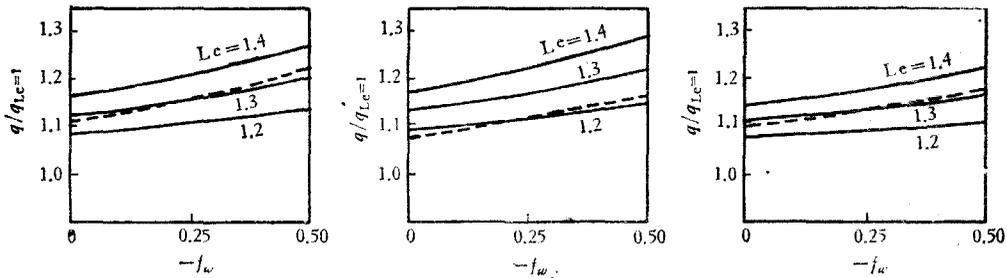


# 有质量引射和化学反应的层流边界层热流

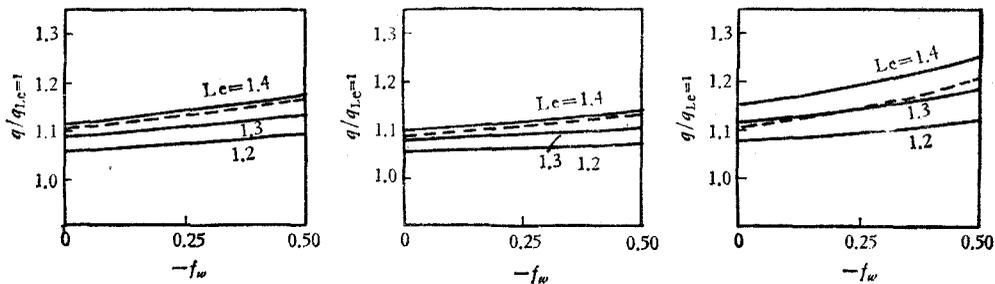
粗铁林<sup>1)</sup>

**提要** 为了简化有质量引射和化学反应的边界层问题,首先求得了一个普通的计量公式,以化学平衡为例做了分析,计算结果和实验<sup>[1]</sup>比较一致,引射量为零时的有关数据与文献<sup>[1]</sup>的结果符合良好,最后指出,随着放热反应能力的增加,Le数对热流的影响减弱。

有质量引射和化学反应的边界层问题,在烧蚀计算中常做 Lewis 数  $Le = 1$  的假设,可以得出比较简便的结果,随着引射量的增加和其他有关条件的改变,这一假设会使热流和有效烧蚀热的结果发生显著误差, Lees<sup>[1]</sup> 曾对  $Le \approx 1$  时常输运特性冻结边界层的



$T_w = 2000K \quad T_e = 7000K \quad P = 1atm$      $T_w = 1500K \quad T_e = 8000K \quad P = 1atm$      $T_w = 1500K \quad T_e = 8000K \quad P = 10atm$



$T_w = 1500K \quad T_e = 6000K \quad P = 1atm$      $T_w = 300K \quad T_e = 6000K \quad P = 1atm$      $T_w = 1500K \quad T_e = 7000K \quad P = 1atm$

图1 按多组元和按二组元计算的热流

---多组元    ——二组元

本文于 1977 年 12 月 9 日收到。

1) 本文是 1964 年作者在中国科学院力学研究所工作期间所作,曾在 1964 年大连燃烧学术会议上宣读,作者目前工作单位:中央气象局气象研究院天气气候研究所。

壁面化学平衡问题, 给出以 Blasius 函数<sup>[2]</sup>表示的分析解. 本文通过讨论  $Le \approx 1$  的化学平衡边界层来研究化学反应对热流的影响. 对有化学反应边界层方程组和壁面条件进行了讨论, 求得了一个普适的广义计量公式. 沿用 Lees 的假设, 对平衡边界层给出了一组算例的数字解. 进一步做线化假设后, 得到了与 Lees 的冻结解类似的平衡近似解.

在常输运特性的假设中, 值得讨论的主要是质量流用 Fick 定律表示视 Le 数为常值的适应性. 本文作者和姚康庄、胡振华 1964 年对此曾有专文论述(未公开发表). 该文对离解空气用多组元和用二组元常 Le 数计算的热流进行了比较. 结论是选取适当的常 Le 数可以得到与用多组元计算相同的热流(图 1), 对于在离解空气中的燃烧反应, 只要选取合适的常 Le 数, 将收到同样的效果.

### 一、基本方程组和广义计量公式

有化学反应的定常层流边界层的连续、扩散、动量和以冻结焓  $H_T$  表示的能量方程是

$$(\rho ur^\varepsilon)_x + (\rho vr^\varepsilon)_y = 0 \quad (1)$$

$$\rho u K_{ix} + \rho v K_{iy} = -J_{iy} + \omega_i \quad (i = 1, 2, \dots, l) \quad (2)$$

$$\rho u u_x + \rho v u_y = -P_x + (\mu u_y)_y \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \rho u H_{Tx} + \rho v H_{Ty} = & \left[ \frac{k}{\bar{c}_p} H_{Ty} \right]_y + \left[ \mu \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) \left( \frac{u^2}{2} \right)_y \right]_y \\ & - \left[ \sum_{i=1}^l J_i h_i \right]_y - \left[ \frac{k}{\bar{c}_p} \sum_{i=1}^l h_i K_{iy} \right]_y - \sum_{i=1}^l \omega_i h_i^0 \end{aligned} \quad (4)$$

式中  $r$  为迴转体半径, 取  $\varepsilon = 0$  为二维流动, 取  $\varepsilon = 1$  为三维轴对称流动;  $\rho$  为质量密度;  $u, v$  分别为  $x$  及  $y$  向分速度;  $x, y$  分别为沿物体方向和垂直于物体表面方向的坐标; 下标  $i$  表示总组元  $l$  中的任一组元;  $K$  是浓度(质量比数);  $J$  是质量流;  $\omega$  是化学生成率;  $P$

是压力;  $\mu$  是粘性系数; 冻结焓  $H_T = h + \frac{u^2}{2}$ ,  $h = \sum_{i=1}^l K_i h_i$ ,  $h_i = \int_0^T c_{pi} dT$ ;  $c_{pi}$  是  $i$  组元的

定压比热, 混合气体的定压比热  $\bar{c}_p = \sum_{i=1}^l K_i c_{pi}$ ;  $k$  是热传导系数; Prandtl 数  $Pr = \frac{\bar{c}_p \mu}{k}$ ;

$h_i^0$  是单位质量  $i$  组元在  $0^\circ K$  时的生成焓.

假设各组元都是完全气体, 则有

$$P_i M_i = \rho_i R T \quad (5)$$

$$P \bar{M} = \rho R T \quad (6)$$

式中  $\bar{M} = \left( \sum_i K_i \frac{1}{M_i} \right)^{-1}$ ,  $M_i$  是  $i$  组元的分子量;  $R$  是通用气体常数. 设质量流可用

Fick 定律表示, 亦即把各二组元扩散系数  $D_{ij}$  看成全同, 皆为  $D$ , 且只考虑浓度扩散, 则

$$J_i = -\rho D K_{iy} \quad (7)$$

$\omega_i$  在冻结时为零, 有化学反应时则是当地的  $\rho, T$ , 和  $K_i$  的函数, 其函数关系由化学动力条件给出. 设在所考虑的问题中共有  $s$  个独立的化学反应:

$$\sum_{i=1}^l n_i^p X_i = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, s) \quad (8)$$

式中  $n_i^p$  是  $i$  组元在第  $p$  个反应中的计量系数;  $X_i$  是  $i$  组元的分子式. 式(8)中的每一反应, 只有一个独立的反应速率.  $s$  常小于  $l$ , 为了解  $l$  个组元的质量比数, 需要保留的  $l-s$  个扩散方程通常是用元素守恒法变换为冻结形式. 这种做法, 对于平衡问题是必需的, 对于非平衡问题可以简化其计算过程, 且与质量流是否用式(7)表达无关. 为了克服元素守恒法不便于公式化和不能任意选取参考组元的缺陷, 本文求得了一个“广义计量公式”.

约定  $l$  个组元中  $1-s$  个参考组元在  $1-s$  个反应中的反应速率  $\omega_1^1, \omega_2^1, \dots, \omega_s^1$  为独立的, 则各个组元的生成率都可直接用这  $s$  个独立的生成率线性表出:

$$\omega_i = \sum_{j=1}^s \alpha_j^i \omega_j^1 \quad (i = 1, 2, \dots, l) \quad (9)$$

式中

$$\alpha_j^i = \frac{(n_i^p M_i)}{(n_j^p M_j)} \quad (10)$$

如果把所考虑的问题看成一个线性空间问题, 则这组独立的生成率在数学上可以看做一组独立向量或一个“基”, 系数  $\alpha_j^i$  则为在这一“基”下的坐标. 式(9)中出现的  $\omega_j^1$  不便于应用, 有必要另选一个用总反应速率所表示的新“基” ( $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s$ ), 新“基”以外的反应速率即不独立的反应速率可以用新“基”线性表出:

$$\omega_k = \sum_{j=1}^s \chi_k^j \omega_j \quad (k = s+1, s+2, \dots, l) \quad (11)$$

式中

$$\begin{pmatrix} \chi_k^1 \\ \vdots \\ \chi_k^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \cdots \alpha_s^1 \\ \vdots \\ \alpha_1^s \cdots \alpha_s^s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_k^1 \\ \vdots \\ \alpha_k^s \end{pmatrix} \quad (12)$$

式(11)即广义计量公式. 利用这一公式, 对于化学反应繁多的问题尤为方便. 定义算符

$$\mathcal{L} = \rho u \frac{\partial}{\partial x} + \rho v \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left( D \rho \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (13)$$

则方程(2)可以写成

$$\mathcal{L} K_i = \omega_i \quad (14)$$

把式(14)代入式(11), 可得

$$\mathcal{L} \tilde{K}_k = 0 \quad (15)$$

$$\tilde{K}_k = K_k - \sum_{j=1}^s \chi_k^j K_j \quad (k = s+1, \dots, l) \quad (16)$$

式(15)即保留的  $(l-s)$  个冻结形式的扩散方程, 其余  $s$  个方程由  $s$  个化学反应条件提供. 当化学反应平衡时, 这  $s$  个条件是

$$\prod_{i=1}^l \left( \frac{K_i}{M_i} \right)^{n_i^p} (P\bar{M})^{\sum_{i=1}^l n_i^p} = \mathcal{K}_p \quad (17)$$

式中  $\mathcal{K}_p$  是第  $p$  个反应的平衡常数. 如果把算符  $\mathcal{L}$  稍加改变,  $\omega_i$  代以单位面积上的生成率  $m_i$ , 则式 (15) 可以推广到边界上或任一平面.

## 二、相似解和迭代方程组

视  $Pr, Le (= \rho D \bar{c}_p / k), l (= \rho \mu / \rho_w \mu_w)$  为一参考常值. 为了实用, 限于讨论迴旋体驻点处. 做下述修正形式的 Mangler-Dorodnitsyn 变换:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{r^2 \rho_w \mu_w}{2\sqrt{\xi}} l^{\frac{1}{2}} Pr^{-1} \int_0^{\eta} \frac{\bar{c}_p}{k} dy \\ \xi &= \int_0^z \rho_w \mu_w u_e r^2 dx \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式中下标  $e, w$  分别代表壁面和边界层外缘值. 定义无量纲量

$$f_\eta = 2 \frac{u}{u_e}, \quad g_T = \frac{H_T}{H_{T_e}} = \int_0^T \bar{c}_p dT / \int_0^{T_e} \bar{c}_p dT.$$

对于冷壁, 可以忽略动量方程中的压力梯度项<sup>[3]</sup>. 假设各组元的  $c_{pi}$  全同, 并把式 (11) 应用于能量方程, 则基本方程可以写成

$$f_{\eta\eta\eta} + ff_{\eta\eta} = 0 \quad (19)$$

$$\tilde{K}_{k\eta\eta} + Scf\tilde{K}_{k\eta} = 0 \quad (k = s + 1, s + 2, \dots, l) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \left( g_T + Le \sum_{j=1}^s h_{ch}^j K_j \right)_{\eta\eta} + Prf \left( g_T + Le \sum_{j=1}^s \bar{h}_{ch}^j K_j \right)_\eta \\ &= Prf (Le - 1) \sum_{j=1}^s \bar{h}_{ch}^j K_{j\eta} \end{aligned} \quad (21)$$

式中  $Sc = Pr/Le$ ,  $\bar{h}_{ch}^j = h_{ch}^j/H_{T_e}$ ,  $h_{ch}^j = h_j^0 + \sum_k \chi_k^j h_k^0$ . 这组方程的边界条件是

$$\left. \begin{aligned} f_\eta(0) &= 0, \quad f(0) \equiv f_w = -(\rho v)_w / (r^{-1} \xi^{-\frac{1}{2}} \xi_x l^{\frac{1}{2}}) \\ f_\eta(\infty) &= 2 \\ \tilde{K}_k(0) &= \tilde{K}_{kw}, \quad \tilde{K}_k(\infty) = \tilde{K}_{kc} \\ g_T(0) &= g_{Tw}, \quad g_T(\infty) = 1 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

求解  $K_i$  所不足的  $s$  个方程, 对于平衡问题将由式 (17) 补充.

对式 (20), (21) 进行积分, 并把式 (21) 的积分结果写成迭代形式, 可得

$$\tilde{K}_k - \tilde{K}_{kw} = (\tilde{K}_{kc} - \tilde{K}_{kw}) \beta(\eta; f_w, Sc) \quad (23)$$

$$\tilde{K}_{k\eta w} = (\tilde{K}_{kc} - \tilde{K}_{kw}) \beta_\eta(0; f_w, Sc) \quad (24)$$

$$\begin{aligned} (g_T + Le \bar{h}_{ch})^{(n)} - (g_T + Le \bar{h}_{ch})_w &= \{g_{T_e} - g_{Tw} + [Le - (Le - 1) G^{(n-1)}(\infty)] \\ &\cdot (\bar{h}_{che} - \bar{h}_{chw})\} \beta(\eta; f_w, Pr) + G^{(n-1)}(\eta) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} (g_T + Le \bar{h}_{ch})_{\eta w}^{(n)} &= \{g_{T_e} - g_{Tw} + [Le - (Le - 1) G^{(n-1)}(\infty)] (\bar{h}_{che} - \bar{h}_{chw})\} \\ &\cdot \beta_\eta(0; f_w, Pr) \end{aligned} \quad (26)$$

式中  $\beta$  为 Blasius 函数:

$$\beta(\eta; f_w, z) = \int_0^\eta f_{\eta\eta}^z d\eta / \int_0^\infty f_{\eta\eta}^z d\eta \quad (27)$$

$z = Sc$  或  $Pr$ , 文献 [2] 给出了  $\beta$  和  $\beta_\eta$  的详细数字表;

$$\bar{h}_{ch} = \sum_{j=1}^s \bar{h}_{ch}^j K_j$$

$$G(\eta) = (\bar{h}_{che} - \bar{h}_{chw})^{-1} \sum_{j=1}^s \bar{h}_{ch}^j (K_{je} - K_{jw}) G_j(\eta) \quad (28)$$

$$G_j(\eta) = (K_{je} - K_{jw})^{-1} Pr \int_0^\infty e^{-Pr \int t d\eta} \int_0^\eta f e^{Pr \int t d\eta} K_{j\eta} d\eta \quad (29)$$

在边界条件已知的情况下, 式 (26) 可以给出感兴趣的热流, 式中  $G(\infty)$  一般需要通过求解迭代方程组 (23)–(29) 和式 (17) 得出.  $G(\infty)$  的第一次近似可以用  $Le = 1$  时的  $K_{i\eta}$  计算. 计算表明, 这组方程收敛很快.

当边界层内的温度超过 2000K 时, 由于各组元的振动自由度接近于全部被激发, 可以近似地视  $\bar{c}_p$  为常值, 这时式 (25), (26) 中的  $g_T = \theta = T/T_e$ , 求解过程将更加简单.

### 三、壁面质量比数和热流

对式 (20) 从  $\eta = 0$  积分到  $\eta = 0 + \epsilon$  ( $\epsilon$  为一小量), 并注意到式 (24), 可以得到壁面的质量守恒条件

$$\tilde{K}_{kw} = (\tilde{K}_{kw} - B + \tilde{K}_{ke}) / (B + 1) \quad (30)$$

式中  $\tilde{K}_k$  由式 (16) 定义;  $K_{i,w}$  表示引射前的质量比数 ( $i = k$  或  $j$ ), 对于非引射组元  $K_{i,w} = 0$ ,  $K_{i,w}$  表示引射并反应后的质量比数;

$$B = - \frac{Sc f_w}{[\beta_\eta(0; Sc, f_w)]} \quad (31)$$

以壁温为参数, 式 (30) 和式 (17) (或一般催化条件) 构成一组封闭方程, 可解出  $K_{i,w}$ .

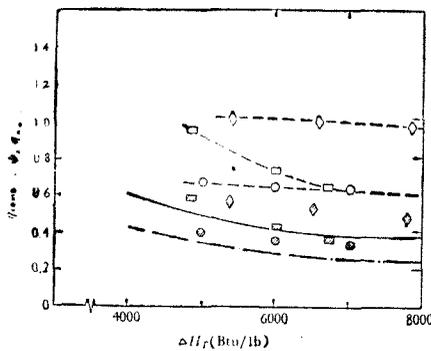


图 2 理论和实验的比较  
 -◇-□-○- 实验点(按  $Le = 1$  整理)<sup>[1]</sup>  
 ◇■ 实验点(按  $Le = 1.4$  整理)  
 - - - 理论曲线 ( $Le = 1$ )  
 ——— 本文理论曲线 ( $Le = 1.4$ )  
 $q_{comb}$  碳在离解空气中燃烧的热流  
 $q_{hw}$  相同边界条件下离解空气热流

随着不同的质量引射条件, 可以把壁面分为“同相反应”、“异相反应”以及两类并存的三类问题. 对于“异相反应”(如碳燃烧), 烧蚀计算中感兴趣的  $B$  可以按上述方法直接解出. 因为固相组元  $K_{i,w}$  在式 (17) 中恒为 1, 在式 (30) 中则为零. 对于“同相反应”, 引射前的质量比数应由壁内条件(材料组成、控制方式等)给出.

用类似的方法, 在壁面附近积分能量方程 (21), 可得传入壁内的热流为

$$q_w = k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \beta_\eta(0; f_w, Pr) l^{\frac{1}{2}} Pr^{-1} \times \sqrt{\rho_w \mu_w} \left( \frac{du_e}{dx} \right)_s (H_{Te} - H_{Tw}) + Le^\gamma \Delta h_{ch} - B Le^\gamma / Le_E \quad (32)$$

式中

$$\Delta h_{ch} = \sum_{j=1}^s \{K_{j\infty} - [(B+1)K_{jw} - BK_{jw-}]\} h_{ch}^j \quad (33)$$

$$Le^\gamma = 1 + (Le - 1)[(1 - G(\infty)) + H_B(G(\infty) - G_f(\infty))] \quad (34)$$

$$\gamma \approx 1 - G(\infty) + H_B[G(\infty) - G_f(\infty)] \quad (35)$$

相变潜热  $L_E = H_{T_w} - H_{T_w-}$ , 下标  $f$  表示冻结值. 冻结时,  $G(\infty) = G_f(\infty)$ ,  $Le^\gamma = Le^f$ ,  $\gamma_f \approx 1 - G_f(\infty)$ .  $\gamma_f$  已由文献 [1] 给出. 下标  $s$  表示驻点值.

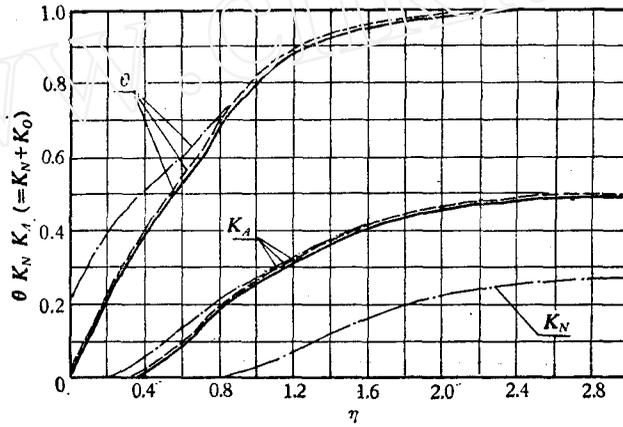


图 3 离解空气平衡边界层无量纲温度  $\theta$  与氮、氧原子质量比沿  $\eta$  的分布  
 $T_w = 7000K$   $P = 3.5atm$   $f_w = 0$   $Le = 1.4$   $Pr = 0.71$  壁面反应平衡  
 - - -  $T_w = 1500K$  [本文]    - · -  $T_w = 300K$  [4]    —  $T_w = 300K$  [本文]

如果忽略平衡和冻结时  $Pr$ ,  $Le$ ,  $l$  等参数的差别, 从式 (32) 可见, 指数  $\gamma$  是唯一表征边界层内化学动力状态对热流影响的参数. 和依赖于  $Pr$  数的动能恢复因子相似,  $Le^\gamma$  在此相当于外缘超过壁面所具有的那一部分化学焓转变为热焓的程度. 由于采用广义计量

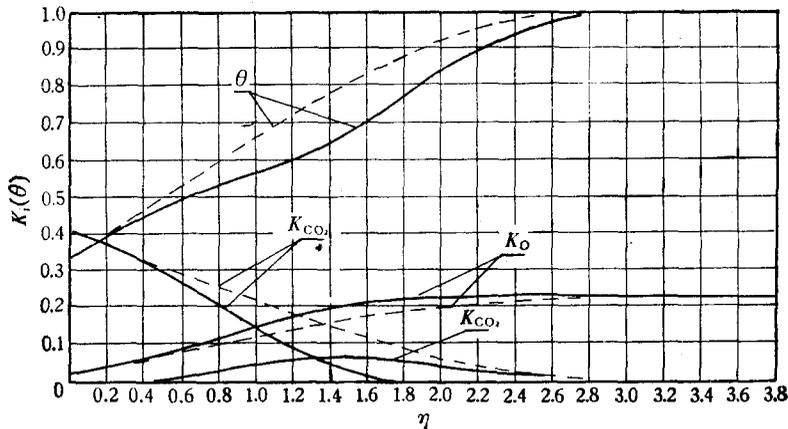


图 4 一氧化碳燃烧无量纲温度  $\theta$  及质量比  $K_i$  ( $i = CO_2, CO, O$ ) 沿  $\eta$  的分布  
 $T_w = 6000K$   $T_w = 2000K$   $P = 3.5atm$   $f_w = 0.25$   $Le = 1.2$   $Pr = 0.71$  壁面反应平衡  
 平衡边界层内反应为  $CO + O = CO_2$  (假设氮不离解, 氧不复合)  
 — 平衡分布    - - - 冻结分布

计量公式可以任意选取参考组元, 在式 (32)–(35) 的计算中选取壁面浓度为零的组元 (外缘不为零) 为参考组元十分方便.

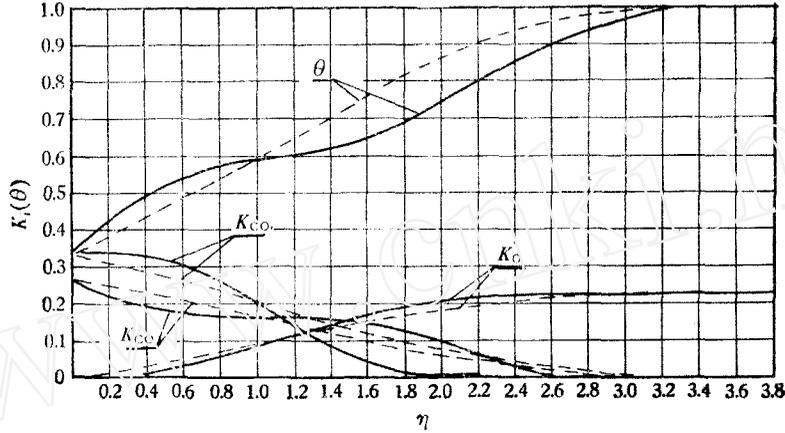


图 5 一氧化碳燃烧无量纲温度  $\theta$  及质量分数  $K_i (i = \text{CO}_2, \text{CO}, \text{O})$  沿  $\eta$  的分布  
 $T_o = 6000\text{K}$   $T_w = 2000\text{K}$   $P = 3.5\text{atm}$   $-f_w = 0.5$   $\text{Le} = 1.2$   $\text{Pr} = 0.71$   
 壁面反应平衡 边界层内反应为  $\text{CO} + \text{O} = \text{CO}_2$  (假设氮不分解, 氧不复合)  
 —— 平衡分布    - - - 冻结分布

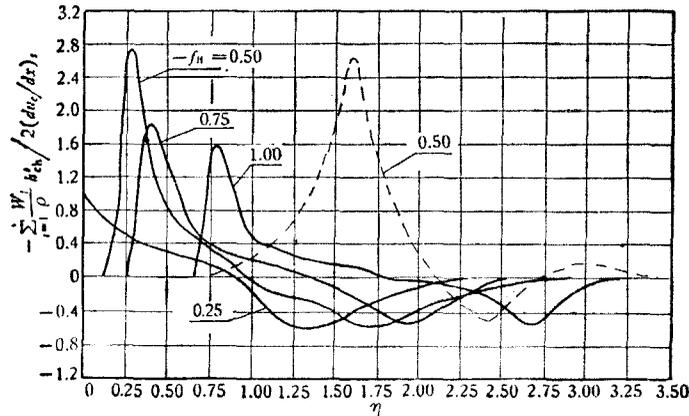


图 6 无量纲总反应热  $-\sum_{i=1}^s \frac{\omega_i}{\rho} h_{ch,i} / 2 \left( \frac{du_\epsilon}{dx} \right)_s$  沿  $\eta$  的分布  
 - - - 例 3    —— 例 4

本文就以下几个例子对热流做了计算。1) 空气的同质引射, 反应式是  $\text{O}_2 \rightleftharpoons 2\text{O}$ ,  $\text{N}_2 \rightleftharpoons 2\text{N}$ ; 2) 氧的同质引射, 亦即在氧的绕流中引射氧, 反应式是  $\text{O}_2 \rightleftharpoons 2\text{O}$ ; 3) 氮的同质引射, 反应式是  $\text{N}_2 \rightleftharpoons 2\text{N}$ ; 4) 引射一氧化碳, 反应式是  $\text{CO} + \text{O} \rightleftharpoons \text{CO}_2$ ; 5) 引射一氧化碳, 反应式是  $\text{CO} + \text{O} \rightleftharpoons \text{CO}_2$ ,  $2\text{O} \rightleftharpoons \text{O}_2$ ; 6) 引射一氧化碳, 反应式是  $\text{CO} + \text{O} \rightleftharpoons \text{CO}_2$ ,  $2\text{O} \rightleftharpoons \text{O}_2$ ,  $2\text{N} \rightleftharpoons \text{N}_2$ 。例 1 在引射量为零时和文献 [4] 的结果符合得很好。文献 [5] 曾认为  $\text{Le} = 1$  的理论结果同他们的碳燃烧实验结果相差得很远, 如果把 [5] 中的原始数据按本文的方法重新整理, 取  $\text{Le} = 1.4$ , 可以发现实验点都在本文理论值的上下 (图 2)。图 3–6 给出了  $K_i$ ,  $T$ ,  $-\sum_{i=1}^s \frac{\omega_i}{\rho} h_{ch,i} / 2 \left( \frac{du_\epsilon}{dx} \right)_s$  沿  $\eta$  的分布。图 7–8 给出了  $r$

随  $f_w, T_c, T_w$  的变化规律.  $-\sum_{i=1}^s \frac{\omega_i}{\rho} \bar{h}_{ch}^i / 2 \left( \frac{du_c}{dx} \right)_s$  沿  $\eta$  分布的上下两个峰值相当于最大放热和最大吸热面.

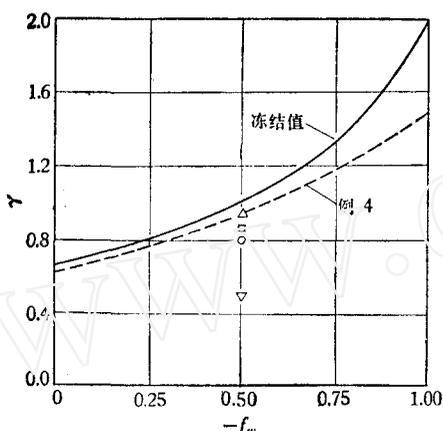


图 7 化学动力学参数  $\gamma$  随  $-f_w$  的变化关系  
 $T_c = 6000\text{K}$   $T_w = 1500\text{K}$   $P = 3.5\text{atm}$   
 ○ 例 1 △ 例 2 ▽ 例 3 □ 例 4

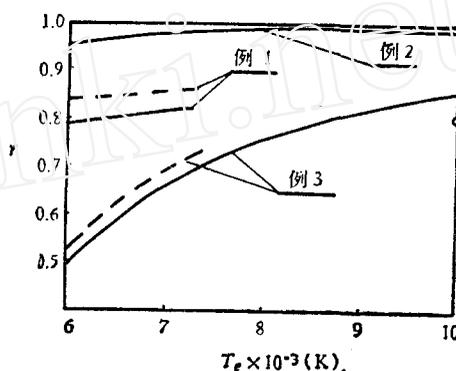


图 8 化学动力学参数  $\gamma$  随外缘温度  $T_e$  的变化关系  
 ( $-f_w = 0.5$ )  
 —  $T_w = 1500\text{K}$  }  $P = 3.5\text{atm}$   
 - -  $T_w = 2000\text{K}$  }  
 ○  $T_w = 1500\text{K}$   $P = 2.5\text{atm}$

#### 四、近似解和讨论

当  $Le$  数偏离 1 不远时, 将  $K_i$  和  $g_T$  按  $(Le - 1)$  展开, 有

$$K_i = K_i^{(0)} + (Le - 1)K_i^{(1)} + O[(Le - 1)^2] \quad (36)$$

$$g_T = g_T^{(0)} + (Le - 1)g_T^{(1)} + O[(Le - 1)^2] \quad (37)$$

忽略  $(Le - 1)$  的二阶以下小量, 则  $G(\infty)$  可由  $Le = 1$  的能量方程解出. 从式 (21) 可见  $c_{pi}$  全同的假设和假设  $\frac{h_i}{h} - 1$  (或  $\frac{c_{pi}}{c_p} - 1$ ) 与  $Le - 1$  为同阶小量是等价的. 使所选参考组元的浓度在壁面为零, 在外缘不为零, 当  $\eta_1 > \eta > 0$  和  $\eta_2 < \eta < \eta_0$  时 ( $\eta_2 > \eta_1$ ,  $\eta_0$  是  $\beta = 0.99$  时的  $\eta$  值),  $K_{i\eta} \rightarrow 0$ ,  $K_i$  在区间  $\eta_1 < \eta < \eta_2$  是单调的. 这时,  $H_B = 0$ ,  $Le^r$  和冻结时具有同样的表达式:

$$Le^r = 1 + (Le - 1)(1 - G)$$

或

$$\gamma \approx 1 - G$$

把  $K_{i\eta}$  写成  $K_{i\eta} = K_{ie} S_j \bar{\theta}_{\eta}$ . 式中  $S_j = K_i / K_{ie}$ ,  $\bar{\theta} = (\theta - \theta_1) / (\theta_2 - \theta_1)$ ,  $\theta_1, \theta_2$  分别是  $\eta_1, \eta_2$  所对应的无量纲温度. 假设  $S_j \bar{\theta} = 1$ , 这一假设对于空气离解问题当压力不太高时是合适的. 对于其他燃烧反应相当于假设反应只在  $\eta_1$  和  $\eta_2$  处 (相当于图 6 中的最大放热面和吸热面) 进行. 设  $Pr = 1$ , 并以下标 1, 2 分别表示  $\eta_1, \eta_2$  处的值, 对  $G_i$  在  $\eta_1$  到  $\eta_2$  区间积分可得

$$G_i = \left[ \ln \frac{(f_{\eta\eta})_1}{(f_{\eta\eta})_2} + \frac{1}{4} (f_1 - f_2) \right] / (\beta_{i2} - \beta_{i1}) \quad (38)$$

根据参考组元在  $\eta_1$  和  $\eta_2$  处反应开始和反应终止的条件,参照确定边界层厚度的办法决定其  $\eta$  值,再通过  $Le = 1$  并令  $\bar{c}_p$  为常值的能量方程和式(17)解出  $\beta_{i1}$  和  $\beta_{i2}$ ,由此可从 Blasius 函数表中查出相应的  $f_{\eta\eta}$  和  $f$ . 计算表明,按本节近似方法所得的  $\gamma$  值与按上节的计算结果相比,误差不超过 5%.

当  $\beta_{i1} \rightarrow 0, \beta_{i2} \rightarrow 1$  时,  $G_i \rightarrow G_j$  ( $G_j$  和文献[1]的结果一致). 当  $\beta_{i2} \rightarrow 1, \beta_{i1}$  亦  $\rightarrow 1$  时,  $G_i \rightarrow 1, \gamma_i \rightarrow 0$ . 这相当于两个反应面重叠在外缘. 和激波层相似,这时在外缘出现一个浓度型间断,输运过程对热流将不产生影响,实际上只能出现与此接近的情况,例如  $T_e = 6000\text{K}$  左右时(冷壁条件),氮的  $\eta_1$  就很靠近外缘. 有意义的是  $G_i = 1$  时同  $Le = 1$  时结果完全一致. 如果把在相对比较高温的区域进行放热反应的程度定义为反应能力,则假设  $Le = 1$  只对反应能力很强的问题才合适. 当  $\beta_{i1} \rightarrow 0, \beta_{i2}$  亦  $\rightarrow 0$  时,可得  $G_i = f_w / \beta_{\eta w}(0; f_w)$ . 这时相当于浓度间断面紧贴壁面. 当引射量一定时此时的  $\gamma$  为最大,亦即输运过程对热流的影响为最大. 当压力较低、外缘温度较高时,氧的离解反应就接近于这一情况. 对应于  $-f_w$  为 0, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00 时的  $G_i = f_w / \beta_{\eta w}(0; f_w)$  的值分别为 0, -0.51, -1.52, -4.0, -14.1; 相应的  $\gamma_i$  是冻结值  $\gamma_{if}$  的 1.53, 1.84, 2.34, 3.33, 6.55 倍. 这说明有化学反应时的  $\gamma$  也可以大于  $\gamma_f$ .

当  $0 < -f_w < 0.5$  时,以  $\beta_{i1}, \beta_{i2}$  为自变数,在  $\beta_{i1} = 0$  和  $\beta_{i2} = 1$  两点对  $G_i$  线性展开,可得

$$G_i = G_j + \left[ G_j - \frac{f_w}{\beta_{\eta w}} \right] \beta_{i1} + (1 - G_j)(\beta_{i2} - 1) \quad (39)$$

上式中因为  $G_j$  小于 1 且小于  $|f_w|$ , 对于引射问题  $f_w$  又恒为负,故  $\beta_{i1}$  和  $\beta_{i2}$  的系数恒为正值. 因此,  $G_i$  随  $\beta_{i1}$  和  $\beta_{i2}$  的增大而增大,  $\gamma_i$  随  $\beta_{i1}$  和  $\beta_{i2}$  的增大而减小. 这说明: 反应能力愈强或反应面愈趋向处于更高温度的外缘,输运过程对热流的影响就愈弱. 一切增大反应能力的因素,例如平衡常数较高的反应、增加反应物质的引射量、反应一定时降低温度、增大压力等,都使  $\gamma_i$  减小(参阅图 7—8).

对于含有两个以上反应的问题,还应该按式(28)计及各反应的焓差  $(K_{ie} - K_{iw})\bar{h}_{ch}$  对总焓差的贡献,焓差愈大,其恢复能力对总恢复能力  $Le^r$  的贡献亦愈大. 由于空气中氮的质量比数和生成焓都远超过氧,因此当外缘温度足够大时,离解空气有化学反应时的  $\gamma$  常小于  $\gamma_f$ . 随着外缘温度的升高,离解空气中出现的其他反应将进一步促使  $\gamma$  向小于  $\gamma_f$  的方向偏离. 在离解空气中的燃烧反应,不外乎是燃烧物质和空气中有关组元间的反应,其  $\gamma$  值的变化趋势和上述单纯的离解空气问题类似.

## 五、结 语

利用广义计量公式(11)消去不独立的反应速率,具有任意选取参考组元的方便. 它比其他方法更为公式化,因而,对于化学反应繁多的问题尤为便利.

利用所给出的迭代方程组可以计算热流. 计算和分析都表明: 增大反应能力亦即反应面向外缘移动,起着降低  $Le$  数对热流影响的作用,对于离解空气以及离解空气中的燃

烧反应,  $Le$  数对热流的影响都比冻结时低。

研究介于平衡和冻结之间的非平衡问题, 其困难并不在于求解边界层方程本身, 而在于难以提供较准确的化学反应速率。当引射量不是很大时, 在驻点附近, 平衡与冻结的差别不大。因此, 在这种情况下, 不一定再去考虑非平衡问题。

### 参 考 文 献

- [1] Lees, L., *Combustion and Propulsion*, Third AGARD Colloquium, N. Y. (1958), 451—498.
- [2] Emmons, H. W., Leigh, D. C., *Tabulation of the Blasius function with blowing and suction*, *Curr. Pap. Aero. Res. Coun., Lond.* (1953).
- [3] Lees, L., *Jet Propulsion*, 26(1956), 259—269.
- [4] Fay, J. A., Riddell, F. R., *JAS*, 25(1958), 78—85.
- [5] Vojvodich, N. S., Pope, R. B., *AIAA J.*, 2, 3(1964), 536—542.

## LAMINAR HEAT TRANSFER WITH MASS INJECTION AND CHEMICAL REACTION

Zu Tie-lin

### Abstract

To simplify our problem, a stoichiometric formula is derived for boundary layers with mass injection and chemical reaction. As an example, the solution of chemical equilibrium was analyzed. Results of calculation were found to be in close agreement with that of experiment [5], and with that of [4] when there is no injection. Finally, it was indicated that the effect of Lewis number on heat transfer decreases as the capability of heat generating reactions increases.