

扭转圆柱体放射状内裂缝的应力强度因子*

北京大学 郭仲衡

文献[1]用正弦级数解和 Mellin 积分解的迭加方法讨论过有外裂缝的圆柱体扭转. 本文讨论有放射状内裂缝的圆柱体扭转, 用正交变换将 π/n 扇形区域变为半圆后, 用迭加方法通过依次解三节积分方程和 Cauchy 核奇性积分方程, 把问题归结为连续核第二类 Fredholm 积分方程, 从而使问题在数学上得到解决. 给出了抗扭刚度和应力强度因子的表达式.

1. 扭转问题的弹性力学关系式 在 z 轴平行于柱体轴线的圆柱坐标系 $\{r, \theta, z\}$ 里, 若用翘曲函数 $\varphi(r, \theta)$, 则不为零的位移分量 u_θ , u_z 和应力分量 $\sigma_{\theta z}$, σ_{zr} 以及抗扭刚度 D 分别是:

$$u_\theta = \alpha r z, u_z = \alpha \varphi(r, \theta) \quad (1.1)$$

$$\sigma_{\theta z} = \frac{\alpha \mu}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + r^2 \right), \quad \sigma_{zr} = \alpha \mu \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (1.2)$$

$$D = \frac{M}{\alpha \mu} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + r^2 \right) d\Omega \quad (1.3)$$

其中 α 是扭率, μ 是剪切模量, M 是扭矩. 翘曲函数在柱体截面区域 Ω 内是调和函数, 在边界 Γ 上满足 $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial r^2}{\partial s}$, 这里 s 是边界 Γ 弧长参量, 其正向使区域 Ω 在左边, ν 代表外法向.

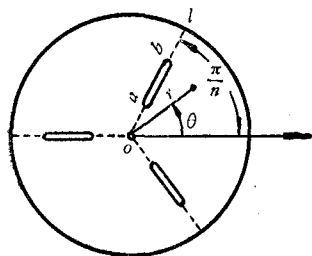


图 1

2. 问题的提法和正交变换 讨论半径为 l 的圆柱体, 内有等分的 n 个相同的贯穿性径向放射状裂缝如图 1. 裂缝端点到圆心的距离分别为 a, b . 根据截面的对称性, 问题归结为调和函数 φ 在 π/n 扇形区域 ($0 \leq r \leq l, 0 \leq \theta \leq \pi/n$) 的混合边值问题. 若在 $r = 0$ 附近要求 $\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, r \frac{\partial \varphi}{\partial r}$

具有阶 $O(r)$, 则在圆心的物理条件“ $u_z = 0$ 和 $\sigma_{\theta z}, \sigma_{zr}$ 有界”可得满足. 此外, 在边界上 φ 还应满足:

$$\varphi(r, 0) = 0, \quad 0 < r < l \quad (2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi(r, \pi/n) &= 0, & 0 < r < a \text{ 或 } b < r < l \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \left(r, \frac{\pi}{n} \right) &= -r^2, & a < r < b \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r}(l, \theta) = 0, \quad 0 < \theta < \pi/n \quad (2.3)$$

* 1977 年 10 月 24 日收到.

进行正交变换 $R = r^n$, $\Theta = n\theta$, 并记 $A = a^n$, $B = b^n$, $L = l^n$, 将 π/n 扇形区域变为上半圆 ($0 \leq R \leq L$, $0 \leq \Theta \leq \pi$). 对于新变量, 翘曲函数记为 $\varphi^*(R, \Theta) = \varphi[r(R), \theta(\Theta)]$, 它在上半圆内仍是调和函数, 在边界上满足:

$$\varphi^*(R, 0) = 0, \quad 0 < R < L \quad (2.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi^*(R, \pi) &= 0, \quad 0 < R < A \text{ 或 } B < R < L \\ \frac{\partial \varphi^*}{\partial \Theta}(R, \pi) &= -\frac{1}{n} R^{\frac{2}{n}}, \quad A < R < B \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial R}(L, \Theta) = 0, \quad 0 < \Theta < \pi \quad (2.6)$$

在 $R = 0$ 附近, φ^* , $\partial \varphi^* / \partial \Theta$, $R(\partial \varphi^* / \partial R)$ 应有阶 $O(R^{\frac{1}{n}})$.

3. 问题的三节积分方程 今后将应用 Mellin 变换, 现以 $\varphi^*(R, \Theta)$ 及其 Mellin 变换 $\Phi^*(s, \Theta)$ 为例说明符号:

$$\left. \begin{aligned} \Phi^*(s, \Theta) &= \mathfrak{M}[\varphi^*(R, \Theta); s] \equiv \int_0^\infty \varphi^*(R, \Theta) R^{s-1} dR \\ \varphi^*(R, \Theta) &= \mathfrak{M}^{-1}[\Phi^*(s, \Theta); R] \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi^*(s, \Theta) R^{-s} ds \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

其中 $c = \text{Re}(s)$ 满足

$$-1/n < c < 0 \quad (3.2)$$

考虑满足 (2.4) 及 $R = 0$ 附近条件的调和函数:

$$\varphi^*(R, \Theta) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k R^k \sin k\Theta + \mathfrak{M}^{-1} \left[\frac{\Psi(s)}{s \sin s\pi} \sin s\Theta; R \right] \quad (3.3)$$

其中 $\{A_k\}$ 是待定数列, $\Psi(s)$ 是复参数 s 的待定函数. (3.3) 使 (2.5) 变为

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}^{-1}[\Psi(s)/s; R] &= 0, \quad 0 < R < A \text{ 或 } B < R < L \\ \mathfrak{M}^{-1}[\text{ctg}(s\pi)\Psi(s); R] &= -\frac{1}{n} R^{\frac{2}{n}} - p(R), \quad A < R < B \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

其中

$$p(R) = \sum_{k=1}^{\infty} k A_k (-R)^k \quad (3.5)$$

而 (2.6) 则变为

$$\sum_{k=1}^{\infty} k A_k L^k \sin k\Theta = \mathfrak{M}^{-1} \left[\frac{\Psi(s)}{\sin s\pi} \sin s\Theta; L \right], \quad 0 < \Theta < \pi \quad (3.6)$$

根据 Fourier 级数展开定理, $\{A_k\}$ 可用 $\Psi(s)$ 表达:

$$A_k = \frac{2}{\pi} L^{-k} \mathfrak{M}^{-1} \left[\frac{(-1)^k}{s^2 - k^2} \Psi(s); L \right] \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.7)$$

代入 (3.5), 得

$$p(R) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{L} \right)^k \mathfrak{M}^{-1} \left[\frac{k}{s^2 - k^2} \Psi(s); L \right] \quad (3.8)$$

于是问题归结为从三节积分方程 (3.4) 求 $\Psi(s)$.

4. 第二类 Fredholm 积分方程 为解积分方程 (3.4), 以 [1] 为启发, 令 $\Psi(s)$ 的

Mellin 逆变换 $\phi(R)$ 为

$$\mathfrak{M}^{-1}[\Psi(s); R] = \phi(R) = \begin{cases} 0, & 0 < R < A \text{ 或 } B < R < \infty \\ Rf(R), & A < R < B \end{cases} \quad (4.1)$$

其中 $f(R)$ 是在 $[A, B]$ 并满足附加条件

$$\int_A^B f(R) dR = 0 \quad (4.2)$$

的新的待定函数。从而有

$$\Psi(s) = \mathfrak{M}[\phi(R); s] = \int_A^B f(R) R^s dR \quad (4.3)$$

考虑到 (4.2) 及¹⁾

$$\mathfrak{M}[-H(R-1); s] = \frac{1}{s}, \quad \mathfrak{M}\left[\frac{1}{\pi} \frac{R^s}{1-R}; s\right] = \operatorname{ctg} s\pi \quad (4.4)$$

应用 Mellin 变换的卷积定理^[7]

$$\mathfrak{M}^{-1}[\Xi(s)\Psi(s); R] = \int_0^\infty \xi\left(\frac{R}{u}\right) \frac{\phi(u)}{u} du \quad (4.5)$$

其中 $\Xi(s) = \mathfrak{M}[\xi(R); s]$, 并作为 $\Xi(s)$ 依次取 $1/s$ 和 $\operatorname{ctg} s\pi$, 容易验证 (3.4)₁ 自然满足, 而 (3.4)₂ 变为

$$\frac{1}{\pi} \int_A^B \frac{f(t) dt}{t-R} = -\frac{1}{n} R^{\frac{2}{n}-1} - R^{-1} p(R), \quad A < R < B. \quad (4.6)$$

暂把右端作为已知, 用 Cauchy 型积分的反演理论^[3]解方程 (4.6), 取两端为无界 (可积) 的解, 并考虑到 (4.2), 得

$$f(t) = \frac{1}{\pi \sqrt{(B-t)(t-A)}} \int_A^B \frac{\sqrt{(B-\tau)(\tau-A)}}{\tau-t} \left[\frac{\tau^{\frac{2}{n}-1}}{n} + \frac{p(\tau)}{\tau} \right] d\tau \quad (4.7)$$

将

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^{-1}\left[\frac{k}{s^2-k^2} \Psi(s); L\right] &= \int_A^B f(R) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{k}{s^2-k^2} \left(\frac{L}{R}\right)^{-s} ds \right] dR \\ &= -\frac{1}{2} \int_A^B f(R) \left(\frac{R}{L}\right)^k dR \end{aligned} \quad (4.8)$$

代入 (3.8), 得

$$p(\tau) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{L}\right)^k \mathfrak{M}^{-1}\left[\frac{k}{s^2-k^2} \Psi(s); L\right] = -\frac{\tau}{\pi} \int_A^B \frac{Rf(R) dR}{L^2 - \tau R} \quad (4.9)$$

令 $F(t) = \pi \sqrt{(B-t)(t-A)} f(t)$, 并将 (4.9) 代入 (4.7), 得

$$F(t) + \int_A^B \frac{K(t, R) F(R)}{\sqrt{(B-R)(R-A)}} dR = G(t, n) \quad (4.10)$$

其中

$$K(t, R) = \frac{R}{\pi^2} \int_A^B \frac{\sqrt{(B-\tau)(\tau-A)} d\tau}{(\tau-t)(L^2 - \tau R)} = \frac{1}{\pi} \left[1 - \frac{\sqrt{(L^2 - AR)(L^2 - BR)}}{L^2 - tR} \right] \quad (4.11)$$

1) $H(x)$ 是 Heaviside 函数, 积分的 Cauchy 主值仍用通常积分符号表示, 并应注意 (3.2).

$$G(t, n) = \frac{1}{n} \int_A^B \frac{\sqrt{(B-\tau)(\tau-A)}}{\tau-t} \tau^{\frac{2}{n}-1} d\tau \quad (4.12)$$

不难证明, $K(t, R)$ 在 $A \leq t, R \leq B$ 和 $G(t, n)$ 在 $[A, B]$ 均为连续函数. 考虑到进行变量代换 $R = [(A+B) + (B-A)\cos\beta]/2$ 时, 在 (4.10) 的积分中有

$$dR/(\sqrt{(B-R)(R-A)}) = -d\beta$$

事情就变得很明显, (4.10) 是具有连续解 $F(t)$ 的第二类 Fredholm 积分方程. 对于 $n=1, 2$, 自由项 $G(t, n)$ 可以直接积分得

$$G(t, 1) = \pi[(B-A)^2 + 4(B+A)t - 8t^2]/8, \quad t \in [A, B] \quad (4.13)$$

$$G(t, 2) = \pi(B+A-2t)/4, \quad t \in [A, B] \quad (4.14)$$

5. 抗扭刚度和应力强度因子 将抗扭刚度分成两部分: $D = I_0 + D_0$, 其中

$$I_0 = \int_{\Omega} r^2 dQ = \frac{\pi}{2} l^3 \quad (5.1)$$

$$D_0 = \iint_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} r d\theta dr = 2n \int_0^l \varphi\left(r, \frac{\pi}{n}\right) r dr \quad (5.2)$$

将

$$\begin{aligned} \varphi\left(r, \frac{\pi}{n}\right) &= \varphi^*(R, \pi) = \mathfrak{M}^{-1}\left[\frac{1}{s} \Psi(s); R\right] \\ &= \begin{cases} 0, & 0 < R < A \text{ 或 } B < R < L \\ -\int_A^R f(u) du, & A < R < B \end{cases} \end{aligned} \quad (5.3)$$

代入, 得

$$D_0 = n \int_A^B f(R) R^{\frac{2}{n}} dR = \frac{n}{\pi} \int_A^B \frac{F(R) R^{\frac{2}{n}} dR}{\sqrt{(B-R)(R-A)}} \quad (5.4)$$

根据 (1.2), 在 $\{\theta = \pi/n, r \in [a, b]\} \cap \sigma_{\theta z}$ 在裂缝前沿的无界部分属于

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\left(r, \frac{\pi}{n}\right) = n \frac{\partial \varphi^*}{\partial \theta}(R, \pi) = np(R) + n \mathfrak{M}^{-1}[\text{ctg}(s\pi)\Psi(s); R] \quad (5.5)$$

将 (4.7) 代入 (5.5) 的第二项, 得

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^{-1}[\text{ctg}(s\pi)\Psi(s); R] &= \frac{R}{\pi} \int_A^B \frac{f(t) dt}{t-R} \\ &= -\frac{R}{\pi} \frac{\text{sgn}(A-R)}{\sqrt{(B-R)(A-R)}} \int_A^B \frac{\sqrt{(B-\tau)(\tau-A)}}{R-\tau} \left[\frac{\tau^{\frac{2}{n}-1}}{n} + \frac{p(\tau)}{\tau} \right] d\tau \end{aligned} \quad (5.6)$$

将 (4.9, 10) 代入 (5.6) 及 (5.5), 交换积分次序, 得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\left(r, \frac{\pi}{n}\right) = \frac{nR}{\pi} \frac{\text{sgn}(A-R)}{\sqrt{(B-R)(A-R)}} [G(R, n) + Q(R)] \quad (5.7)$$

其中

$$Q(R) = \frac{1}{\pi} \int_A^B \frac{\sqrt{(L^2 - At)(L^2 - Bt)} F(t) dt}{(L^2 - Rt)\sqrt{(B-t)(t-A)}} \quad (5.8)$$

对于 $n=1, 2, G(R, n)(R \in [A, B])$ 可直接积分得

$$G(R, 1) = \frac{\pi}{8} [(B-A)^2 + 4(B+A)R - 8R^2] - \pi \operatorname{sgn}(A-R) R \sqrt{(B-R)(A-R)} \quad (5.9)$$

$$G(R, 2) = \frac{\pi}{4} (B+A-2R) - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(A-R) \sqrt{(B-R)(A-R)} \quad (5.10)$$

由 (1.2) 和 (5.7), 得 a, b 点的应力强度因子:

$$\mathcal{K}_a = \lim_{r \rightarrow a+0} \sqrt{2(a-r)} \sigma_{\theta z} \left(r, \frac{\pi}{n} \right)_{r < a} = \frac{M}{\pi D} \sqrt{\frac{2nA}{a(B-A)}} [G(A, n) + Q(A)] \quad (5.11)$$

$$\mathcal{K}_b = \lim_{r \rightarrow b+0} \sqrt{2(r-b)} \sigma_{\theta z} \left(r, \frac{\pi}{n} \right)_{r > b} = -\frac{M}{\pi D} \sqrt{\frac{2nB}{b(B-A)}} [G(B, n) + Q(B)] \quad (5.12)$$

其中

$$G(A, n) = \frac{1}{n} \int_A^B \sqrt{\frac{B-\tau}{\tau-A}} \tau^{\frac{2}{n}-1} d\tau, \quad G(B, n) = -\frac{1}{n} \int_A^B \sqrt{\frac{\tau-A}{B-\tau}} \tau^{\frac{2}{n}-1} d\tau \quad (5.13)$$

$$Q(A) = \frac{1}{\pi} \int_A^B \sqrt{\frac{L^2-Bt}{L^2-At}} \frac{F(t) dt}{\sqrt{(B-t)(t-A)}},$$

$$Q(B) = \frac{1}{\pi} \int_A^B \sqrt{\frac{L^2-At}{L^2-Bt}} \frac{F(t) dt}{\sqrt{(B-t)(t-A)}} \quad (5.14)$$

对于情形 $n=1, 2$, 我们有

$$G(A, 1) = \pi(B-A)(3A+B)/8, \quad G(B, 1) = -\pi(B-A)(A+3B)/8 \quad (5.15)$$

$$G(A, 2) = \pi(B-A)/4, \quad G(B, 2) = -\pi(B-A)/4 \quad (5.16)$$

从 (5.4, 8) 可以看出, 只要从 (4.10) 解出 $F(t)$, 就可求得抗扭刚度和应力强度因子。至此, 从数学分析的角度, 问题已得到全部解决。对于具体的 n, a, b, l , 要取得数值结果, 和一般的第二类 Fredholm 积分方程一样, 是需要进行数值计算的, 但这已纯属计算问题, 这里就不涉及了。

参 考 文 献

- [1] Tweed, J., Rooke, D. P., *Int. J. Engng. Sci.*, **10** (1972), 801-812.
- [2] Sneddon, I. N., *Fourier Transforms*, McGraw-Hill (1951).
- [3] Гахов, Ф. Д., *Краевые Задачи*, Физматгиз (1963).

THE STREE INTENSITY FACTOR OF TWISTED CIRCULAR CYLINDER WITH RADIATING INTERNAL CRACKS

Guo Zhong-heng
(Beijing University)