

随机振动中的相关函数分析*

中国科学院上海原子核研究所 姚伟达 张慧娟

相关函数是以相关时间 τ 为表征的时域来描述随机过程,但在运用时对其物理意义往往缺乏明确的解释^[1-4]. 本文以有限带宽白噪声激励的单自由度线性系统为例,推导了自、互相关函数的幂级数解析式. 并从相关函数的基本性质出发论述了幂级数每项系数的物理意义,从而推广了文献[3]的工作.

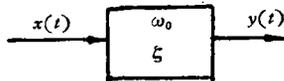


图 1 单自由度线性系统模型

1. 单自由度线性系统在有限带宽白噪声激励下的相关函数积分表达式 单自由度线性系统的简化模型如图 1. 随机输入量 $x(t)$ 是基础位移或者是作用在质量上的外力,其输出量 $y(t)$ 是质量与基础的相对位移或者是质量本身的位移. 其方程为

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 x \quad (1)$$

式中 ω_0 是固有频率, ζ 是阻尼率. 当输入 $x(t)$ 是平稳各态历经的随机量时,则输出 $y(t)$ 的自相关函数 $R_y(\tau)$ 和输入输出的互相关函数 $R_{xy}(\tau)$ 与输入 $x(t)$ 的功率谱密度函数 $S_x(u)$ 的关系为

$$R_y(\tau) = \omega_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_x(u) e^{i\omega_0 \tau u} du}{(1-u^2)^2 + (2\zeta u)^2} \quad (2)$$

$$R_{xy}(\tau) = \omega_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_x(u) e^{i\omega_0 \tau u} du}{1-u^2 + i2\zeta u} \quad (3)$$

其中 $u = \omega/\omega_0$, ω 为圆频率, τ 为相关时间. 当输入 $x(t)$ 是有限带宽为 $\omega_2 - \omega_1$ 的白噪声时,其功率谱密度函数为

$$S_x(u) = \begin{cases} S_0 (\text{常数}), & \text{当 } u_1 \leq |u| \leq u_2 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } |u| < u_1, |u| > u_2 \text{ 时} \end{cases} \quad (4)$$

将式(4)代入式(2), (3), 利用 $S_x(u)$ 的对称性, 令 $u_1 = \omega_1/\omega_0$, $u_2 = \omega_2/\omega_0$, 则

$$R_y(\tau) = 2S_0\omega_0 \int_{u_1}^{u_2} \frac{\cos \omega_0 \tau u du}{(1-u^2)^2 + (2\zeta u)^2} \quad (5)$$

$$R_{xy}(\tau) = 2S_0\omega_0 \left[\int_{u_1}^{u_2} \frac{(1-u^2) \cos \omega_0 \tau u du}{(1-u^2)^2 + (2\zeta u)^2} + 2\zeta \int_{u_1}^{u_2} \frac{u \sin \omega_0 \tau u du}{(1-u^2)^2 + (2\zeta u)^2} \right] \quad (6)$$

2. $R_y(\tau)$, $R_{xy}(\tau)$ 的幂级数表达式 由于式(5), (6)不能直接积分, 将 $\cos \omega_0 \tau u$ 和

* 1978 年 5 月 8 日收到.

$\sin \omega_0 \tau u$ 用 Taylor 级数展开^[5]后代入, $R_y(\tau)$, $R_{xy}(\tau)$ 可化为

$$R_y(\tau) = 2S_0\omega_0 \sum_{n=0,2,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{n/2}(\omega_0\tau)^n}{n!} \int_{u_1}^{u_2} \frac{u^n du}{(1-u^2)^2 + (2\zeta u)^2} \quad (7)$$

$$R_{xy}(\tau) = 2S_0\omega_0 \left[\sum_{n=0,2,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{n/2}(\omega_0\tau)^n}{n!} \int_{u_1}^{u_2} \frac{(1-u^2)u^n du}{(1-u^2)^2 + (2\zeta u)^2} + 2\zeta \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}(\omega_0\tau)^n}{n!} \int_{u_1}^{u_2} \frac{u^{n+1} du}{(1-u^2)^2 + (2\zeta u)^2} \right] \quad (8)$$

经过冗长繁复的积分运算和整理,并考虑到幂级数能显示其收敛性,用 $u \leq 1$ 和 $u \geq 1$ 这两个区域表示其结果,有

$$R_{xy}(\tau) = \begin{cases} \sum_{n=0,2,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{n/2}(\omega_0\tau)^n}{n!} [\Phi_{n-1}(u)]_{u_1}^{u_2}, & \text{当 } u \leq 1 \text{ 时} \\ \left\{ [\Phi_{-1}(u)] - \frac{(\omega_0\tau u)^2}{2!u^2} [\Phi_1(u)] + \sum_{n=4,6,8,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{n/2}(\omega_0\tau u)^n}{n!u^3} \Psi_{n-1}^{(1)}(u) \right\}_{u_1}^{u_2}, & \text{当 } u \geq 1 \text{ 时} \end{cases} \quad (9)$$

$$R_{xy}(\tau) = \begin{cases} \sum_{n=0,2,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{n/2}(\omega_0\tau)^n}{n!} [\Phi_{n-1}(u) - \Phi_{n+1}(u)]_{u_1}^{u_2} + 2\zeta \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}(\omega_0\tau)^n}{n!} [\Phi_n(u)]_{u_1}^{u_2}, & \text{当 } u \leq 1 \text{ 时} \\ \left\{ \sum_{n=0,2,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{n/2}(\omega_0\tau u)^n}{n!} \Psi_{n-1}^{(2)}(u) + 2\zeta \left[\frac{(\omega_0\tau u)}{1!u} \Phi_1(u) + \sum_{n=3,5,7,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}(\omega_0\tau u)^n}{n!} \Psi_n^{(1)}(u) \right] \right\}_{u_1}^{u_2}, & \text{当 } u \geq 1 \text{ 时} \end{cases} \quad (10)$$

式中 $R_{y_0}(0) = \frac{\pi S_0 \omega_0}{2\zeta} [\Phi_{-1}(u)]_0^\infty = \frac{\pi S_0 \omega_0}{2\zeta} = \bar{y}_0^2$, 它为熟知的理想白噪声激励下输出 $y(t)$

的均方值。函数 $\Phi_{-1}(u)$, $\Phi_1(u)$ 和 $\Phi_n(u)$ 的递推式为

$$\Phi_{-1}(u) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\zeta}{2\sqrt{1-\zeta^2}} \ln \frac{X_2}{X_1} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\zeta u}{1-u^2} \right) \quad (n = -1)$$

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\zeta}{2\sqrt{1-\zeta^2}} \ln \frac{X_2}{X_1} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\zeta u}{1-u^2} \right) \quad (n = 1)$$

$$\Phi_n(u) = \frac{1}{\pi} \left\{ 4 \sum_{k=2,4,6,\dots}^{n-1} (-1)^{n-(k/2)} \left[\zeta \frac{u^{n-k}}{n-k} + (1-\zeta^2)\pi \Phi_{n-k}(u) \right] - \pi \Phi_{n-2}(u) - 2(-1)^{(n+1)/2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\zeta u}{1-u^2} \right\} \quad (n = 3, 5, 7, \dots)$$

$$\Psi_n^{(1)} = \frac{\Phi_n(u)}{u^{n-2}} \quad (n = 3, 5, 7, \dots);$$

$$\Psi_n^{(2)} = \frac{1}{u^n} [\Phi_n(u) - \Phi_{n+2}(u)] \quad (n = -1, 1, 3, 5, \dots)$$

其中 $X_1 = u^2 - 2\sqrt{1-\zeta^2}u + 1$, $X_2 = u^2 + 2\sqrt{1-\zeta^2}u + 1$ 。图 2, 3 为阻尼率 $\zeta = 0.1, 0.01$ 两种情况时的 $\Phi_{-1}(u)$, $\Phi_1(u)$ 和 $\Phi_3(u)$ [或 $\Psi_3^{(1)}(u)$] 对于 u 变化曲线。图 4, 5 则

是 u 为定值时 $\Phi_n(u)$ [$\phi_n^{(1)}(u)$] 和 $[\Phi_n(u) - \Phi_{n+2}(u)]$ [或 $\Psi_n^{(2)}(u)$] 随级数 n 变化的曲线, 从图中可清楚地看到其值随 n 的增加逐渐衰减. 由此, 该问题中的相关函数级数展开式(9), (10)是收敛的, 其收敛半径是: 当 $u \leq 1$ 时为 $|\omega_0 \tau| < \infty$; 当 $u \geq 1$ 时为 $|\omega_0 \tau u| < \infty$. 当级数计算到 N 项时收敛精度为 $O(1/N^2)$.

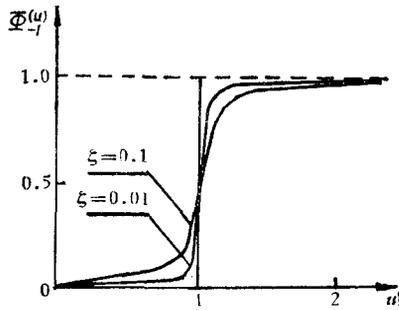


图2 $\Phi_{-1}(u)$ 对于 u 的变化曲线

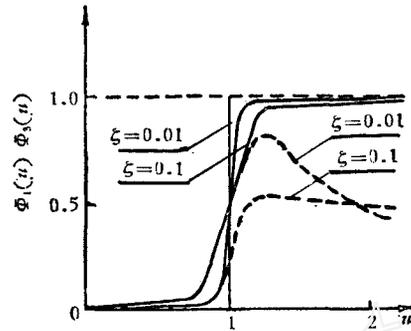


图3 $\Phi_1(u), \Phi_3(u)$ 对于 u 的变化曲线
—— $\Phi_1(u)$ —— $\Phi_3(u)$

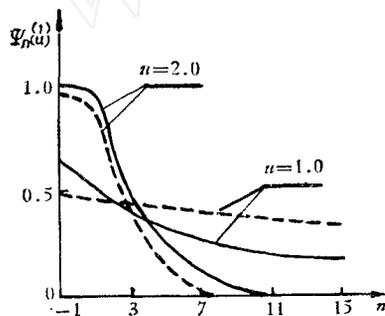


图4 $\Psi_n^{(1)}(u)$ 对于级数 n 的变化曲线
—— $\xi = 0.1$ —— $\xi = 0.01$

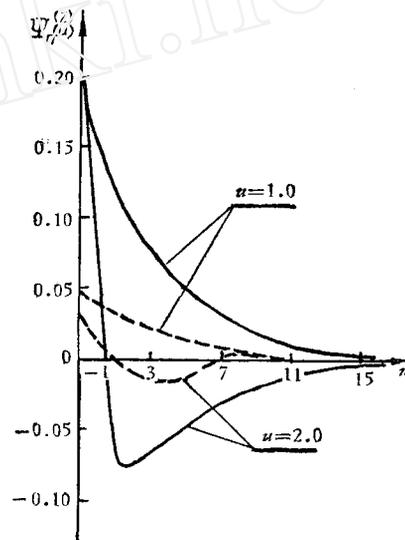


图5 $\Psi_n^{(2)}(u)$ 对于级数 n 的变化曲线
—— $\xi = 0.1$ —— $\xi = 0.01$

3. 相关函数的 Taylor 级数展开式 在式(9), (10)中, 如果对每项 $\tau^n/n!$ 所对应的系数能解释其物理意义, 那么相关函数 $R_y(\tau)$, $R_{xy}(\tau)$ 本身的含义也就清楚了. 要说明这一点, 我们可以从平稳各态历经随机过程中相关函数的一个基本性质出发来分析. 由于相关时间 τ 超前或滞后时其相关函数值不变^[1], 故有

$$R_y(\tau) = \overline{y(t)y(t+\tau)} = \overline{y(t-\tau)y(t)} \quad (11)$$

$$R_{xy}(\tau) = \overline{x(t)y(t+\tau)} = \overline{x(t-\tau)y(t)} \quad (12)$$

其中符号“—”代表在取样时间 T 内对 t 的平均. 在对 $R_y(\tau)$, $R_{xy}(\tau)$ 的每阶导数中再利用这个性质, 即可得到对 n 阶导数的通式为

$$\frac{d^n R_y(\tau)}{d\tau^n} = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} \frac{d^{(n-1)/2} y(t)}{dt^{(n-1)/2}} \frac{d^{(n+1)/2} y(t+\tau)}{dt^{(n+1)/2}} \\ \times \left[\text{或} (-1)^{(n+1)/2} \frac{d^{(n+1)/2} y(t)}{dt^{(n+1)/2}} \frac{d^{(n-1)/2} y(t+\tau)}{dt^{(n-1)/2}} \right] & (n = 1, 3, 5, \dots) \\ (-1)^{n/2} \frac{d^{n/2} y(t)}{dt^{n/2}} \frac{d^{n/2} y(t+\tau)}{dt^{n/2}} & (n = 0, 2, 4, \dots) \end{cases} \quad (13)$$

$$\frac{d^n R_{xy}(\tau)}{d\tau^n} = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} \frac{d^{(n-1)/2} x(t)}{dt^{(n-1)/2}} \frac{d^{(n+1)/2} y(t+\tau)}{dt^{(n+1)/2}} \\ \times \left[\text{或} (-1)^{(n+1)/2} \frac{d^{(n+1)/2} x(t)}{dt^{(n+1)/2}} \frac{d^{(n-1)/2} y(t+\tau)}{dt^{(n-1)/2}} \right] & (n = 1, 3, 5, \dots) \\ (-1)^{n/2} \frac{d^{n/2} x(t)}{dt^{n/2}} \frac{d^{n/2} y(t+\tau)}{dt^{n/2}} & (n = 0, 2, 4, \dots) \end{cases} \quad (14)$$

用 $\tau = 0$ 代入上面两式后, 得到其在原点值为

$$\left. \frac{d^n R_y(\tau)}{d\tau^n} \right|_{\tau=0} = \begin{cases} 0 & (n = 1, 3, 5, \dots) \\ (-1)^{n/2} \left(\frac{d^{n/2} y(t)}{dt^{n/2}} \right)^2 & (n = 0, 2, 4, \dots) \end{cases} \quad (15)$$

$$\left. \frac{d^n R_{xy}(\tau)}{d\tau^n} \right|_{\tau=0} = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} \frac{d^{(n-1)/2} x(t)}{dt^{(n-1)/2}} \frac{d^{(n+1)/2} y(t)}{dt^{(n+1)/2}} \\ \times \left[\text{或} (-1)^{(n+1)/2} \frac{d^{(n+1)/2} x(t)}{dt^{(n+1)/2}} \frac{d^{(n-1)/2} y(t)}{dt^{(n-1)/2}} \right] & (n = 1, 3, 5, \dots) \\ (-1)^{n/2} \frac{d^{n/2} x(t)}{dt^{n/2}} \frac{d^{n/2} y(t)}{dt^{n/2}} & (n = 0, 2, 4, \dots) \end{cases} \quad (16)$$

清楚地看到式 (15), (16) 的左端项正是 $R_y(\tau)$, $R_{xy}(\tau)$ 的 Taylor 级数展开项 $\tau^n/n!$ 的系数, 因此有

$$R_y(\tau) = \bar{y}^2 - \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \frac{\tau^2}{2!} + \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right)^2 \frac{\tau^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0, 2, 4, \dots}^{\infty} (-1)^{n/2} \left(\frac{d^{n/2} y}{dt^{n/2}} \right)^2 \frac{\tau^n}{n!} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \left[xy - \left(\frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} \right) \frac{\tau^2}{2!} + \dots \right] + \left[\left(x \frac{dy}{dt} \right) \frac{\tau}{1!} - \left(\frac{dx}{dt} \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \frac{\tau^3}{3!} + \dots \right] \\ &= \sum_{n=0, 2, 4, \dots}^{\infty} (-1)^{n/2} \left(\frac{d^{n/2} x}{dt^{n/2}} \frac{d^{n/2} y}{dt^{n/2}} \right) \frac{\tau^n}{n!} + \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} (-1)^{(n-1)/2} \left(\frac{d^{(n-1)/2} x}{dt^{(n-1)/2}} \frac{d^{(n+1)/2} y}{dt^{(n+1)/2}} \right) \frac{\tau^n}{n!} \end{aligned} \quad (18)$$

这里, 如果 $x(t)$, $y(t)$ 是随机位移量, 则 \bar{y}^2 , $\overline{(dy/dt)^2}$, $\overline{(d^2 y/dt^2)^2}$, \dots , $\overline{(d^{n/2} y/dt^{n/2})^2}$ 是随机位移 y (零次速度)、速度 dy/dt (一次速度)、加速度 $d^2 y/dt^2$ (二次速度), \dots , $d^{n/2} y/dt^{n/2}$ [($n/2$) 次速度] 的均方值。而 $\overline{(d^{n/2} x/dt^{n/2})(d^{n/2} y/dt^{n/2})}$ 为随机量 $d^{n/2} x/dt^{n/2}$ 和 $d^{n/2} y/dt^{n/2}$

的协方差, $\overline{(d^{(n-1)/2}x/dt^{(n-1)/2})(d^{(n+1)/2}y/dt^{(n+1)/2})}$ 为随机量 $d^{(n-1)/2}x/dt^{(n-1)/2}$ [($n-1$)/2 次速度] 和 $d^{(n+1)/2}y/dt^{(n+1)/2}$ [($n+1$)/2 次速度] 的协方差。

4. 物理意义的分析和讨论 1) 从式 (17) 和 (18) 可得到的结论是: 自相关函数 $R_y(\tau)$ 的幂级数展开式中偶数项 $\tau^n/n!$ 的系数是表示随机位移 $y(t)$ 的 $n/2$ 次速度均方值, 其符号为 $(-1)^{n/2}$ 。互相关函数 $R_{xy}(\tau)$ 的幂级数展开式中偶数项 $\tau^n/n!$ 系数是表示随机位移 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的 $n/2$ 次速度协方差, 符号为 $(-1)^{n/2}$, 奇数项 $\tau^n/n!$ 的系数是 $x(t)$ 的 $(n-1)/2$ 次速度和 $y(t)$ 的 $(n+1)/2$ 次速度协方差, 其符号为 $(-1)^{(n-1)/2}$ 。而相关函数 $R_y(\tau)$, $R_{xy}(\tau)$ 则是这一系列均、协方值的线性组合。由于该两式表明了相关函数与随机量的均、协方值联系着的关系式, 因此它是阐明物理意义的一个分析表达式。

比较式(9),(10)和式(17),(18)对应项后, 可得到上述例中的物理意义表达式为

$$\overline{\left(\frac{d^{n/2}y}{dt^{n/2}}\right)^2} = \overline{y_0^2} \omega_0^n [\Phi_{n-1}(u)]_0^2; \quad (n=0, 2, 4, \dots) \quad (19-1)$$

$$\overline{\left(\frac{d^{n/2}x}{dt^{n/2}} \frac{d^{n/2}y}{dt^{n/2}}\right)} = \overline{y_0^2} \omega_0^n [\Phi_{n-1}(u) - \Phi_{n+1}(u)]_0^2; \quad (n=0, 2, 4, \dots) \quad (19-2)$$

$$\overline{\left(\frac{d^{(n-1)/2}x}{dt^{(n-1)/2}} \frac{d^{(n+1)/2}y}{dt^{(n+1)/2}}\right)} = \overline{y_0^2} \omega_0^n (2\zeta) [\Phi_n(\zeta)]_0^2; \quad (n=1, 3, 5, \dots) \quad (19-3)$$

2) 结构随机振动的动态设计分析中感兴趣的参数通常是它们的各次速度均、协方值。如果纯粹用计算或实验方法将随机变量直接对时间 t 微分(或积分)来获得这些参数, 就可能引起失真。但是相关函数本身对于相关时间 τ 而言却是连续、确定的(即非随机性), 假如对 τ 的高阶导数也存在, 那么由 $R_y(\tau)$, $R_{xy}(\tau)$ 展开成幂级数式(17), (18)来获得所需的各次速度均、协方值, 则其精度会好些, 运算也较简便。

在实际中遇到的结构随机振动往往是十分复杂的, 设法将相关函数得出像式(9), (10)那样的分析表达式也较困难。但是通过离散化数值计算方法^[2](如 FFT 方法)或实验相关技术^[6], 是完全有条件可得到自、互相关函数的。这样, 按上述原理在相关函数分析器的尾部设置一个 Taylor 级数展开的数字计算程序或实验模拟分析装置, 那么获得所需的各次速度均、协方值将并不十分困难。

3) 本文主要涉及随机振动中二点之间的相关分析, 还可推广到多点输入或多点输出系统中的相关矩阵分析。

参 考 文 献

- [1] Crandall, S. H., Random Vibration, Vol. I, II (1963).
- [2] Bendat, J. S. and Piersol, A. G., Random Data: Analysis and Measurement Procedures, Wiley-Interscience (1971). 凌福根译, 随机数据分析方法, 国防工业出版社(1976).
- [3] Kandianis, F., *J. of Sound and Vibration*, **36** (1974), 207—223.
- [4] Kandianis, F., *J. of Sound and Vibration*, **26** (1973), 161—172.
- [5] 徐桂芳编译, 积分表, 上海科学技术出版社(1963).
- [6] Broch, J. T., Mechanical Vibration and Shock Measurements, B & K (1972).

CORRELATION FUNCTION IN THE ANALYSIS OF RANDOM VIBRATION

Yao Wei-da Zhang Hui-juan

(Shanghai Institute of Nuclear Research, Academia Sinica)

www.cnki.net