

研究简报

水平面内地下水的二维非定常运动*

南京水利科学研究所 沙金焯

在介质是各向同性, 渗流是缓变流, 流速沿铅直方向不变化的假定下, 有自由面的二维非定常渗流基本方程为^[1]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \frac{\mu}{k} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{k} = 0 \quad (1)$$

式中 k 为渗透系数(米/天); μ 为给水度; ε 为地下水蒸发强度(米/天); h 为自由面至不透水层的距离(米); H 为自基准面算起的水头(米)(图 1)。

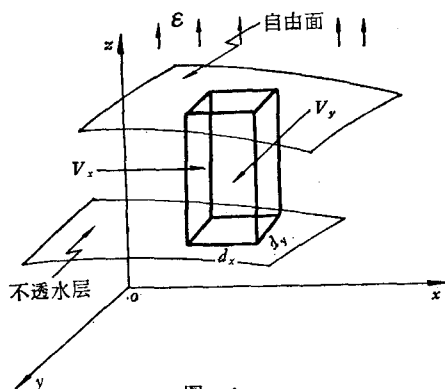


图 1

若把不透水层放在基准面 xoy 上, 则式(1)中的 H 变为 h , 线性化后^[1]可得

$$\frac{\partial h}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) = - \frac{\varepsilon}{\mu} \quad (2)$$

式中 $a^2 = kh_{cp}\alpha/\mu$ (米²/天); h_{cp} 为渗流平均厚度(米); α 为排水沟或暗管的不完整系数:

$$\alpha = 1 / \left\{ 1 + \frac{4T_0}{\pi l} \ln \left[1 / \left(2 \operatorname{sh} \frac{\pi B}{4T_0} \right) \right] \right\} \quad (3)$$

式中 T_0 为沟底离不透水层距离(米); B 为

沟水面宽度(米); l 为排水沟半间距(米)。

$$\varepsilon = \varepsilon_0 [1 - (\Delta/\Delta_0)], \quad \Delta = T - h \quad (4)$$

式中 ε_0 为地表水的蒸发强度(米/天); Δ_0 为地下水蒸发为零时的埋深(米); 一般为 2—3 米。在式(4)中, 当实有地下水埋深大于 Δ_0 时, 则取 $\varepsilon = 0$ 进行计算。 Δ 为地下水埋深(米)。以式(4)代入式(2), 则得考虑变量补给时的二维非定常问题的偏微分方程

$$h_t = a^2(h_{xx} + h_{yy}) - Ah + AT - (\varepsilon_0/\mu) \quad (5)$$

式中 $A = \varepsilon_0/(\Delta_0\mu)$ (1/天); h_t , h_{xx} , h_{yy} 分别为 h 对 t , x , y 的一阶及二阶偏微分。按图 2 和图 3 可列出方程(5)的边界条件及初始条件

$$\left. \begin{aligned} h(0, y, t) &= h(L, y, t) = h_0 \\ h(x, 0, t) &= h(x, S, t) = h_0 \end{aligned} \right\} \quad (t \geq 0) \quad (6)$$

$$h(x, y, 0) = H_0 \quad (0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq S) \quad (7)$$

* 1977 年 10 月 30 日收到。

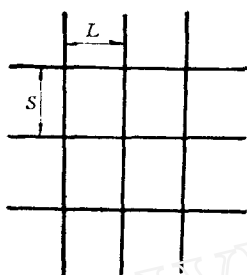
$$\bar{h}_t - a^2(\bar{h}_{xx} + \bar{h}_{yy}) = -Be^{At} \quad (8)$$


图 2

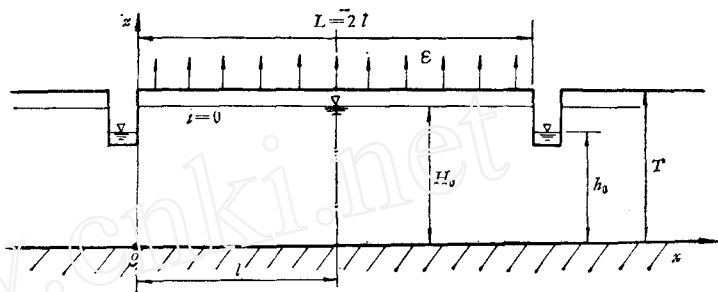


图 3

$$\left. \begin{aligned} \bar{h}(0, y, t) &= \bar{h}(L, y, t) = h_0 e^{At} \\ \bar{h}(x, 0, t) &= \bar{h}(x, S, t) = h_0 e^{At} \end{aligned} \right\} \quad (t \geq 0) \quad (9)$$

$$\bar{h}(x, y, 0) = H_0 \quad (0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq S) \quad (10)$$

$$\{\bar{h}_i^1 - a^2(\bar{h}_{xx}^1 + \bar{h}_{yy}^1) = 0 \quad (11)$$

$$[I] \quad \begin{cases} \bar{h}_t^1 - a^2(\bar{h}_{xx}^1 + \bar{h}_{yy}^1) = 0 & (11) \\ \bar{h}^1(0, y, t) = \bar{h}^1(L, y, t) = h_0 e^{At} & (12) \\ \bar{h}^1(x, 0, t) = \bar{h}^1(x, S, t) = h_0 e^{At} & (13) \\ \bar{h}^1(x, y, 0) = H_0 \quad (0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq S) \end{cases} \quad (t \geq 0)$$

$$\bar{h}(x, y, 0) = H_0 \quad (0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq S) \quad (13)$$

$$[\text{II}] \quad \begin{cases} \bar{h}_t^{\text{II}} - a^2(\bar{h}_{xx}^{\text{II}} + \bar{h}_{yy}^{\text{II}}) = -B e^{At} & (14) \\ \bar{h}^{\text{II}}(0, y, t) = \bar{h}^{\text{II}}(L, y, t) = 0 \\ \bar{h}^{\text{II}}(x, 0, t) = \bar{h}^{\text{II}}(x, S, t) = 0 \end{cases} \quad (t \geq 0) \quad (15)$$

$$\begin{cases} \bar{h}^{\text{II}}(x, y, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq S) \end{cases} \quad (16)$$

$$\bar{h}^{\text{II}}(x, y, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq S) \quad (16)$$

$$(W_t^1 - a^2(W_{xx}^1 + W_{yy}^1)) = -Ah_0 e^{At} \quad (17)$$

$$\text{[III]} \quad \begin{cases} W_t^1 - a^2(W_{xx}^1 + W_{yy}^1) = -Ah_0 e^{At} & (17) \\ W^1(0, y, t) = W^1(L, y, t) = 0 \\ W^1(x, 0, t) = W^1(x, S, t) = 0 \end{cases} \quad (t \geq 0) \quad (18)$$

$$W^I(x, y, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq S) \quad (19)$$

$$[IV] \begin{cases} W_t^{II} - a^2(W_{xx}^{II} + W_{yy}^{II}) = 0 & (20) \\ W^{II}(0, y, t) = W^{II}(L, y, t) = 0 \\ W^{II}(x, 0, t) = W^{II}(x, S, t) = 0 \end{cases} \quad (t \geq 0) \quad (21)$$

$$\begin{cases} W^{II}(x, y, 0) = H \quad (0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq S) \end{cases} \quad (22)$$

$$W^{\text{II}}(x, y, 0) = H \quad (0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq S) \quad (22)$$

$$h(x, y, t) = h_0 - \frac{16}{\pi^2} e^{-At} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[(Ah_0 + B) \left(\frac{e^{At} - e^{-a^2 \beta_{mn}^2 t}}{A + a^2 \beta_{mn}^2} \right) - H e^{-a^2 \beta_{mn}^2 t} \right] \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{S} \quad (23)$$

式中 $H = H_0 - h_0$; $\beta_{mn}^2 = (m\pi/L)^2 + (n\pi/S)^2$.

若令 $x = L/2$, $y = S/2$, 代入式 (23), 则得中点地下水位随时间的变化规律

$$h(t) = h_0 - \frac{16}{\pi^2} e^{-At} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \left[(Ah_0 + B) \left(\frac{e^{At} - e^{-a^2 \beta_{mn}^2 t}}{A + a^2 \beta_{mn}^2} \right) - H e^{-a^2 \beta_{mn}^2 t} \right] \times \frac{1}{mn} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \quad (24)$$

若不考虑蒸发, 则将 $A = 0$, $B = 0$ 代入式 (23), (24) 即可. 由式 (24), 可算得任一瞬时流入任一侧排水沟的渗流量为

$$q(t) = k[h^2(t) - h_0^2]/L \quad (25)$$

$$q(t) = k[h^2(t) - h_0^2]/S \quad (26)$$

现在简化式 (23), (24). 因为 $h_0 + \Delta_0 \approx T$, 故可近似取 $(Ah_0 + B) = A(h_0 + \Delta_0 - T) = 0$. 于是式 (23), (24) 分别简化为

$$h(x, y, t) = h_0 + \frac{16}{\pi^2} H e^{-At} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} e^{-a^2 \beta_{mn}^2 t} \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{S} \quad (27)$$

$$h(t) = h_0 + \frac{16}{\pi^2} H e^{-At} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} e^{-a^2 \beta_{mn}^2 t} \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \quad (28)$$

上二式均为收敛级数, 取四项已足够精确. t 较大或 S 较小 L 较小时则只需取一项:

$$h(x, y, t) = h_0 + (16/\pi^2) H e^{-At} (e^{-Dt} \sin \theta) (e^{-Ft} \sin \phi) \quad (29)$$

$$h(t) = h_0 + (16/\pi^2) H e^{-At} (e^{-Dt}) (e^{-Ft}) \quad (30)$$

式中 $D = (\pi a/L)^2$; $F = (\pi a/S)^2$; $\theta = \pi x/L$; $\phi = \pi y/S$.

对于一维问题, 只需在式 (23), (24) 中舍弃 y 项即可^[3]:

$$h(x, t) = h_0 - \frac{4}{\pi} e^{-At} \sum_{m=0}^{\infty} \left[(Ah_0 + B) \left(\frac{e^{At} - e^{-ct}}{A + c} \right) - H e^{-ct} \right] \frac{\sin Kx}{2m+1} \quad (31)$$

$$h(t) = h_0 - \frac{4}{\pi} e^{-At} \sum_{m=0}^{\infty} \left[(Ah_0 + B) \left(\frac{e^{At} - e^{-ct}}{A + c} \right) - H e^{-ct} \right] \frac{(-1)^m}{2m+1} \quad (32)$$

式中 $K = (m + \frac{1}{2})\pi/l$; $c = \left\{ \left[(m + \frac{1}{2})\pi a \right] / l \right\}^2$; $l = \frac{L}{2}$.

同前一样, 近似地令 $(Ah_0 + B) = 0$, 并取少量级数计算, 就有

$$h(x, t) = h_0 + \frac{4}{\pi} H e^{-At} \left(e^{-Dt} \sin \theta + \frac{1}{3} e^{-9Dt} \sin 3\theta + \frac{1}{5} e^{-25Dt} \sin 5\theta + \frac{1}{7} e^{-49Dt} \sin 7\theta \right) \quad (33)$$

表 1 沟距中点地下水位 h 随时间的下降

t (天)		4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
有蒸发	计算	3.930	3.820	3.671	3.510	3.350	3.218	3.100	3.012	2.900	2.830
	试验	3.932	3.802	3.670	3.524	3.388	3.260	3.170	3.076	2.988	2.892
无蒸发	计算	3.995	3.944	3.835	3.690	3.530	3.400	3.264	3.148	3.034	3.000
	试验	3.991	3.914	3.800	3.670	3.540	3.410	3.290	3.200	3.110	3.026

$$h(t) = h_0 + \frac{4}{\pi} H e^{-At} \left(e^{-Dt} - \frac{1}{3} e^{-9Dt} + \frac{1}{5} e^{-25Dt} - \frac{1}{7} e^{-49Dt} \right) \quad (34)$$

下面举一实例, 各原始数据见图 4, 计算结果见表 1. 计算时, 对有蒸发情况是按式

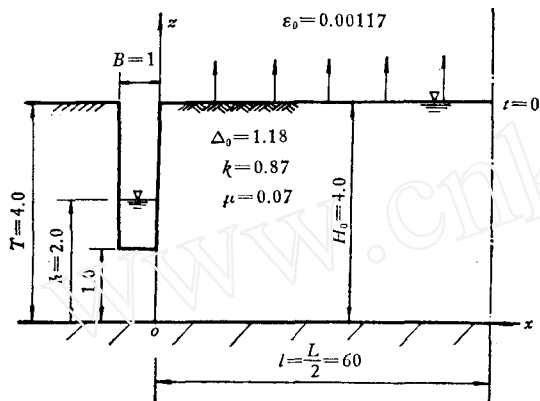


图 4

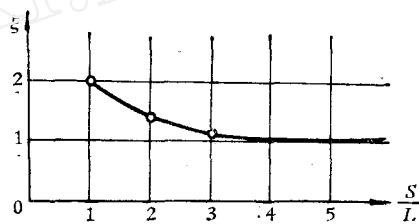


图 5

(32) 取三项级数计算的. 对无蒸发情况是按式 (34) 令 $A = 0$ 后取三项级数计算的. 只有 $t = 4$ 天时均取四项级数计算.

若在式 (30) 中设排水沟纵横沟距之比 $\sigma = S/L$, 可得沟距公式为

$$L = \sqrt{\pi^2 a^2 t \left(\frac{\sigma^2 + 1}{\sigma^2} \right) / \left\{ \ln \frac{16H}{\pi^2 [h(t) - h_0]} - At \right\}} \quad (35)$$

此式是按二维流动求得的, 若按一维流动则得沟距

$$L = \sqrt{\pi^2 a^2 t / \left\{ \ln \frac{4H}{\pi [h(t) - h_0]} - At \right\}} \quad (36)$$

计算表明, 作正方形布置的农田 ($\sigma = 1$) 是典型的二维问题, 按式 (35) 求得的沟距要比现有其他公式按一维流动求得的沟距可放宽 $\sqrt{2}$ 倍, 这就可以大大少挖耕地¹⁾.

下面我们来研究一维流动与二维流动的界限. 令式 (30) 中 $A = 0$, 有 $h(t) = h_0 + (16/\pi^2) H e^{-(D+F)t}$. 分析此式可知, 区分流动状态的界限, 主要体现在 $(D + F)$ 之中. 当田块为正方形时 $S = L$, 得到典型二维流动, 此时 $R_2 = D + F = (\pi a/L)^2 + (\pi a/S)^2 = 2(\pi a/L)^2$. 若为一维流动, 则有 $R_1 = (\pi a/L)^2$. 今设

$$\xi = \left[\left(\frac{\pi a}{L} \right)^2 + \left(\frac{\pi a}{S} \right)^2 \right] / \left(\frac{\pi a}{L} \right)^2 = \left[\frac{1}{L^2} + \frac{1}{S^2} \right] / \frac{1}{L^2} \quad (37)$$

由上式可知, 二维流动时 $\xi = 2$, 一维流动时, $\xi = 1$, 由此可知 $\xi = 1 \sim 2$. 今若不断加大一边, 而保持另一沟距不变, 则有图 5 所示的变化. 由图可知, 大约在 $\sigma = (S/L) \geq 3$ 以后, $\xi \rightarrow 1$, 此即说明在当 $(S/L) \geq 3$ 以后, 地下水流动可视为一维问题, 而在 $(S/L) < 3$ 时, 则必须按二维问题处理. 其实若在式 (35) 中, $\sigma \geq 3$ 后, 表示二维流动的

1) 式 (35) 和 (36) 中, σ 为田块长宽比, 由生产单位定出; 求得 L 后, 则另一边沟距 $S = \sigma L$; h_0 为沟水位, $h_{cp} = (H_0 + h_0)/2$, H_0 为 $t = 0$ 时沟距中点地下水位; $a^2 = k h_{cp} \alpha / \mu$; 近似取 $\alpha = 1$; $h(t)$ 为沟距中点地下水位在经历 t 时间后要求达到的高程; $H = H_0 - h_0$, $A = \epsilon_0 / (\Delta_0 \mu)$.

式(35)也可转化为表示一维流动的式(36)[同时 $(16/\pi^2) \rightarrow (4/\pi)$].

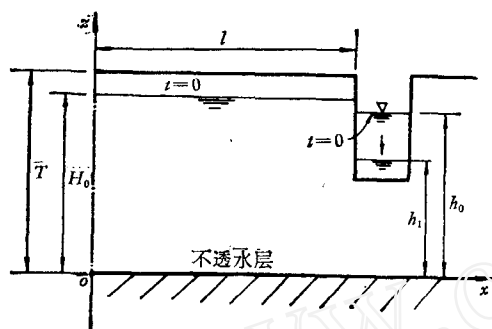


图 6

在某些情况下, 沟水位不是常值 h_0 而是按指数规律变化(图 6). 边界条件为

$$h(0, t) = h_1 + (h_0 - h_1)e^{-bt} \quad (38)$$

式中 b 为下降速度指数, $h(0, t)$ 为任意时刻的沟水位, h_0 为 $t=0$ 运动开始时的沟水位, h_1 为下降終了后的沟水位. 一般江河排水沟水位下降规律, 总是初期下降快, 后期下降慢, 及至某一水位 h_1 后基本不变. 对于某一具体工程, 可由实测资料绘制沟水位过程线 $h-t$. 自一次降水后, 测得

沟水位最大值 h_0 (将此时定为 $t=0$), 然后经历某一时期一直测到最终下降水位 h_1 . 于是可由式(38)求得

$$b = \ln \left[\frac{h_0 - h_1}{h(0, t) - h_1} \right] / t \quad (39)$$

现在我们列出下列方程组:

$$h_t = a^2 h_{xx} - Ah + AT - (\varepsilon_0/\mu) \quad (40)$$

$$\left. \begin{aligned} h(0, t) &= h_1 + (h_0 - h_1)e^{-bt} \\ h_x(l, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (t \geq 0) \quad (41)$$

$$h(x, 0) = H_0 \quad (0 < x < L) \quad (42)$$

解上述方程组即得本问题的解

$$\begin{aligned} h(x, t) &= h_1 + (h_0 - h_1)e^{-bt} - \frac{4}{\pi} (Ah_1 + B)e^{-At} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{At} - e^{-ct}}{A + c} \frac{\sin Kx}{2m + 1} \\ &+ \frac{4}{\pi} He^{-At} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-ct} \frac{\sin Kx}{2m + 1} - \frac{4}{\pi} (A - b)(h_0 - h_1)e^{-At} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{(A-b)t} - e^{-ct}}{(A - b) + c} \frac{\sin Kx}{2m + 1} \end{aligned} \quad (43)$$

令 $x = l$, 则得沟距中点地下水位随时间的变化规律:

$$\begin{aligned} h(t) &= h_1 + (h_0 - h_1)e^{-bt} - \frac{4}{\pi} (Ah_1 + B)e^{-At} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{At} - e^{-ct}}{A + c} \frac{(-1)^m}{2m + 1} \\ &+ \frac{4}{\pi} He^{-At} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-ct} \frac{(-1)^m}{2m + 1} - \frac{4}{\pi} (A - b) \\ &\cdot (h_0 - h_1)e^{-At} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{(A-b)t} - e^{-ct}}{(A - b) + c} \frac{(-1)^m}{2m + 1} \end{aligned} \quad (44)$$

若令 $b = 0$, 则式(43)表示沟水位不作式(38)的变化, 即 $t=0$ 一开始, 沟水位就在 h_0 不变. 于是得到与文献[3]相同的结果

$$h(x, t) = h_0 - \frac{4}{\pi} e^{-At} \sum_{m=0}^{\infty} \left[(Ah_0 + B) \left(\frac{e^{At} - e^{-ct}}{A + c} \right) - He^{-ct} \right] \frac{\sin Kx}{2m + 1} \quad (45)$$

此结果即式(31)。同前一样,也可将式(43),(44)作简化并取少量级数进行近似计算。

参 考 文 献

- [1] B. И. 阿拉文, C. H. 努米罗夫, 滤流理论, 高等教育出版社(1957).
- [2] 瞿兴业, 水利学报, 6(1962).
- [3] 沙金焯, 蒸发作用下的明沟排水, 江苏省力学学会第一届年会 (1964).

TWO-DIMENSIONAL UNSTEADY FLOW OF GROUNDWATER AT THE HORIZONTAL PLANE

Sha Jin-xuan

(*Nanjing Hydraulic Engineering Research Institute*)