偏操纵面机翼的定常亚声速核函数配置法*

南京航空学院　陈劲松

提要　本文分析了偏操纵面机翼的定常亚声速升力分布函数的形式，讨论了线性积分方程核奇性和升力分布函数奇性的处理方法，最后给出了积分方程的数值解．本文方法可用于计算单独的和偏有部分或全翼展前后缘操纵面的机翼的升力分布，数值结果与实验数据符合得很好，与其他理论值有相同的精确度．与格网法相比，本法所需的计算机存贮量小，节省时间，可在小型计算机上完成数值计算．

一、前　言

目前对升力面线性积分方程进行数值解法有格网法和核函数法两大类．格网法[1,2]的优点在于不需事先假定升力分布函数的型式，因此在原则上对偏有操纵面问题的计算不存在困难，但要得到一定的计算精度，网格的数目要比较多，这样确定影响系数的线性代数方程组的阶次较高．核函数法的优点在于配置点的数目可以很少，因此求解待定系数的方程组阶次较低．但是它的困难在于事先必须选择好与边界条件和边缘条件相一致的升力分布函数．文[3]利用渐近展开法研究了操纵面作谐振时，对其前后缘和隅角处的压力振幅特性，给出了"操纵面升力分布型式"，从而使利用核函数法求解操纵面问题成为可能．

利用核函数法解操纵面问题有两种不同的处理方法．其中之一是将渐近展开法得到的操纵面升力分布直接代入积分方程，求得由此分布在翼面(包括操纵面)的配置点处所诱导的下洗速度．将此配置点处的实际下洗速度减去此诱导速度后，获得当量下洗速度．这样就可将偏操纵面的翼面仍看作不偏的，利用核函数法求解满足此当量下洗速度的升力分布．将此分布与上述操纵面升力分布相叠加，就获得由于操纵面作谐振的升力分布．这样的方法称为当量下洗速度核函数配置法[4-6]．

对当量下洗速度核函数配置法，为获得稳定解，配置点数目要求较多、另外要选择一个操纵面升力分布的展向因子，使它满足平面形边缘条件而又能使展向载荷的二阶导数连续也比较困难．在本工作于 1973 年 8 月完成后不久，看到文[6]在这一方面作了些工作，一些问题得到了解决，但数值积分时要将积分域分成许多小区域，还不能象操纵面核函数法那样采用较少的配置点和积分点的技巧．因此本文采用操纵面核函数配置法来确定偏有操纵面的升力分布．限于篇幅，本文仅给出定常流的结果．

二、基 本 方 程

定常亚声速升力面理论的基本方程为

* 1974 年 2 月 11 日收到．

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$w(x, y) = \frac{1}{4\rho U_\infty \pi} \iint_{S_w} \Delta P(\xi, \eta) K(x - \xi, y - \eta, M_\infty) d\xi d\eta \tag{1}$$

式中 w 为翼面上的下洗分布函数；ρ 和 U_∞ 为来流密度和速度；ΔP 为翼面上升力分布函数，为一待定量；$K = -\frac{1}{(y-\eta)^2} \cdot \left[1 + \frac{x - \xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2(y-\eta)^2}}\right]$ 为核函数；M_∞ 为来流马赫数，$\beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}$.

根据图 1，将方程(1)进行坐标变换，最后利用两翼梢处 ΔP 为零的条件，得

$$W(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{S_0} \int_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial \underline{\eta}} \left\{ \int_{-1}^{1} \Delta P(\underline{\xi}, \underline{\eta}) \left[1 + \frac{\bar{x} - \bar{\xi}}{R}\right] b(\underline{\eta}) d\underline{\xi} \right\} \frac{d\underline{\eta}}{\underline{y} - \underline{\eta}} \tag{2}$$

式中 $W = 4\pi\rho U_\infty w(\bar{x}, \bar{y})$，$R = \sqrt{(\bar{x} - \bar{\xi})^2 + \beta^2(\bar{y} - \bar{\eta})^2}$，以上无量纲坐标分别为

$$\left.\begin{aligned} &\bar{x}, \bar{y}; \bar{\xi}, \bar{\eta} = \left(\frac{x}{b_0}\right), \left(\frac{y}{b_0}\right); \left(\frac{\xi}{b_0}\right), \left(\frac{\eta}{b_0}\right) \\ &\underline{x}, \underline{y}; \underline{\xi}, \underline{\eta} = \left(\frac{x - x_m(y)}{b(y)}\right), \left(\frac{y}{S_0}\right); \left(\frac{\xi - \xi_m(\eta)}{b(\eta)}\right), \left(\frac{\eta}{S_0}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

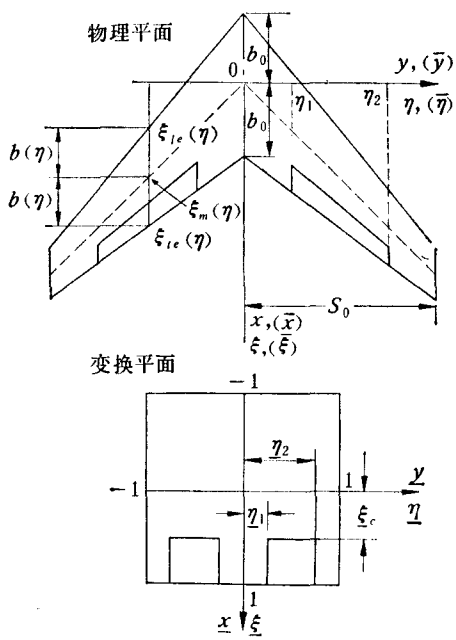

图 1　机翼的物理平面和变换平面

其他符号意义见图 1.

为获得足够准确的收敛解和压缩所需机器的存贮量，缩短计算时间，在求解积分方程(2)之前，必须首先选择适当的升力分布函数，寻找下洗点和积分点的最佳位置，使用稳定的和有效的数值积分技术.

三、升力分布函数形式的选择

根据线化理论，升力分布可分解为两部分：偏角为零时由迎角产生的正规部分 ΔP_R

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

和迎角为零时由偏角产生的附加部分 ΔP_{CSR}，即

$$\Delta P(\xi, \eta) = \Delta P_R(\xi, \eta) + \Delta P_{CSR}(\xi, \eta) \tag{3}$$

函数 ΔP_R 在翼面上要求为连续的；在机翼的前缘处应具有反平方根奇性；在后缘处要满足库塔-儒可夫斯基条件；在左右侧缘以平方根方式趋于零．因此 ΔP_R 的弦向可选用薄翼型的精确解的前几项，展向采用细长机翼椭圆分布解[7,8]

$$\Delta P_R(\xi, \eta) = \frac{4\rho U_\infty^2}{b(\eta)} S_0\sqrt{1-\eta^2}\left[g_0(\eta)\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} + g_1(\eta)(1-\xi^2)^{1/2} + g_2(\eta)(1-\xi^2)^{1/2}\xi + \cdots\right] \tag{4}$$

式中

$$g_n(\eta) = a_{n0}U_0(\eta) + a_{n1}U_1(\eta) + a_{n2}U_2(\eta) + \cdots (n = 0, 1, \cdots, N) \tag{5}$$

$(N+1)$为升力分布函数的弦向项数目；$U_m(\eta)$ 为第二类切比雪夫多项式($m = 0, 1, \cdots, M$)；$(M+1)$为展向项数目；a_{nm} 为待定系数，由满足边界条件的要求确定之．从式(4)不难看出 ΔP_R 确实有正确的边缘性质．

偏操纵面(转轴在其前缘)的零迎角薄翼型的附加升力分布为[9]

$$\Delta p_{CSR}(\xi) = \Delta p_{CS}(\xi) + \Delta p_R(\xi)$$
$$\propto\left[\ln\left|\frac{1-\xi\xi_C+\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1-\xi_C^2}}{\xi-\xi_C}\right| + \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}\cos^{-1}\xi_C\right]$$

式中 Δp_{CS} 称为操纵面升力分布函数，它与对数项成正比；Δp_R 称为正规的升力分布函数．类似地，偏操纵面零迎角机翼的附加升力分布函数亦由两部分组成，ΔP_R 的型式与式(4)相似，ΔP_{CS} 系根据文[3]提供的型式结合上述翼型的对数项的解可表为[7]

$$\Delta P_{CS}(\xi, \eta) = \frac{4\rho U_\infty^2}{b(\eta)} S_0\sqrt{1-\eta^2}\,[g_0(\eta) + g_1(\eta)(1+\xi) + \cdots]\varphi_{CS}(\xi, \eta) \tag{6a}$$

式中

$$\varphi_{CS}(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{ICS}\ln\left|\frac{\{[1-\xi\xi_{Cn}+(1-\xi^2)^{1/2}(1-\xi_{Cn}^2)^{1/2}]^2+E_n^2\}^{1/2}-E_n}{[(\xi-\xi_{Cn})^2+E_n^2]^{1/2}-E_n}\right| \tag{6b}$$

$$E_n = \begin{cases}\beta^2(\eta-\eta_{1n})(\eta_{2n}-\eta), & \eta \geqslant 0\\ -\beta^2(\eta+\eta_{1n})(\eta_{2n}+\eta), & \eta < 0\end{cases} \tag{6c}$$

综合上述，偏操纵面零迎角机翼的附加升力分布函数为

$$\Delta P_{CSR}(\xi, \eta) = \frac{4\rho U_\infty^2}{b(\eta)} S_0\sqrt{1-\eta^2}\,\{[g_0(\eta) + g_1(\eta)(1+\xi) + \cdots]\varphi_{CS}(\xi, \eta)$$
$$+ [g_{JC}(\eta)\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{1/2} + g_{(JC+1)}(\eta)(1-\xi^2)^{1/2} + g_{(JC+2)}(\eta)(1-\xi^2)^{1/2}\xi + \cdots]\} \tag{7}$$

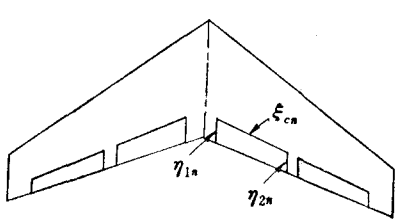

图 2 机翼上操纵面示意图

式(6a)至(7)中，ICS 为右半翼上同时偏的操纵面个数；ξ_{Cn}，η_{1n} 和 η_{2n} 的意义见图 2 所示；JC 为 ΔP_{CS} 的弦向项数目．对于同时偏转前后缘操纵面的情况，$JC = 2$，否则 $JC = 1$．ΔP_R 的弦向项至少取两项．由式(6)不难验证 ΔP_{CS} 具有文[3]所指出的在机翼前后缘为零，在操纵面侧缘为有限值，在操纵面前缘有对数奇性，在操纵面外的

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

翼面上为连续的性质.

四、下洗点、积分点的最佳位置及数值积分技术

可以证明，要使低速薄翼型的升力和机翼的总升力的近似值分别与各自的精确值的误差最小，弦向下洗点和展向下洗弦应分别为[10]

$$\underline{x}_i = -\cos\left(\frac{2i\pi}{2I+1}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, I) \tag{8}$$

$$\underline{y}_r = \cos\left(\frac{r\pi}{2R'+1}\right) \quad (r = 1, 2, \cdots, R') \tag{9}$$

式中 I 为每弦下洗点数目；R' 为右半翼上下洗弦数目. 根据不同的翼面形状和 M_∞，可按文[7]获得 R'/I 的最佳比值.

由式(4)和(7)所示的函数形式，要使式(2)的弦向数值积分的精确度最高，可采用以 $\sqrt{(1-\underline{\xi})/(1+\underline{\xi})}$ 为权的 Gauss-Mehler 求积公式

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\underline{\xi}}{1+\underline{\xi}}}\, f(\underline{\xi})d\underline{\xi} \approx \sum_{j=1}^{J} H_j f(\underline{\xi}_j) \tag{10a}$$

式中 J 为每弦积分点数目. 积分点和权系数分别为

$$\left.\begin{aligned} \underline{\xi}_j &= -\cos\left[\frac{2j-1}{2J+1}\pi\right] \quad (j = 1, 2, \cdots, J) \\ H_j &= \frac{2\pi}{2J+1}(1-\underline{\xi}_j) \end{aligned}\right\} \tag{10b}$$

如果 $f(\underline{\xi})$ 为阶次不高于$(2J-1)$次的多项式，则式(10a)为精确值.

将式(4)[或式(7)]代入式(2)，得到展向积分的一般式

$$I(\underline{y}) = \int_{-1}^{1}\frac{\partial}{\partial\underline{\eta}}[\sqrt{1-\underline{\eta}^2}\,G(\underline{y},\underline{\eta})]\frac{1}{\underline{y}-\underline{\eta}}d\underline{\eta} \tag{11}$$

$G(\underline{y},\underline{\eta})$是式(2)的弦向积分部分，假定它是 $\underline{\eta}$ 的解析函数. 由于不能对式(11)直接进行数值积分，故先将 $G(\underline{y},\underline{\eta})$ 展成台劳级数，然后进行分部积分可得

$$I(\underline{y}) \approx -\sum_{s=1}^{S} H_s\left\{\frac{(1-\underline{\eta}_s^2)[G(\underline{y},\underline{\eta}_s)-G(\underline{y},\underline{y})]}{(\underline{y}-\underline{\eta}_s)^2} + \frac{(1-\underline{y}^2)G'(\underline{y},\underline{y})}{\underline{y}-\underline{\eta}_s}\right\} + \pi G(\underline{y},\underline{y}) \tag{12a}$$

式中 S 为全翼的积分弦数目；$\underline{\eta}_s$ 和 H_s 分别为以 $1/\sqrt{1-\underline{\eta}^2}$ 为权的 Gauss-Mehler 求积公式[11]的积分点和权系数：

$$\left.\begin{aligned} \underline{\eta}_s &= -\cos\left(\frac{2s-1}{2S}\pi\right) \quad (s = 1, 2, \cdots, S) \\ H_s &= \pi/S \end{aligned}\right\} \tag{12b}$$

以下将证明适当地配置下洗弦和积分弦之间的位置，可使式(12a)大为简化.

由于上述积分弦的位置 $\underline{\eta}_1, \cdots, \underline{\eta}_s$ 系 $T_S(\underline{\eta})$ 的零点，故

$$T_S(\underline{\eta}) = 2^{S-1}\prod_{s=1}^{S}(\underline{\eta}-\underline{\eta}_s) \tag{13a}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

作式(13a)的对数导数,得

$$T'_s(\underline{\eta})/T_s(\underline{\eta}) = \sum_{s=1}^{S} \frac{1}{\underline{\eta} - \underline{\eta}_s} \tag{13b}$$

如果令 $2R' + 1 = S$,即以 $\underline{y}_r$ 作为 $T'_s(\underline{\eta})$ 的零点,则 $\underline{\eta}_s$ 与 $\underline{y}_r$ 互成交叉关系,并且由式(13b)有

$$\sum_{s=1}^{S} \frac{1}{\underline{y}_r - \underline{\eta}_s} = 0 \tag{13c}$$

因此,式(12a)简化成

$$I(\underline{y}_r) \approx -\frac{\pi}{S} \sum_{s=1}^{S} \frac{(1-\underline{\eta}_s)^2 G(\underline{y}_r, \underline{\eta}_s)}{(\underline{y}_r - \underline{\eta}_s)^2} + \pi G(\underline{y}_r, \underline{y}_r)\left[1 + \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} \frac{1-\underline{\eta}_s^2}{(\underline{y}_r - \underline{\eta}_s)^2}\right] \tag{13d}$$

以下将证明式(13d)的方括号部分等于 S. 将式(13b)的变量 $\underline{\eta}$ 换成 $\underline{y}$, 然后求导数,得

$$\sum_{s=1}^{S} \frac{1}{(\underline{y} - \underline{\eta}_s)^2} = [T'_s(\underline{y})/T_s(\underline{y})]^2 - T''_s(\underline{y})/T_s(\underline{y}) \tag{13e}$$

根据切比雪夫多项式的性质有

$$(1-\underline{y}^2)T''_s(\underline{y}) - \underline{y}T'_s(\underline{y}) + S^2 T_s(\underline{y}) = 0 \tag{13f}$$

故从式(13e)和(13f)以及 $\underline{y}_r$ 为 $T'_s(\underline{y})$的零点可得

$$\sum_{s=1}^{S} \frac{1}{(\underline{y}_r - \underline{\eta}_s)^2} = \frac{S^2}{(1-\underline{y}_r^2)} \tag{13g}$$

由于$(1-\underline{\eta}_s^2) = (1-\underline{y}_r^2) + 2\underline{y}_r(\underline{y}_r - \underline{\eta}_s) - (\underline{y}_r - \underline{\eta}_s)^2$,因此

$$\sum_{s=1}^{S} \frac{1-\underline{\eta}_s^2}{(\underline{y}_r - \underline{\eta}_s)^2} = (1-\underline{y}_r^2)\sum_{s=1}^{S} \frac{1}{(\underline{y}_r - \underline{\eta}_s)^2} + 2\underline{y}_r \sum_{s=1}^{S} \frac{1}{\underline{y}_r - \underline{\eta}_s} - \sum_{s=1}^{S} 1 \tag{13h}$$

由式(13c), (13g) 和(13h)最后可证得式(13d)方括号部分为 S. 所以数值积分公式(12a)最终简化成[10]

$$I(\underline{y}_r) = \int_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial \underline{\eta}}[\sqrt{1-\underline{\eta}^2}\, G(\underline{y}_r, \underline{\eta})] \frac{1}{\underline{y}_r - \underline{\eta}} d\underline{\eta}$$

$$\approx -\frac{\pi}{S} \sum_{s=1}^{S} \frac{(1-\underline{\eta}_s^2) G(\underline{y}_r, \underline{\eta}_s)}{(\underline{y}_r - \underline{\eta}_s)^2} + \pi S G(\underline{y}_r, \underline{y}_r) \tag{14}$$

如果 $G(\underline{y}, \underline{\eta})$ 为 $\underline{\eta}$ 的$(2S-1)$次或较低次多项式,则方程(14)为精确值.

五、积分方程的积分计算及其解

1. 迎角 $\alpha \neq 0$, 偏角 $\delta = 0$ 情况 将升力分布函数式(4)代入积分方程(2),并使用式(14)得

$$\frac{W_R(\bar{x}, \bar{y}_r)}{4\rho U_\infty^2} = -\frac{\pi}{S} \sum_{s=1}^{S} \frac{(1-\underline{\eta}_s^2) G_R(\underline{y}_r, \underline{\eta}_s)}{(\underline{y}_r - \underline{\eta}_s)^2} + \pi S G_R(\underline{y}_r, \underline{y}_r) \tag{15}$$

式中

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$G_R(\underline{y},\underline{\eta})=\int_{-1}^{1}\phi_R(\underline{\xi},\underline{\eta})\left[1+\frac{\bar{x}-\underline{\xi}}{R}\right]d\underline{\xi} \tag{16}$$

$$\phi_R(\underline{\xi},\underline{\eta})=[g_0(\underline{\eta})+g_1(\underline{\eta})(1+\underline{\xi})+g_2(\underline{\eta})\underline{\xi}(1+\underline{\xi})+\cdots]\sqrt{\frac{1-\underline{\xi}}{1+\underline{\xi}}} \tag{17}$$

式(16)的被积函数沿着 $\bar{\eta}=\bar{y}$ 在 $\xi=\bar{x}$ 处有一突跃，为此将式(16)改写成

$$G_R(\underline{y},\underline{\eta})=\int_{-1}^{1}[\phi_R(\underline{\xi},\underline{\eta})-\phi_R(\underline{\xi},\underline{y})]\left[1+\frac{\bar{x}-\underline{\xi}}{R}\right]d\underline{\xi}$$
$$+\int_{-1}^{1}\phi_R(\underline{\xi},\underline{y})\left[1+\frac{\bar{x}-\underline{\xi}}{R}\right]d\underline{\xi} \tag{18}$$

可见，式(18)的第一个积分的被积函数已消除奇性，可用求积公式(10)求值．后一个被积函数仍存在着突跃，解析积分也有困难，为此将解析函数 $\phi_R(\underline{\xi},\underline{y})$ 展成台劳级数：

$$\phi_R(\underline{\xi},\underline{y})=\phi_R(\underline{x},\underline{y})+(\underline{\xi}-\underline{x})\phi_{R\underline{x}}(\underline{x},\underline{y})+\cdots \tag{19}$$

同时由式(2a)和图 1 可证得

$$(\underline{\xi}-\underline{x})=[b_0/b(\bar{\eta})](\underline{\xi}-\bar{x})+[b_0/b(\bar{\eta})][\bar{x}-\xi_{le}(\bar{\eta})]-(1+\underline{x}) \tag{20}$$

将式(19)和(20)代入式(18)，它的第二个积分就可用解析积分，如果仅取级数的头两项，经整理积分结果为

$$G_R(\underline{y},\underline{\eta})=\frac{2\pi}{2J+1}\sum_{j=1}^{J}[g_0(\underline{\eta})(1-\underline{\xi}_j)+g_1(\underline{\eta})(1-\underline{\xi}_j^2)+\cdots]$$
$$\cdot\left[1+\frac{\bar{x}_i-\underline{\xi}_j}{R_{ij}}\right]+\sum_{p=0}^{1}\phi_{Rp}(\underline{x}_i,\underline{y})\phi_{Rp}(\bar{x}_i,\bar{y},\bar{\eta}) \tag{21}$$

式中

$$\phi_{R0}(\underline{x},\underline{y})=\left(\frac{1-\underline{x}}{1+\underline{x}}\right)^{1/2}[g_0(\underline{y})+g_1(\underline{y})(1+\underline{x})+g_2(\underline{y})\underline{x}(1+\underline{x})+\cdots] \tag{22}$$

$$\phi_{R1}(\underline{x},\underline{y})=\frac{\partial}{\partial\underline{x}}[\phi_{R0}(\underline{x},\underline{y})] \tag{23}$$

$$\phi_{R0}(\bar{x},\bar{y},\bar{\eta})=\left\{H_0(\bar{x},\bar{y},\bar{\eta})-\frac{2\pi}{2J+1}\sum_{j=1}^{J}(1-\underline{\xi}_j^2)^{1/2}\left[1+\frac{\bar{x}-\underline{\xi}_j}{R_j}\right]\right\} \tag{24}$$

$$\phi_{R1}(\bar{x},\bar{y},\bar{\eta})=\left[\frac{b_0(\bar{x}-\xi_{le}(\bar{\eta}))}{b(\bar{\eta})}-(1+\underline{x})\right]\phi_{R0}(\bar{x},\bar{y},\bar{\eta})$$
$$+\frac{b_0}{b(\bar{\eta})}\left\{H_1(\bar{x},\bar{y},\bar{\eta})-\frac{2\pi}{2J+1}\sum_{j=1}^{J}(1-\underline{\xi}_j^2)^{1/2}(\bar{x}-\xi_j)\left[1+\frac{\bar{x}-\underline{\xi}_j}{R_j}\right]\right\} \tag{25}$$

$$H_0(\bar{x},\bar{y},\bar{\eta})=2+\frac{b_0}{b(\bar{\eta})}\{[(\bar{x}-\xi_{le})^2+\beta^2(\bar{y}-\bar{\eta})^2]^{1/2}-[(\xi_{te}-\bar{x})^2+\beta^2(\bar{y}-\bar{\eta})^2]^{1/2}\} \tag{26}$$

$$H_1(\bar{x},\bar{y},\bar{\eta})=-\frac{1}{2}\frac{b_0}{b(\bar{\eta})}\left\{(\bar{x}-\xi_{le})^2-(\xi_{te}-\bar{x})^2+(\bar{x}-\xi_{le})[(\bar{x}-\xi_{le})^2\right.$$
$$+\beta^2(\bar{y}-\bar{\eta})^2]^{1/2}+(\xi_{te}-\bar{x})[(\xi_{te}-\bar{x})^2+\beta^2(\bar{y}-\bar{\eta})^2]^{1/2}-\beta^2(\bar{y}-\bar{\eta})^2$$
$$\left.\ln\left|\frac{[(\bar{x}-\xi_{le})^2+\beta^2(\bar{y}-\bar{\eta})^2]^{1/2}+(\bar{x}-\xi_{le})}{[(\xi_{te}-\bar{x})^2+\beta^2(\bar{y}-\bar{\eta})^2]^{1/2}-(\xi_{te}-\bar{x})}\right|\right\} \tag{27}$$

$$G_R(\underline{y},\underline{y})=\lim_{\underline{\eta}\to\underline{y}}G_R(\underline{y},\underline{\eta}) \tag{28}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

将式(21)和(28)代入式(15),得 $\alpha \neq 0, \delta = 0$ 的下洗分布表达式为

$$\frac{W_R(\bar{x}_i, \bar{y}_r)}{4\rho U_\infty^2} = \frac{-2\pi^2}{S(2J+1)} \sum_{s=1}^{S} \sum_{j=1}^{S} \frac{(1-\underline{\eta}_s^2)}{(\underline{y}_r - \underline{\eta}_s)^2}$$
$$[g_0(\underline{\eta}_s)(1-\underline{\xi}_j) + g_1(\underline{\eta}_s)(1-\underline{\xi}_j^2) + \cdots]$$
$$\cdot \left[1 + \frac{\bar{x}_i - \xi_j}{\sqrt{(\bar{x}_i - \xi_j)^2 + \beta^2(\bar{y}_r - \eta_s)^2}}\right] + \frac{2\pi^2 S}{2J+1} \sum_{j=1}^{J}$$
$$[g_0(\underline{y}_r)(1-\underline{\xi}_j) + g_1(\underline{y}_r)(1-\underline{\xi}_j^2) + \cdots]$$
$$\cdot \left[1 + \frac{\underline{x}_i - \underline{\xi}_j}{|\underline{x}_i - \underline{\xi}_j|}\right] - \frac{\pi}{S} \sum_{s=1}^{S} \frac{(1-\underline{\eta}_s^2)}{(\underline{y}_r - \underline{\eta}_s)^2} \Psi_{GR}(\underline{x}_i, \underline{y}_r, \underline{\eta}_s)$$
$$+ \pi S \Psi_{GR}(\underline{x}_i, \underline{y}_r, \underline{y}_r) \tag{29}$$

上式中最后两项是消除被积函数突跃中出现的修正项,其中

$$\Psi_{GR}(\underline{x}, \underline{y}, \underline{\eta}) = \sum_{p=0}^{1} \phi_{Rp}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \psi_{Rp}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) \tag{30}$$

2. $\alpha = 0, \delta \neq 0$ 的情况 联立式(2)、(7)和(14)得

$$\frac{W_{CSR}(\bar{x}, \bar{y}_r)}{4\rho U_\infty^2} = -\frac{\pi}{S} \sum_{s=1}^{S} \frac{(1-\underline{\eta}_s^2) G_{CSR}(\underline{y}_r, \underline{\eta}_s)}{(\underline{y}_r - \underline{\eta}_s)^2} + \pi S G_{CSR}(\underline{y}_r, \underline{y}_r) \tag{31}$$

式中

$$G_{CSR}(\underline{y}, \underline{\eta}) = G_{CSR1}(\underline{y}, \underline{\eta}) + G_{CSR2}(\underline{y}, \underline{\eta}) \tag{32}$$

$$G_{CSR1} = \int_{-1}^{1} [g_0(\underline{\eta}) + g_1(\underline{\eta})(1+\underline{\xi}) + \cdots] \varphi_{CS}(\underline{\xi}, \underline{\eta}) \left[1 + \frac{\bar{x} - \xi}{R}\right] d\underline{\xi} \tag{33a}$$

$$G_{CSR2} = \int_{-1}^{1} [g_{JC}(\underline{\eta}) + g_{(JC+1)}(\underline{\eta})(1+\underline{\xi}) + \cdots] \sqrt{\frac{1-\underline{\xi}}{1+\underline{\xi}}} \left[1 + \frac{\bar{x} - \xi}{R}\right] d\underline{\xi} \tag{34a}$$

式(34a)与式(16)相似,积分结果为

$$G_{CSR2}(\underline{y}, \underline{\eta}) = \frac{2\pi}{2J+1} \sum_{j=1}^{J} [g_{JC}(\underline{\eta})(1-\underline{\xi}_j) + g_{(JC+1)}(\underline{\eta})(1-\underline{\xi}_j^2) + \cdots]$$
$$\cdot \left[1 + \frac{\bar{x}_i - \underline{\xi}_j}{R_{ij}}\right] + \sum_{p=0}^{1} \phi_{Rp}(\underline{x}_i, \underline{y}) \psi_{Rp}(\bar{x}_i, \bar{y}, \bar{\eta}) \tag{34b}$$

式(33a)的被积函数除了在 $\bar{\eta} = \bar{y}, \xi = \bar{x}$ 处存在着突跃外,在操纵面前缘处还有对数奇性. 消除前者的方法如前一小节所述. 对于对数奇性,使用上述消除突跃的类似方法消除之. 为了使从奇性转换到非奇性积分的修正项沿展向一致起见,对非奇性的展向部分也进行修正. 经过这样的处理后,式(33a)的最后结果为

$$G_{CSR1}(\underline{y}, \underline{\eta}) = \frac{2\pi}{2J+1} \sum_{j=1}^{J} [g_0(\underline{\eta})(1-\underline{\xi}_j) + g_1(\underline{\eta})(1-\underline{\xi}_j^2) + \cdots]$$
$$\cdot \left(\frac{1+\underline{\xi}_j}{1-\underline{\xi}_j}\right)^{1/2} \varphi_{CS}(\underline{\xi}_j, \underline{\eta}) \left[1 + \frac{\bar{x}_i - \underline{\xi}_j}{R_{ij}}\right] + \Psi_{GCS}(\underline{x}_i, \underline{y}, \underline{\eta}) \tag{33b}$$

式中

$$\Psi_{GCS}(\underline{x}, \underline{y}, \underline{\eta}) = \sum_{p=0}^{1} [\phi_{CSp}(\underline{x}, \underline{y}) \psi_{Rp}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta})$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$-\sum_{n=1}^{ICS}\phi_{KCSp}(\underline{\xi}_{Cn},\underline{\eta})\phi_{CSnp}(\bar{y},\bar{\eta})] \tag{35}$$

$$\phi_{CS0}(\underline{x},\underline{y})=[g_0(\underline{y})+g_1(\underline{y})(1+\underline{x})+\cdots]\varphi_{CS}(\underline{x},\underline{y}) \tag{36}$$

$$\phi_{CS1}(\underline{x},\underline{y})=\partial\phi_{CS0}(\underline{x},\underline{y})/\partial\underline{x} \tag{37}$$

$$\phi_{CSn0}(\bar{y},\bar{\eta})=\{L_0(\underline{\xi}_{Cn},\underline{\eta})-\frac{2\pi}{2J+1}\sum_{j=1}^{J}(1-\underline{\xi}_j^2)^{1/2}\cdot\ln|[(\underline{\xi}_j-\underline{\xi}_{Cn})^2+E_n^2]^{1/2}-E_n|\} \tag{38}$$

$$\phi_{CSn1}(\bar{y},\bar{\eta})=\{L_1(\underline{\xi}_{Cn},\underline{\eta})-\frac{2\pi}{2J+1}\sum_{j=1}^{J}(1-\underline{\xi}_j^2)^{1/2}(\underline{\xi}_j-\underline{\xi}_{Cn})\cdot\ln|[(\underline{\xi}_j-\underline{\xi}_{Cn})^2+E_n^2]^{1/2}-E_n|\} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}L_0(\underline{\xi}_{Cn},\underline{\eta})=&(1-\underline{\xi}_{Cn})\ln|[(1-\underline{\xi}_{Cn})^2+E_n^2]^{1/2}-E_n|\\&+(1+\underline{\xi}_{Cn})\ln|[(1+\underline{\xi}_{Cn})^2+E_n^2]^{1/2}-E_n|-E_n\\&\cdot\ln\left|\frac{\{[(1+\underline{\xi}_{Cn})^2+E_n^2]^{1/2}+(1+\underline{\xi}_{Cn})\}\{[(1-\underline{\xi}_{Cn})^2+E_n^2]^{1/2}+(1-\underline{\xi}_{Cn})\}}{E_n^2}\right|-2\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}L_1(\underline{\xi}_{Cn},\underline{\eta})=&\underline{\xi}_{Cn}+\frac{1}{2}\{(1-\underline{\xi}_{Cn})^2\ln|[(1-\underline{\xi}_{Cn})^2+E_n^2]^{1/2}-E_n|\\&-(1+\underline{\xi}_{Cn})\ln|[(1+\underline{\xi}_{Cn})^2+E_n^2]^{1/2}-E_n|\}\\&-\frac{1}{2}E_n\{[(1-\underline{\xi}_{Cn})^2+E_n^2]^{1/2}-[(1+\underline{\xi}_{Cn})^2+E_n^2]^{1/2}\}\end{aligned} \tag{41}$$

$$\phi_{KCS0}(\underline{\xi}_{Cn},\underline{\eta})=\left\{[g_0(\underline{\eta})+g_1(\underline{\eta})(1+\underline{\xi})+\cdots]\left[1+\frac{\bar{x}-\underline{\xi}}{R}\right]\right\}_{\underline{\xi}=\underline{\xi}_{Cn}} \tag{42}$$

$$\phi_{KCS1}(\underline{\xi}_{Cn},\underline{\eta})=\left[\frac{\partial}{\partial\underline{\xi}}\phi_{KCS0}(\underline{\xi},\underline{\eta})\right]_{\underline{\xi}=\underline{\xi}_{Cn}} \tag{43}$$

利用式(31),(32),(33b)和(34b)得到 $\alpha=0,\ \delta\neq0$ 的附加下洗分布表达式

$$\begin{aligned}\frac{W_{CSR}(\bar{x}_i,\bar{y}_r)}{4\rho U_\infty^2}=&-\frac{2\pi^2}{S(2J+1)}\sum_{s=1}^{S}\sum_{j=1}^{J}\frac{1-\underline{\eta}_s^2}{(\underline{y}_r-\underline{\eta}_s)^2}\\&\cdot\{[g_0(\underline{\eta}_s)(1-\underline{\xi}_j)+g_1(\underline{\eta}_s)(1-\underline{\xi}_j^2)+\cdots]\\&\cdot\left(\frac{1+\underline{\xi}_j}{1-\underline{\xi}_j}\right)^{1/2}\varphi_{CS}(\underline{\xi}_j,\underline{\eta}_s)+[g_{JC}(\underline{\eta}_s)(1-\underline{\xi}_j)+g_{(JC+1)}(\underline{\eta}_s)(1-\underline{\xi}_j^2)+\cdots]\}\\&\cdot\left[1+\frac{\bar{x}_i-\underline{\xi}_j}{\sqrt{(\bar{x}_i-\underline{\xi}_j)^2+\beta^2(\bar{y}_r-\bar{\eta}_s)^2}}\right]+\frac{2\pi^2S}{2J+1}\sum_{j=1}^{J}\\&\{[g_0(\underline{y}_r)(1-\underline{\xi}_j)+g_1(\underline{y}_r)(1-\underline{\xi}_j^2)+\cdots]\left(\frac{1+\underline{\xi}_j}{1-\underline{\xi}_j}\right)^{1/2}\\&\cdot\varphi_{CS}(\underline{\xi}_j,\underline{y}_r)+[g_{JC}(\underline{y}_r)(1-\underline{\xi}_j)+g_{(JC+1)}(\underline{y}_r)(1-\underline{\xi}_j^2)+\cdots]\}\\&\cdot\left[1+\frac{\underline{x}_i-\underline{\xi}_j}{|\underline{x}_i-\underline{\xi}_j|}\right]-\frac{\pi}{S}\sum_{s=1}^{S}\frac{(1-\underline{\eta}_s^2)}{(\underline{y}_r-\underline{\eta}_s)^2}[\Psi_{GCS}(\underline{x}_i,\underline{y}_r,\underline{\eta}_s)+\Psi_{GR}(\underline{x}_i,\underline{y}_r,\underline{\eta}_s)]\\&+\pi S[\Psi_{GCS}(\underline{x}_i,\underline{y}_r,\underline{y}_r)+\Psi_{GR}(\underline{x}_i,\underline{y}_r,\underline{y}_r)]\end{aligned} \tag{44}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

本小节中未说明的符号除 $\phi_{R0}(\underline{x},\underline{y})=\left(\frac{1-\underline{x}}{1+\underline{x}}\right)^{1/2}[g_{JC}(\underline{y})+g_{(JC+1)}(\underline{y})(1+\underline{x})+\cdots]$ 外，其他的与上一小节的完全相同.

3. 待定系数 a_{nm} 的确定 将式(29)或(44)写成如下矩阵方程:

$$[(A_{nm})_{ir}]\{a_{nm}\}=-\pi\left\{\frac{\partial Z_{ir}}{\partial \underline{x}}\right\} \tag{45}$$

式中 $\{a_{nm}\}$ 和 $\left\{\frac{\partial Z_{ir}}{\partial \underline{x}}\right\}$ 为列矩阵; $\frac{\partial Z_{ir}}{\partial \underline{x}}$ 为在最佳下洗点 $(\underline{x}_i,\underline{y}_r)$ 处的边界条件，即物面斜率; $[(A_{nm})_{ir}]$ 为方阵，从方程(29)或(44)可得到方阵的每个元素.

从方程(45)解得 a_{nm} 后，由式(4)或(7)就可求得给定条件下的翼面和操纵面上的升力分布和其他气动力.

六、算例和结语

上述计算方法已编成 X-2 机程序. 计算表明，本方法的数值结果与实验数据符合得很好，与其他理论值有相同的精确度. 其中一算例如图 3 所示. 在 709 机上算出此结果仅需 2 分钟机器时间.

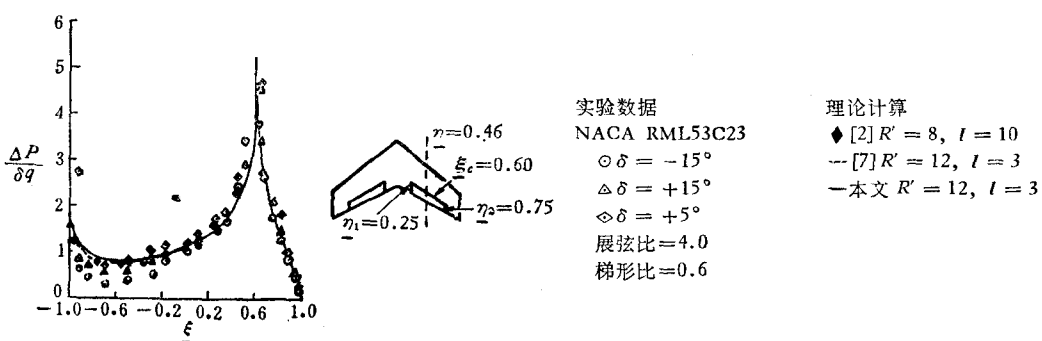

图 3 本文计算值与实验数据及其他理论值的比较 ($M_\infty=0.6$, $\underline{\eta}=0.46$)

从有限的数值结果表明，本文所给出的方法是可靠的. 与格网法相比较，本方法仅需少量的下洗点，从而大量压缩了所需的机器存贮量，节约了时间，可以在小型计算机上完成数值计算.

参 考 文 献

[1] Hedman, S. G., Vortex Lattice Method for Calculation of Quasi Steady State Loadings on Thin Elastic Wings in Subsonic Flow, FFA Report 105 (1966).
[2] Alkano, E. and Rodden, W. P., *AIAA Journal*, 7, 2 (1969).
[3] Landahl, M., *AIAA Journal*, 6, 2 (1968). 345—349.
[4] Ashley, H. and Rowe, W. S., *Z. Flugwissenschaften*, 18, 9—10 (1970).
[5] Zwaan, R. J., On a Kernel-Function Method for the Calculation of Pressure Distributions on Wings with Harmonically Oscillating Control Surfaces in Subsonic Flow, NLR TR 70123U (1971).
[6] Rowe, W. S., Winther, B. A. and Redman, M. C., *J. Aircraft*, 11, 1 (1974), 45—54.
[7] Cunningham, A. M., Jr., *J. Aircraft*, 9, 6 (1972), 413—419.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

[8] Cunningham, A. M., Jr., *J. Aircraft*, 8 ,3 (1971), 168—176.
[9] Thoedorsen, Th., General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter, NACA TR 496 (1934).
[10] Hsu, P. T., Some Recent Developments in the Flutter Analysis of Low-Aspect-Ratio Wings, National Specialists Meeting Proceedings, Dynamics and Aeroelasticity (1958), 7—26.
[11] Kopal, Z., Numerical Analysis, Second edition, London (1961), 382—384.

ON THE KERNEL FUNCTION COLLOCATION METHOD IN STEADY SUBSONIC FLOW FOR WING WITH CONTROL SURFACES

Chen Jing-song
(*Nanjing Aeronautical Institute*)

Abstract

In this paper, the forms of lift distribution function for wings with control surfaces in steady subsonic flow are analysed. The methods for treating the singularities which occur in the kernel of linear integral equation and in the lift distribution functions are also discussed, with the numerical solution of the integral equation given. The method proposed may be used to calculate the lift distribution of the wing alone and of the wing with full or partial span control surfaces on both the leading and the trailing edge. The numerical results are in good agreement with experimental data, and are as accurate as those obtained by other theories. As compared with the vortex-lattice method, both the required computing time and the computer capacity are reduced. Thus, the numerical calculations may be carried out on smaller computers.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net