

研究简报

Navier-Stokes 方程组的数值解

上海科学技术大学 郭本瑜 九江炼油厂 郭本琦

I. 已有许多方法计算 Navier-Stokes 方程组^[1,2], 但很少能证明它的误差估计, 其主要困难是难于处理非线性项和压力密度比. 文献 [3, 4] 曾采用人工状态方程计算, 郭本瑜则结合 [5] 中的方法来计算^[6], 并证明了隐式格式的稳定性, 但尚未证明此类显式格式的收敛性, 亦未能由此推出 P 的收敛性. 求解 Navier-Stokes 方程组的另一个方法是直接计算一个关于 P 的 Poisson 方程, 为方便计, 仅以下列二维方程为例:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} - \nu \nabla^2 U + \frac{\partial P}{\partial x} &= f_1 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} - \nu \nabla^2 V + \frac{\partial P}{\partial y} &= f_2 \\ \nabla^2 P &= 2 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} - 2 \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} + f_3 \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

其中 U, V 分别是 x, y 方向的分速度, ν 是粘性系数, $f_i (i = 1, 2, 3)$ 是已知函数. 不妨假定 U, V, P 的初值及边值是已知的.

本文继续推广 [5] 中的结果, 构造了几类易于计算的格式, 并且推广了 [5] 中的一个非线性不等式, 从而解决了严格误差估计.

II. 用 h, τ 分别表示空间和时间方向的网格步长, $\lambda = \tau/h^2$, Q 是网格点, R_h 是所求解的网格区域的内点集合, Γ_h 是其边界. $w(k)$ 或 w 都表示 $w(ih, jh, k\tau)$, $\bar{w} = \bar{w}(k) = w(k+1)$, $w_x, w_{\bar{x}}, w_{x\bar{x}}, w_t, w_{i\bar{i}}, \Delta w$ 等意义如同 [5]. 又定义^[5]

$$(w, u) = \sum_{Q \in R_h} h^2 w(Q) u(Q), \quad \|w\|^2 = (w, w), \quad \|w\|_1^2 = \|w_x\|^2 + \|w_y\|^2$$

$$s(w) = \sum_{Q \in R_1 + R_2} w^2(Q)$$

其中 R_1, R_2 分别是 x, y 方向坐标值最小的内点集合,

$$s_1(w) = \|w\|_1^2 + s(w)$$

引理 设 $w(k)$ 是非负网格函数, g_0, L, τ, d 是正常数, $\rho(T)$ 是 T 的非负连续函数, 当 $w_i \leq d (i \leq k-1)$ 时, 泛函

$$H_w(k-1) = H[w(0), \dots, w(k-1)] \leq Lw(k-1)$$

$$G_w(k) = G[w(0), \dots, w(k)] \geq g_0 w(k)$$

那末, 若

$$g_0 w(0) \leq \rho(T) \leq e^{-LT/g_0} \cdot dg_0$$

且当 $1 \leq k \leq \left\lceil \frac{T}{\tau} \right\rceil$ 时,

$$G_w(k) \leq \rho(T) + \tau \sum_{j=0}^{k-1} H_w(j)$$

则

$$w(k) \leq \frac{\rho(T)}{g_0} e^{L\tau/g_0}$$

注记 1: 若

$$H_w(k) = C_0 \left[w(k) + \frac{w^2(k)}{h^2} \right] + \left[C_1 \frac{w(k)}{h^2} + C_2 - C_3 \right] v(k)$$

$$G_w(k) = [1 - C_4\tau - w(k-1)]w(k)$$

其中 $v(k)$ 是非负网格函数, τ, h 充分小, 并存在常数 M , 使得 $C_1M + C_2 \leq C_3$, 则可取

$$d = Mh^2, \quad g_0 = \frac{1}{2}, \quad L = C_0(M+1)$$

因此当

$$\rho \leq \frac{1}{2} e^{-2C_0T(M+1) \cdot d} \text{ 时,}$$

$$w(k) \leq 2\rho e^{2C_0T(M+1)}$$

注记 2: 若注记 1 中 $\rho \leq M_0h^2T$, $C_1 = b_1r$, $C_2 = b_2r$, 其中 b_1, b_2, C_3 是常数, r 是待定的, $C_0(r)$ 是 r 的连续函数, 因此若 $T \leq T_0$, T_0 适当小, 以致 $2T_0M_0e^{4C_0T_0} \leq 1$ 时, 则可取

$$r = \frac{C_3}{b_1 + b_2}, \quad L = 2C_0, \quad g_0 = \frac{1}{2}$$

从而

$$w(k) \leq 2\rho e^{4C_0T}$$

III. 求解式 (1.1) 的两层格式是

$$\left. \begin{aligned} u_i + d(u, u, v) - v\Delta(u + \sigma\tau u_i) + P_x^* &= f_1, & R_h \times S_\tau^0 \\ v_i + d(v, u, v) - v\Delta(v + \sigma\tau v_i) + P_y^* &= f_2, & R_h \times S_\tau^0 \\ \Delta P &= \phi(u, v) + f_3, & R_h \times S_\tau^0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

其中 $0 \leq \sigma, \alpha \leq 1$ 是非负参数, S_τ^0 表示集合 $E\{t | t = k\tau, k = 1, 2, \dots\}$,

$$\phi(u, v) = (u_x^* v)_y - (v u_y^*)_x + (v_y u)_x - (v_x^* u)_y,$$

$$d(w, u, v) = \alpha(w u)_x^* + \alpha(w v)_y + (1 - \alpha)v w_x^* + (1 - \alpha)v w$$

若

$$\alpha = 1/2, u|_{\Gamma_h} = v|_{\Gamma_h} = 0$$

则

$$(u, d(u, u, v)) = (v, d(v, u, v)) = 0$$

这实际上模拟了下列守恒律, 因此会有较好的数值结果:

$$\iint_R \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) U dx dy = \iint_R \left(U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right) V dx dy = 0$$

以 $\tilde{u}(k), \tilde{v}(k), \tilde{f}_i$ 表示误差, 并记 $\varepsilon = (\tilde{u}, \tilde{v}), \|\varepsilon\|^2 = \|\tilde{u}\|^2 + \|\tilde{v}\|^2$,

$\|\varepsilon_i\|^2 = \|\tilde{u}_i\|^2 + \|\tilde{v}_i\|^2$, $\|\varepsilon(k)\|_{0\oplus\nu}^2 = \|\varepsilon(k)\|^2 + \tau\nu \sum_{j=0}^{k-1} \|\varepsilon(j)\|^2$, $\|\varepsilon_i\|^2 = \|\tilde{u}_i\|^2 + \|\tilde{v}_i\|^2$ 等等.

定理 1 若格式(3.1)中, (1) $\nu > 0$, (2) $\sigma \geq \frac{1}{2}$ 或 $\lambda < \frac{1}{9\nu(1/2 - \sigma)}$, 则存在正数 T_0 和 C , 使得当 $T \leq T_0$ 且

$$\rho = \|\varepsilon(0)\|^2 + \tau \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^3 \|\tilde{f}_i(j)\|^2 \leq h^2 \cdot C$$

时, $\|\varepsilon(k)\|_{0\oplus\nu}^2 \leq M\rho e^{LT}$, 其中 L, M 是仅与 $m_0, a, \nu, \sigma, \lambda$ 和 u, v 及其一阶差商绝对值上界 N 有关的正常数. 若 $\rho = O(h^2)$, 则 T_0 任意.

证明: 显然有误差方程

$$\left. \begin{aligned} L_1(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}) &= \tilde{u}_t + d(\tilde{u}, u + \tilde{u}, v + \tilde{v}) + d(u, \tilde{u}, \tilde{v}) - \nu \Delta(\tilde{u} + \sigma \tau \tilde{u}_t) + \tilde{p}_x = \tilde{f}_1 \\ L_2(\tilde{v}, \tilde{u}, \tilde{p}) &= \tilde{v}_t + d(\tilde{v}, u + \tilde{u}, v + \tilde{v}) + d(v, \tilde{u}, \tilde{v}) - \nu \Delta(\tilde{v} + \sigma \tau \tilde{v}_t) + \tilde{p}_y = \tilde{f}_2 \\ \Delta \tilde{p} &= \tilde{\phi}(\tilde{u}, \tilde{v}) + \tilde{f}_3 = \phi(\tilde{u}, \tilde{v}) + \phi(u, \tilde{v}) + \phi(\tilde{u}, v) + \tilde{f}_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

计算 $(2\tilde{u} + m\tau\tilde{u}_t, L_1(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p})) + (2\tilde{v} + m\tau\tilde{v}_t, L_2(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}))$, 即可仿 [5] 得

$$\begin{aligned} \|\varepsilon\|_i^2 + (m-1)\tau\|\varepsilon_i\|^2 + \nu s_1(\varepsilon) + \tau^2\nu\left(m\sigma - \frac{m}{2} - \sigma\right)s_1(\varepsilon_i) \\ + \tau\nu\left(\sigma + \frac{m}{2}\right)s_1(\varepsilon)_t + (\nu - aA)\|\varepsilon\|_i^2 - aB\|\tilde{\varepsilon}\|_i^2 \leq \tilde{R}(\varepsilon) \end{aligned}$$

其中 A, B, M_i 是与 h, τ 无关的正数, a, a_1 是适当待定的正参数,

$$\tilde{R}(\varepsilon) \leq M_0 \left\{ \left(1 + \frac{1}{a_1}\right) (\|\varepsilon\|^2 + \|\tilde{\varepsilon}\|^2) + \frac{1}{h^2 a} (\|\varepsilon\|^4 + \|\varepsilon\|^2 \|\tilde{\varepsilon}\|^2) + \|\tilde{f}_1\|^2 + \|\tilde{f}_2\|^2 \right\} + a_1 \|\tilde{p}\|^2$$

仿照 [5] 中的方法适当地选择 a 和 m , 并把上式在 t 方向求和, 即得

$$\|\varepsilon(k)\|_{0\oplus\nu}^2 \leq M_1 \|\varepsilon(0)\|^2 + \left(\sigma + \frac{m}{2}\right) \tau s[\varepsilon(0)] + \tau \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{R}(\varepsilon) \quad (3.3)$$

又由式 (3.2) 的第三式得

$$-s_1(\tilde{p}) = (\tilde{p}, \tilde{\phi}) + (\tilde{p}, \tilde{f}_3), \quad \|\tilde{p}\|_1^2 \leq \frac{\|\tilde{p}\|^2}{8m_0} + 2m_0 \|\tilde{f}_3\|^2 + |(\tilde{p}, \tilde{\phi})|$$

其中

$$m_0 = \sup_{\omega \in \Gamma_{h=0}} \frac{\|\omega\|^2}{\|\omega\|_1^2}$$

但

$$|(\tilde{p}, \tilde{\phi})| \leq \frac{\|\tilde{p}\|_1^2}{8} + 48 \left\{ \frac{\|\varepsilon\|^2 \|\varepsilon\|_1^2}{h^2} + N^2 \|\varepsilon\|_1^2 + N^2 \|\varepsilon\|^2 \right\}$$

从而

$$\|\tilde{p}\|_1^2 \leq 96 \left\{ \frac{\|\varepsilon\|^2 \|\varepsilon\|_1^2}{h^2} + N^2 \|\varepsilon\|_1^2 + N^2 \|\varepsilon\|^2 \right\} + 4m_0 \|\tilde{f}_3\|^2$$

把上式代入式 (3.3), 即得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\varepsilon(k)\|_{0\oplus\nu}^2 - M_2\tau \|\varepsilon(k)\|^2 - M_2\lambda \|\varepsilon(k)\|^2 \|\varepsilon(k-1)\|^2 &\leq M_3\rho + M_3\tau \sum_{j=0}^{k-1} (\|\varepsilon(j)\|^2 \\ &+ \|\varepsilon(j)\|^4 h^{-2}) + \tau \sum_{j=0}^{k-1} M_4 \left(a_1 \frac{\|\varepsilon(j)\|^2 \|\varepsilon(j)\|_1^2}{h^2} + a_1 \|\varepsilon(j)\|_1^2 - \frac{\nu}{2} \|\varepsilon(j)\|_1^2 \right) \end{aligned}$$

到此只要适当选择 a_1 , 并应用引理注记 2, 在其中 $w = \|\varepsilon\|_{0\oplus\nu}^2, v = \|\varepsilon\|_1^2, r = a_1$.

由此可知, 若 U, V, P 适当光滑使式 (3.1) 的逼近精度至少为 $O(h)$, 则格式 (3.1) 收敛, 且

$$\|\tilde{u}\|^2 + \|\tilde{v}\|^2 = O(h^4), \quad \|\tilde{p}\|^2 = O(h^2)$$

IV. 求解式 (1.1) 的三层格式可构造如下, 其中 θ 是正参数:

$$\left. \begin{aligned} u_i + \theta\tau^2 u_{ii} + d(u, u, v) - v\Delta u + p_x^* &= f_1, & R_h \times S_\tau^0 \\ v_i + \theta\tau^2 v_{ii} + d(v, u, v) - v\Delta v + p_y &= f_2, & R_h \times S_\tau^0 \\ \Delta p &= \phi(u, v) + f_3, & R_h \times S_\tau^0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

定理 2 若在格式 (4.1) 中, (1) $\nu > 0$, (2) $\tau\theta$ 是常数, $0 < \tau\theta \leq \frac{1}{2}$, (3) $\lambda < \frac{4\tau\theta}{9\nu}$

那末存在正数 T_0 和 C , 当 $T \leq T_0, \rho' = \rho + \|\varepsilon(1)\|^2 \leq Ch^2$ 时,

$$\|\varepsilon(k)\|_{0\oplus\nu}^2 + \|\varepsilon(k-1)\|^2 \leq M\rho' e^{LT}$$

若 $\rho' = O(h^2)$, 则 T_0 任意.

证明: 记 $\theta = \frac{1}{2\tau} + \frac{\theta_0}{\tau}$, 则 $-1/2 < \theta_0 \leq 0$, 类似于定理 1 得

$$\begin{aligned} \|\varepsilon\|_1^2 + (m-1)\tau \|\varepsilon_i\|^2 + \nu s_1(\varepsilon) - \frac{\tau^2 \nu m}{2} s_1(\varepsilon_i) + \frac{\nu m \tau}{2} s_1(\varepsilon)_i + (\nu - aA) \|\varepsilon\|_1^2 \\ - aB \|\varepsilon\|_1^2 + \tau\theta_0 \|\varepsilon\|_{ii}^2 - \theta_0 \tau \|\varepsilon_i\|^2 - \theta_0 \tau \|\varepsilon_{\bar{i}}\|^2 + \frac{\tau^2 \theta_0 m}{2} \|\varepsilon_i\|_i^2 + \frac{\tau^3 \theta_0 m}{2} \|\varepsilon_{ii}\|^2 \leq \tilde{R}(\varepsilon) \end{aligned}$$

其中 $\tilde{R}(\varepsilon)$ 同定理 1. 今取 $m = \frac{2}{2 + 4\theta_0 - 9\lambda\nu}$, 则对 i 求和后上式左端第 2, 4, 12 项的

和非负. 余下的证明仿定理 1. 但在应用引理时, 取 $w(k) = \|\varepsilon(k)\|_{0\oplus\nu}^2 + \|\varepsilon(k-1)\|^2$.

求解式 (1.1) 的 ADE 格式是

$$\left. \begin{aligned} u_i + d(u, u, v) - v\Delta u - \frac{\nu\tau}{h} H(u) + p_x^* &= f_1, & R_h \times S_\tau^0 \\ v_i + d(v, u, v) - v\Delta v - \frac{\nu\tau}{h} H(v) + p_y &= f_2, & R_h \times S_\tau^0 \\ \Delta p &= \phi(u, v) + f_3, & R_h \times S_\tau^0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

其中 $H(w)$ 依一定规律取 $-w_{\bar{x}i} - w_{\bar{y}i}, w_{xi} - w_{\bar{y}i}, -w_{\bar{x}i} + w_{yi}, w_{xi} + w_{yi}$, 等等.

定理 3 若在格式 (4.2) 中 $\nu > 0, \lambda < \frac{2}{\nu}$, 则定理 1 结论亦真.

证明: 可仿定理 1 得

$$\|\varepsilon\|_1^2 + (m-1)\tau \|\varepsilon_i\|^2 + \frac{\nu\tau m}{2} s_1(\varepsilon)_i + \nu s_1(\varepsilon) + (\nu - aA) \|\varepsilon\|_1^2 - aB \|\varepsilon\|_1^2$$

$$-\frac{2\nu\tau}{h}(\varepsilon, H(\varepsilon)) - \frac{\tau^2\nu m}{2}s(\varepsilon_i) \leq \tilde{R}(\varepsilon)$$

其中 $\tilde{R}(\varepsilon)$ 同前. 左端最后二项和不超过 $\frac{\nu}{2}\|\varepsilon\|_1^2 + \lambda\nu\tau\left(6 + \frac{m}{2}\right)\|\varepsilon_i\|^2$, 今取 $m = \frac{2+12\lambda\nu}{2-\lambda\nu}$ 那末上式右端第 2, 7, 8 项的和非负, 余下的证明同定理 1.

求解式 (1.1) 的 Splitting 格式可构造为

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^* - u}{\tau} + \frac{dx}{2}(u^* + u, u) - \frac{\nu}{2}[u_{xx}^* + u_{xx}] + \frac{p_x^*}{2} &= f_1/2, & R_h \times S_\tau^0 \\ \frac{\bar{u} - u^*}{\tau} + \frac{dy}{2}(\bar{u} + u^*, v) - \frac{\nu}{2}[\bar{u}_{yy} + u_{yy}^*] + \frac{p_y}{2} &= f_2/2, & R_h \times S_\tau^0 \\ \frac{v^* - v}{\tau} + \frac{dx}{2}(v^* + v, u) - \frac{\nu}{2}[v_{xx}^* + v_{xx}] + \frac{p_x}{2} &= f_2/2, & R_h \times S_\tau^0 \\ \frac{\bar{v} - v^*}{\tau} + \frac{dy}{2}(\bar{v} + v^*, v) - \frac{\nu}{2}[\bar{v}_{yy} + v_{yy}^*] + \frac{p_y}{2} &= f_2/2, & R_h \times S_\tau^0 \\ \Delta p &= \phi(u, v) + f_3, & R_h \times S_\tau^0 \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

其中

$$\begin{aligned} dx(w, u) &= \alpha(wu)_x + (1-\alpha)uw_x \\ dy(w, v) &= \alpha(wv)_y + (1-\alpha)vw_y \end{aligned}$$

若

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad w|_{\Gamma_h} = 0$$

则

$$(w, dx(w, u)) = (w, dy(w, v)) = 0$$

从而模拟了守恒律. 若只需计算若干时刻的 P 值, 则可用 [5] 中方法计算涡度值 ξ 和流函数 ϕ , 然后由下式计算 P :

$$\nabla^2 P = 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right)^2 + f_3$$

对于三维问题也可建立与定理 1—3 类似的结果. 进一步的结果可见 [6, 7]. 显然本文把 [6] 中相应二维格式的广义稳定性指标改进为 $s \leq 1$. 若采用 [6] 中的逆风法计算式 (1.1), 格式也收敛.

参 考 文 献

- [1] Ames, W. F., *SIAM Rev.*, **15** (1973), 524—552.
- [2] Roache, P. J., *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa Publishers (1972).
- [3] Lions, J. L., *SIAM AMS Proc.*, **2** (1970), 11—23.
- [4] Chorin, A. J., *J. Comp. Phys.*, **2** (1967), 12—26.
- [5] 郭本瑜, 数学学报, **17** (1974), 242—258.
- [6] 郭本瑜, 科学通报, **21** (1976), 127—131.
- [7] Kuo Pen-yu (郭本瑜), *Scientia Sinica* (1977), 287—304.