γ 两侧的位移连接条件, 经过初等的推导, 可得:

$$\left. \begin{aligned} [\varepsilon_s]_r &= 0 \\ \left[\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial n} \right]_r - 2 \frac{d}{ds} [\varepsilon_{ns}]_r - \frac{d\vartheta}{ds} [\varepsilon_n]_r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

其中 ϑ 为由 x 轴到 Γ 的法线的有向角。

(2.1) 及 (2.2) 便是区域交界处应满足的四个连接条件。

如果应力或应变本身发生间断, 我们称之为强间断。如果应力或应变本身是连续的, 仅它们沿法线方向的微商发生间断, 我们称之为弱间断。

2. 强间断 这里暂不讨论各种间断发生的条件。假定强间断线 Γ 两侧的应力均满足屈服条件 (1.13), 这样便可将 $[\sigma_s]_r$ 通过 $[\sigma_p]_r$ 表示出来:

$$[\sigma_s]_r = \phi([\sigma_p]_r) \quad (2.3)$$

于是再利用 (1.10)–(1.12) 及 (2.2) 前一式, 便得:

$$[\varepsilon_n]_r = \frac{2}{E} \left(\frac{1}{2} - \nu \right) [\sigma_p]_r + \frac{2}{E} (1 + \nu) \left(\frac{1}{2} - \nu \right) \phi([\sigma_p]_r) \quad (2.4)$$

将式 (2.4) 代入 (2.2) 后则有:

$$\left[\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial n} \right]_r - 2 \frac{d}{ds} [\varepsilon_{ns}]_r - \frac{d\vartheta}{ds} \left\{ \frac{2}{E} \left(\frac{1}{2} - \nu \right) [\sigma_p]_r + \frac{2}{E} (1 + \nu) \left(\frac{1}{2} - \nu \right) \phi([\sigma_p]_r) \right\} = 0 \quad (2.5)$$

3. 应力全连续的强间断 若 $\nu = \frac{1}{2}$, 则由 (1.13) 及 (2.4) 可知,

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_s]_r &= 0 \\ [\varepsilon_n]_r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

于是 (2.5) 化为:

$$2 \frac{d}{ds} [\varepsilon_{ns}]_r - \left[\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial n} \right]_r = 0 \quad (2.7)$$

利用 (1.10)–(1.12) 及 (2.2) 前式, 则 (2.7) 化为:

$$\frac{1 - \nu^2}{E} \left[\frac{\partial^3 \varphi}{\partial n^3} \right]_r = \frac{[\lambda]_r}{\cos \vartheta} \cdot \left(\frac{\sigma_s - \sigma_n}{2} \right) - 2 \frac{d\vartheta}{ds} \operatorname{tg} \vartheta [\varepsilon_{ns}^p]_r + 2 \frac{d}{ds} [\varepsilon_{ns}^p]_r \quad (2.8)$$

此外,(2.6) 前式可写为:

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} \right]_{\Gamma} = 0 \quad (2.9)$$

这样,通过 Γ 发生间断的只有 ε_{ns}^p 和 $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial n^3}$, 而且二者满足 (2.8) 式. 由 ε_{ns}^p 及 $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial n^3}$ 发生间断可知 Γ 是滑移线,即在 Γ 上满足:

$$\sigma_s - \sigma_n = 0 \quad (2.10)$$

最后,利用 (2.10) 可将 (2.8) 化为:

$$\frac{1-\nu^2}{E} \left[\frac{\partial^3 \varphi}{\partial n^3} \right]_{\Gamma} = 2 \frac{d}{ds} [\varepsilon_{ns}^p]_{\Gamma} - 2 \frac{d\vartheta}{ds} \operatorname{tg} \vartheta [\varepsilon_{ns}^p]_{\Gamma} \quad (2.11)$$

4. 弱间断 假定 Γ 是弱间断线(通常是弹塑性区交界), 于是 (2.2) 后式化为:

$$\frac{1-\nu^2}{E} \left[\frac{\partial^3 \varphi}{\partial n^3} \right]_{\Gamma} = \frac{1}{2} \frac{[\lambda]_{\Gamma}}{\cos \vartheta} (\sigma_s - \sigma_n) \quad (2.12)$$

强间断的 (2.11) 式或弱间断的 (2.12) 式便是区域交界上应满足的第四连接条件,其余三个连接条件为 (2.1) 及 (2.9).

三、边界条件及无穷远条件

对于小范围屈服情况,设塑性区尺度为 ρ , 当 $r \gg \rho$ 且 $r \ll a$ 时,对初始弹性区,要求 φ 趋向于弹性解:

$$\varphi = \frac{K_I}{3\sqrt{2\pi}} r^{\frac{3}{2}} \left(\cos \frac{3\theta}{2} + 3 \cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (3.1)$$

式中 K_I 为应力强度系数:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (3.2)$$

当 $r \gg a$ 时, $\sigma_x = \sigma$. 这里, r, θ 为极坐标.

在裂纹线上要求:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= 0 \\ \sigma_{\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \theta = \pm \pi \quad (3.3)$$

四、 $\nu = \frac{1}{2}$ 情形的应力渐近解

1. 幂级数展开 为了讨论在尖端附近解的渐近性质,我们令:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+2} f_n(\theta) \quad (4.1)$$

对于 $\nu = \frac{1}{2}$ 的情况, (1.13) 化为:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)^2 = k^2 \quad (4.2)$$

将 (4.1) 代入 (4.2) 并比较 r 的各次幂的系数,便得到 $f_n(\theta)$ 的方程.

对于 $f_0(\theta)$ 有:

$$\frac{1}{4} [f_0''(\theta)]^2 + [f_0'(\theta)]^2 = k^2 \quad (4.3)$$

对于 $f_m(\theta)$, ($m \geq 1$), 则有:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \sum_{i=0}^m [i(i+2)f_i(\theta) - f''(\theta)][(m-i)(m+2-i)f_{m-i}(\theta) \\ & - f_{m-i}''(\theta)] + \sum_{i=0}^m (i+1)(m-i+1)f_i(\theta)f_{m-i}'(\theta) = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

(4.3) 及 (4.4) 就是塑性区应力函数的逐次近似求解方程.

对于卸载后的弹性区的应力函数则应满足以下协调方程:

$$\frac{1-\nu^2}{E} \Delta \Delta \varphi + \frac{d^2}{dy^2} \varepsilon_x^p(y) = 0 \quad (4.5)$$

设,

$$\frac{d^2}{dy^2} \varepsilon_x^p(y) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n y^{n-2} \quad (4.6)$$

并将 (4.6)、(4.1) 代入 (4.5) 则有:

$$\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + n^2 \right) \left[\frac{d^2}{d\theta^2} + (n+2)^2 \right] f_n(\theta) + \frac{ED_n}{1-\nu^2} \sin^{n-2}\theta = 0 \quad (4.7)$$

(4.7) 就是卸载后弹性区应力函数的逐次近似求解方程.

2. 第一次近似 对于塑性区, (4.3) 式的解为:

$$f_0(\theta) = \frac{k}{2} [b_1 \pm \cos 2(\theta - \theta_0)] \quad (4.8)$$

另外有奇解:

$$f_0(\theta) = \frac{k}{2} (b_2 \pm 2\theta) \quad (4.9)$$

对卸载后弹性区, 当 $n=0$ 时, (4.7) 的通解为:

$$f_0^*(\theta) = c_1 + c_2\theta + c_3 \cos 2\theta + c_4 \sin 2\theta + f_0^*(\theta) \quad (4.10)$$

其中,

$$f_0^*(\theta) = \frac{-ED_0}{4(1-\nu^2)} \left[(\cos 2\theta - 1) \ln \sin \theta + \left(\theta + \frac{1}{2} \cot \theta \right) \sin 2\theta \right] \quad (4.11)$$

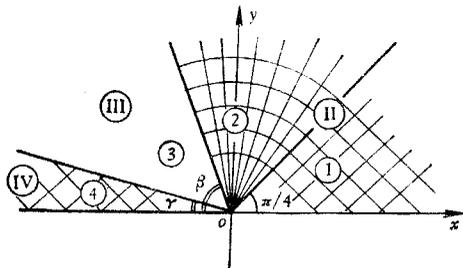


图 3

尖端附近区域是由塑性区和卸载后弹性区拼凑而成的, 在区域交界要求满足连接条件(2.1)及(2.9), 在 $\theta = \pm\pi$ 处要求满足边界条件(3.3). 利用(4.1)式, 对第一次近似, 最后把这些条件化为:

$$\left. \begin{aligned} [f_0(\theta)]_r &= [f_0(\theta)]_r = [f_0'(\theta)]_r = 0 \\ f_0(\pi) &= f_0(\pi) = 0 \end{aligned} \right\} (4.12)$$

利用(4.8)—(4.12)经过分析, 最后得到

图 3 所示的解. 现在仅对上半平面写出各区域的 $f_0(\theta)$ 的表达式:

$$f_0(\theta) = \begin{cases} \frac{k}{2} [b + \cos 2\theta], & -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ \frac{k}{2} \left[b - 2 \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \right], & \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi - \beta \\ f_0^*(\theta) + c_1 + c_2\theta + c_3 \cos 2\theta + c_4 \sin 2\theta, & \pi - \beta \leq \theta \leq \pi - \gamma \\ \frac{k}{2} (1 - \cos 2\theta), & \pi - \gamma \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad (4.13)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= -(\pi - \gamma)c_2 + \frac{k}{2} - \frac{ED_0}{4(1-\nu^2)} \ln \sin \gamma \\ b &= \frac{3\pi}{2} - 2\beta + 1 - \frac{2}{k} \left[c_2(\beta - \gamma) + \frac{ED_0}{4(1-\nu^2)} \ln \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

$$\left. \begin{aligned} c_2 &= -\frac{1}{2} (c_3 \sin 2\gamma + k) + \frac{ED_0}{4(1-\nu^2)} (\cos^2 \gamma + \ln \sin \gamma) \\ c_4 &= -\frac{c_2}{2} \cos 2\gamma + \frac{ED_0}{4(1-\nu^2)} (\pi - \gamma - \sin \gamma \cos \gamma) \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

$$\left. \begin{aligned} c_2 &= k \frac{\sin \beta (1 - \sin 2\beta) + \left(\cos \frac{\pi}{4} + \cos \beta \right) \left(\cos 2\gamma - \cos 2\beta + 2 \ln \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \right)}{\cos \beta - \cos(2\gamma - \beta) - 2 \cos \beta \ln \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}} \\ D_0 &= \frac{-4(1-\nu^2)}{E \sin \beta} \left[k \left(\cos \frac{\pi}{4} + \cos \beta \right) + c_2 \cos \beta \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

(4.16) 中 D_0 的表达式是由下文的应变分析中得到的, 需利用 (5.8) 及 (5.9).

为满足 (4.12) 式, 图 3 的 β 、 γ 还应满足以下方程:

$$\begin{aligned} & \sin(\beta - \gamma) \cdot (\sin \gamma - \cos \gamma) - 2 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin^2(\beta - \gamma) \\ & - \left[\cos \frac{\pi}{4} (\cos 2\gamma - \cos 2\beta) + \cos 2\gamma \cos \beta \right] \ln \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \\ & - \left[\cos \frac{\pi}{4} (\sin 2\beta - \sin 2\gamma) - \sin 2\gamma \cos \beta + \cos \beta \right] (\beta - \gamma) = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

由于要求应变具有衰减性, 所以, γ 值小于 $\frac{\pi}{4}$. 另外为了保证在 Γ_B 处应变间断量是衰减的, 则要求:

$$c_2 + k \left(1 + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \beta \right) \leq 0 \quad (4.18)$$

此外经分析可知, 为保证③区处于弹性状态, 要求:

$$\left. \begin{aligned} c_2 \cos(\beta - \gamma) + k \cos \gamma \left(\cos \frac{\pi}{4} + \cos \beta \right) &\geq 0 \\ c_2 + k \left(1 + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \beta \right) &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

由 (4.18) 及 (4.19) 后式可知:

$$c_2 + k \left(1 + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \beta \right) = 0 \quad (4.20)$$

由(4.17)及(4.20)经计算得到, $\beta = 68.5^\circ$, $\gamma = 18^\circ$, 而且经逐点验证, ③区确实处于弹性状态.

五、 $\nu = \frac{1}{2}$ 情况变形的渐近解

对于 $\nu = \frac{1}{2}$ 的情况, (1.12) 式变为:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^f &= -\varepsilon_y^f = \frac{1}{2} \int_x^{x_A} \lambda(\sigma_r - \sigma_\vartheta) dx \\ \varepsilon_{xy}^f &= \int_x^{x_A} \lambda'_{xy} dx \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

在图3所示各区内, 要求满足协调条件(1.14), 而在区域交界要求满足连接条件(2.11)或(2.12). 对第一次近似得到:

$$[\varepsilon_{r\theta}^p]_r = \frac{1-\nu^2}{2E} \cdot \frac{1}{\cos \vartheta} \int_{r_0}^r \frac{\cos \vartheta}{r} [f_0'''(\theta)]_r dr \quad (\text{强间断}) \quad (5.2)$$

或,

$$[\lambda]_r = \frac{-(1-\nu^2)}{E} \cdot \frac{2 \cos \vartheta}{r} \cdot \frac{1}{f_0''(\vartheta)} [f_0'''(\theta)]_r \quad (\text{弱间断}) \quad (5.3)$$

此外, 要求各应变分量及其间断量随 r 增加具有衰减性质. 考虑以上各条件, 最后便得到各区的应变分布.

1. 在①区

$$\lambda = \lambda_1(x+y) + \lambda_2(x-y) \quad (5.4)$$

其中 λ_1 、 λ_2 分别为括号中变量的任意函数, 它们最后应由 Γ_A 处的连接条件以及在①区内的协调条件定出. 我们可以预料, 在①区内应变无奇异性:

$$\varepsilon_r \sim \varepsilon_\theta \sim \varepsilon_{r\theta} \sim O(1) \quad (5.5)$$

2. 通过 Γ_1 时的塑性应变增量

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varepsilon_y^p &= -\Delta \varepsilon_x^p = \frac{2k(1-\nu^2)}{E} \ln \frac{A}{r} \\ \Delta \varepsilon_{xy}^p &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

其中 A 是积分常数, 它与间断线长度有关, A 可以取作塑性区的名义尺度.

3. 在②区:

利用②区协调方程, 最后得到:

$$\lambda = \frac{g(\theta)}{r} - \frac{1-\nu^2}{E} \cdot 2 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\ln r}{r} \quad (5.7)$$

式中 $g(\theta)$ 为任意函数, 由边界条件定.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^p &= -\varepsilon_y^p = -\frac{4k}{E}(1-\nu^2)\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\theta\ln\frac{A}{r} + O(1) \\ \varepsilon_{xy}^p &= \frac{2k(1-\nu^2)}{E}\left[\cos\frac{\pi}{4}\left(\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}} + 2\cos\theta\right) - 1\right]\ln\frac{A}{r} + O(1) \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

4. 通过 Γ_B 时应变获得增量如下:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\Gamma_B} \varepsilon_y^p &= -\Delta_{\Gamma_B} \varepsilon_x^p = \frac{4(1-\nu^2)}{E}\cot\beta\left[c_2 + k\left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\beta\right)\right]\ln\frac{A}{r} \\ \Delta_{\Gamma_B} \varepsilon_{xy}^p &= -\frac{2(1-\nu^2)}{E}\cdot\frac{\cos 2\beta}{\sin^3\beta}\left[c_2 + k\left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\beta\right)\right]\ln\frac{A}{r} \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

5. 在③区 $\lambda = 0$, ε_x^p , ε_y^p , ε_{xy}^p 不随 x 而变, 只是 y 的函数.

6. 在④区

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^p &= -\varepsilon_y^p = k\Lambda^* + \varepsilon_x^p(y) + O(1) \\ \varepsilon_{xy}^p &= \varepsilon_{xy}^p(y) + O(1) \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

式中 $\varepsilon_x^p(y)$ 及 $\varepsilon_{xy}^p(y)$ 表示塑性应变在 Γ_D 上相应点的值.

$$\Lambda^* = p \ln \frac{(\cot \gamma - 1)y}{-(x+y)} + q \ln \frac{(\cot \gamma + 1)y}{-x+y} \quad (5.11)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{1}{2k}\left[D_0 - \frac{4c_2}{E}(1-\nu^2)\right] \\ q &= \frac{1}{2k}\left[D_0 + \frac{4c_2}{E}(1-\nu^2)\right] \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

六、裂口张开位移

有了应变表达式便可确定各点的位移, 在此不拟将各区域内位移表达式一一写出, 仅给出在 $\theta = \pi - 0$ 处的位移:

$$\left. \begin{aligned} u_x|_{\theta=\pi-0} &= -D_0x \ln(-x) + O(1) \\ u_y|_{\theta=\pi-0} &= -\frac{4(1-\nu^2)}{E}c_2x \ln(-x) + O(1) \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

式中 D_0 及 c_2 见 (4.16). 当然, (6.1) 式只在 $|x|$ 较小时可用.

七、关于 III 型裂纹

在 [2] 中论证了在卸载塑性边界 Γ_p 上 $\Delta\phi$ 的连续性. 但是, 细心的读者会发现其论据是不充分的. 利用流动规律不难推得, 若在 Γ_p 上 $\lambda \neq 0$, 则只有当 $\tau_x|_{\Gamma_p} = 0$ 成立时 $\Delta\phi$ 才连续. 此外, 对协调方程的进一步分析可得到第三连接条件:

$$[\Delta\phi]_r = \left[\frac{\partial^2\phi}{\partial n^2} \right]_r = \frac{E}{1+\nu} \cdot \frac{1}{\cos\vartheta} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial n} \cdot [\lambda]_r \quad (7.1)$$

(7.1) 式也同样表明,一般说来在弹塑性交界上 $\Delta\phi$ 不连续.

关于 I 型裂纹,[2]中认为 $\Delta\Delta\varphi$ 通过卸载边界是连续的,但实际不然. 即使是 $\frac{\partial^3\varphi}{\partial n^3}$ 通过弹塑性交界一般说来也是间断的,详见本文 (2.11) 或 (2.12).

应该指出,尽管[2]的论据不充分,但 $\Delta\phi$ 在卸载边界 Γ_p 上连续的结论是正确的,这是由于,为了保证卸载区真正处于弹性状态,必须要求在卸载边界上 $\lambda = 0$. 至于 I 型问题,这一条件变为: $\left[\frac{\partial^3\varphi}{\partial n^3} \right]_{\Gamma_p} = 0$, 但 $\Delta\Delta\varphi$ 却不连续.

黄克智教授对本文曾提出十分宝贵的意见;作者对此深表谢意.

参 考 文 献

- [1] Amazigo, J. C., Hutchinson, J. W., Crack-tip fields in steady crack growth with linear strain-hardening, *J. Mech. Phys. Solids*, 25, 2(1977).
 [2] Chitaley, A. D., McClintock, F. A., Elastic-plastic mechanics of steady crack growth under anti-plane shear, *J. Mech. Phys. Solids*, 19, 3(1971).

ELASTIC-PLASTIC FIELD AT THE TIP OF A CRACK GROWING STEADILY IN PERFECTLY PLASTIC MEDIUM

Gao Yu-chen

Abstract

The history-dependent yield condition and constitutive relation for the case of plane strain are derived, based on the fundamental equations of elastic-plastic theory. The concept of strain-jump is introduced and the four conjunctive conditions for boundaries of neighbouring regions are set up and given in very simple form. Applying these results to the tip of a crack of Mode I growing steadily for the case of $\nu = 1/2$, the asymptotic solution of the distribution of the stress and strain is obtained. The result shows there are two secondary plastic zone behind the primary plastic zone.