平衡状态下空气的几种热力学函数的近似计算

中国科学院计算技术研究所 陈炳木

在平衡状态下,空气的热力学函数可利用热力学方法直接进行计算,也可查现成的空气热力学函数表.当在电子计算机上求解气体动力学问题时,若是用热力学方法直接进行热力学量的计算,计算工作量大,需占用大量的机器时间;由于计算机存储容量的限制,要在机器上使用热力学函数表也有许多困难.所以给出空气热力学函数的简单逼近表达式是有必要的.文[3]中曾以压力 p ,温度 T 为独立状态参数,给出了焓 $h(p, T)$ 及函数 $K(p, T) \equiv \frac{\rho T}{p}$ 的逼近公式.但该公式要多次用到指数函数的计算,解题时间还是较费;同时在基本方程中要出现参量 T ,这对于没有直接用到温度 T 的问题来说也是不方便的.

本文给出了以压力 p ,密度 ρ 为自变量的平衡空气的音速 $a(p, \rho)$,焓 $h(p, \rho)$ 及温度 $T(p, \rho)$ 的近似计算公式.这些公式是以平衡空气热力学函数表[1]为基础,用函数逼近的方法得到的.计算的结果与函数表[1]上的数值相比较,最大相对误差为1—2%.用本文所给的近似公式进行计算时,除了要进行一次对数运算外,其余仅是二阶多项式的运算,与文[3]的逼近公式相比较,运算量显然是减少很多.用本文的逼近公式求解平衡空气的绕流问题,计算时间仅比完全气体的绕流计算多10%左右.所以可以说这些表达式具有精度高且计算量小的优点.

文[2]曾指出,若采用

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \log p \\ q &= (1 + 0.1667|\sigma|)^{-\text{sign}\sigma} (Q - 0.45) \end{aligned} \right\} (1)$$

为自变量,其中 $Q = \frac{p}{\rho} \times 10^{-4}$, p 的单位为[大气压], ρ 的单位为[克/厘米³],则当 q 固定时,函数

$$\bar{f}_a(\sigma, q) \equiv \frac{a^2}{Q \Sigma_1}, \quad \bar{f}_h(\sigma, q) \equiv \frac{1}{1 - \frac{Q \Sigma_2}{h}}$$

$$\bar{f}_T(\sigma, q) \equiv \frac{RT}{Q} \times 10^{-4}$$

等可用 σ 的二次多项式来逼近(参看图1—3).所以这些函数可以对 σ 用二次多项式而对 q 用分段二次多项式来逼近.另外,在一些特殊情况下,这些函数可近似地表示成 Q 的二次多项式或 σ, Q 的双二次多项式,所以对热力学函数,我们用如下的表达式来逼近:

(i) 当 $Q_0 \leq Q < Q_1$ 时¹⁾,取表达式

$$\begin{aligned} f(p, \rho) &\approx f^*(\sigma, Q) \\ &= \beta_{07} Q^2 + \beta_{08} Q + \beta_{09} \end{aligned} \quad (2)$$

(ii) 当 $Q_1 \leq Q < Q_2 = 0.45$ 时,取表达式

$$\begin{aligned} f(p, \rho) &\approx f^{**}(\sigma, Q) \\ &= (\beta_{11} Q^2 + \beta_{12} Q + \beta_{13}) \sigma^2 \\ &\quad + (\beta_{14} Q^2 + \beta_{15} Q + \beta_{16}) \sigma \\ &\quad + \beta_{17} Q^2 + \beta_{18} Q + \beta_{19} \end{aligned} \quad (3)$$

(iii) 当 $Q \geq 0.45$ 时,在 q 方向上分 $n+1$ 个区间,在每一个区间 $q_j \leq q < q_{j+1}$ ($j = 0, 1, \dots, n; q_0 = 0$)上,取表达式

1) 当 $Q < Q_0$ 时(也就是相应于 $T < 200^\circ\text{K}$ 时),某些情形下仍可用式(2)作近似计算.

$$\begin{aligned}
 f(p, \rho) &\approx f_i(\sigma, q) \\
 &= (\alpha_{i1}q^2 + \alpha_{i2}q + \alpha_{i3})\sigma^2 \\
 &\quad + (\alpha_{i4}q^2 + \alpha_{i5}q + \alpha_{i6})\sigma \\
 &\quad + \alpha_{i7}q^2 + \alpha_{i8}q + \alpha_{i9} \quad (4)
 \end{aligned}$$

这里, $f(p, \rho)$ 为我们要逼近的任一函数;

$Q_0 = 0.05666$, $Q_1 = 0.3399$; n 及 q_i 的值由函数的具体情况来确定. 表达式确定后, 便可由函数表 [1] 的值, 用最小二乘法把系数 β_{ji} , α_{ji} 的值算出来.

下面就平衡空气的音速 $a(p, \rho)$, 焓

图1 函数 $\bar{f}_a(\sigma, q)$ 随 q 的变化

图2 函数 $\bar{f}_a(\sigma, q)$ 随 q 的变化

图3 函数 $\bar{f}_T(\sigma, q)$ 随 q 的变化

表 2 $f_h(p, \rho)$ 的逼近系数

i	β_{i1}		β_{i2}		β_{i3}		β_{i4}		β_{i5}		β_{i6}		β_{i7}		β_{i7}		β_{i9}			
	α_{i1}	α_{i2}	α_{i3}	α_{i4}	α_{i5}	α_{i6}	α_{i7}	α_{i8}	α_{i9}	α_{i10}	α_{i11}	α_{i12}	α_{i13}	α_{i14}	α_{i15}	α_{i16}	α_{i17}	α_{i18}	α_{i19}	
0	0.56657224	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.372223599	-1	0.14005476
1	0.33990483	0	-0.266882402	-1	0.19800847	-1	-0.36245373	-2	-0.13914086	-1	0.10248737	-1	-0.18760274	-2	0.17506582	0	-0.27942963	0	0.14432391	1
2	0.4500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0.0000	0	-0.36267775	-1	-0.41306761	-2	-0.15784262	-3	0.43045628	-1	-0.19661940	-1	-0.81697900	-4	0.11518052	0	-0.13282684	0	0.13529466	1
4	0.1000	0	0.22291754	-1	-0.19788361	-1	0.82233057	-3	0.19389834	0	-0.55744489	-1	0.19380299	-2	-0.29090810	0	-0.32880712	-1	0.13470128	1
5	0.2000	0	0.70809125	-1	-0.41666533	-1	0.32572701	-2	0.13440650	0	-0.33206930	-1	-0.49808355	-4	-0.51508158	0	0.61278692	-1	0.13371479	1
6	0.3000	0	0.35082114	-1	-0.18673773	-1	-0.42452678	-3	-0.36946390	-1	0.76479621	-1	-0.17334013	-1	-0.17244677	0	-0.15211018	0	0.13703274	1
7	0.4000	0	-0.49032691	-2	0.14502839	-1	-0.72983104	-2	-0.85613776	-1	0.11653269	0	-0.25768461	-1	0.25605463	0	-0.50209969	0	0.14417630	1
8	0.5000	0	-0.85059207	-2	0.17286123	-1	-0.77892896	-2	-0.65232996	-1	0.92454840	-1	-0.18824729	-1	0.35234688	0	-0.60019416	0	0.14667372	1
9	0.6000	0	-0.67969194	-2	0.15398689	-1	-0.72720695	-2	-0.63050360	-1	0.90367205	-1	-0.18357897	-1	0.28116526	0	-0.51649075	0	0.14421405	1
10	0.7000	0	-0.11900312	-1	0.21884081	-1	-0.93111813	-2	-0.33985235	-1	0.48613225	-1	-0.33720226	-2	0.24011624	0	-0.44850086	0	0.14146616	1
11	0.8000	0	0.28930221	-2	-0.68179508	-2	0.45380463	-2	0.35456223	-1	-0.83986757	-1	0.59720381	-1	0.62299591	-1	-0.12617525	0	0.12686000	1
12	0.9000	1	0.11663117	-2	-0.36068436	-2	0.30951480	-2	0.18096130	-1	-0.48885645	-1	0.42114876	-1	-0.76101106	-1	0.17664198	0	0.11029659	1
13	0.1000	1	0.48800021	-3	-0.12166055	-2	0.10359918	-2	-0.15656251	-2	0.10548136	-1	-0.27568526	-2	0.11970922	-2	-0.62234635	-1	0.12873599	1
14	0.2000	1	-0.27006982	-3	0.16184308	-2	-0.16018007	-2	0.24161106	-2	0.13156365	-1	-0.46113672	-2	0.21972622	-1	-0.13978911	0	0.13393667	1
15	0.2500	1	-0.15485075	-3	0.10193826	-2	0.82429937	-3	-0.95334904	-3	0.59924080	-2	0.41562642	-2	0.13561071	-1	-0.97205613	-1	0.13054802	1
16	0.3000	1	-0.17011521	-3	0.11347514	-2	-0.10330258	-2	-0.68488368	-3	0.45828114	-2	0.59688657	-2	0.10737670	-1	-0.80504440	-1	0.12807873	1
17	0.4000	1	-0.41633355	-4	0.1792136	-3	0.68881581	-3	-0.66968560	-3	0.44298683	-2	0.63179993	-2	0.83468442	-2	-0.64175148	-1	0.12529224	1
18	0.4500	1	0.81112793	-4	-0.95997505	-3	0.65594771	-3	0.43273568	-3	0.23719274	-2	0.10738555	-1	0.56815348	-2	-0.42524168	-1	0.10818362	1
19	0.5200	1	0.94883446	-4	-0.10604033	-2	0.34188198	-2	0.71925708	-3	-0.81742506	-2	0.34888503	-1	-0.58098679	-3	0.13907672	-1	0.10818362	1
20	0.6000	1	-0.11085020	-4	0.18074367	-3	0.35686885	-2	0.93259029	-3	-0.10608426	-1	0.41777685	-1	-0.35845298	-2	0.40281177	-1	0.10177978	1
21	0.7000	1	0.27564421	-5	0.36948800	-4	0.26500363	-3	-0.35778365	-4	0.12687510	-2	0.14871411	-1	-0.15935155	-2	0.19572809	-1	0.10811714	1
22	0.1200	2	0.10238155	-5	0.20300884	-4	0.71398886	-3	-0.44130302	-5	0.48646174	-3	0.10065452	-1	0.23478964	-3	-0.70469112	-2	0.11752771	1
23	0.1700	2	-0.17908744	-4	0.71195302	-3	-0.55720098	-2	-0.74224236	-4	0.29616621	-2	-0.11837516	-1	0.19479286	-3	-0.47825691	-2	0.11549894	1
24	0.2200	2	-0.10331104	-4	0.38222436	-3	-0.19855566	-2	-0.63162060	-4	0.25796372	-2	-0.87870614	-2	-0.14692626	-3	0.10032782	-1	0.99294332	0
25	0.2500	2	-0.16896145	-4	0.78587387	-3	-0.79736442	-2	-0.93382310	-4	0.43608711	-2	-0.34430252	-1	-0.45942766	-3	0.24820295	-1	0.80613134	0
26	0.2700	2	0.36756261	-5	-0.28459855	-3	0.59322900	-2	0.32971019	-4	-0.22801673	-2	0.52766208	-1	-0.33046281	-3	0.18957827	-1	0.88498262	0
27	0.3050	2	0.37304146	-4	-0.22812220	-2	0.35546376	-1	0.22317982	-3	-0.13621015	-1	0.22172033	-0	0.42951341	-3	-0.27505305	-1	0.15951403	1
28	0.3540	2																		

表 3 $f_{11}(p, \rho)$ 的逼近系数

i	Q_i	β_{i1}	β_{i2}	β_{i3}	β_{i4}	β_{i5}	β_{i6}	β_{i7}	β_{i8}	β_{i9}
0	0.56657224	-1	0	0	0	0	0	0.15344031	-0.49257688	-1
1	0.33990483	0	0.14667191	0	-0.17353173	-1	0.12781875	-1	-0.23397173	-2
2	0.4300	0	0	0	0	0	0	0.23424115	1	0.29343184
i	Q_i	α_{i1}	α_{i2}	α_{i3}	α_{i4}	α_{i5}	α_{i6}	α_{i7}	α_{i8}	α_{i9}
0	0.0000	0	-0.18027963	-1	0.10856880	1	-0.10457205	0	-0.10189083	-3
1	0.2400	0	-0.61917547	0	0.17818967	1	-0.11582485	0	-0.37502844	-1
2	0.4500	0	-0.13551977	0	-0.20693394	1	0.32568222	1	-0.77531870	0
3	0.6500	0	0.88114672	0	-0.23034733	1	0.3445862	1	-0.79909371	0
4	0.9000	0	0.11047782	1	-0.15058188	1	0.25839782	1	-0.66974667	0
5	0.1100	1	-0.88183342	-1	0.58076089	0	-0.18746521	1	0.17699832	1
6	0.1500	1	-0.56368462	-1	0.50475570	-1	-0.1542672	0	0.32292914	0
7	0.2500	1	0.39102923	-1	-0.41965840	-1	0.26735691	0	-0.17401111	0
8	0.3500	1	0.18777003	-1	-0.69783328	-1	0.45531592	0	-0.47110342	0
9	0.4500	1	-0.23015215	-1	0.45887327	-1	-0.57003844	0	0.18606605	1
10	0.5200	1	0.53065998	0	0.93771695	-1	-0.10999221	1	0.32617623	1
11	0.6000	1	-0.37934082	-1	0.22722054	-1	-0.26136534	0	0.78770956	0
12	0.7000	1	0.28834428	-1	-0.68492353	-2	0.15363867	0	-0.66829261	0
13	0.1200	2	-0.14494374	-1	-0.95408967	-3	0.25932405	-1	0.15182176	-1
14	0.1700	2	0.14106993	-2	-0.13336439	-2	0.34521439	-1	-0.21140242	-1
15	0.2200	2	0.44989387	0	0.24625072	-1	-0.11788317	1	0.14108611	2
16	0.2500	2	0.35163722	-4	0.40832321	-3	-0.35750944	-1	0.66705930	0
17	0.2700	2	-0.14109747	-1	0.26208780	-2	-0.15567892	0	0.22921623	1
18	0.3050	2	0.19328992	-1	-0.19515221	-2	0.11582492	0	-0.17352296	1
19	0.3540	2								0

$h(p, \rho)$ 及温度 $T(p, \rho)$, 谈一下一些具体的细节。

1. 音速的计算 完全气体的音速 a 具有表达式 $a^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$, 其中 γ 为一常数。仿照完全气体, 我们把平衡气体的音速 a 表示成 $a^2 = f_a(p, \rho) \Sigma_1 Q$, 并且不对 a^2 而是对

$$f_a(p, \rho) \equiv \frac{a^2}{Q \cdot \Sigma_1} \quad (5)$$

用前面给出的表达式来逼近。这里音速 a 的单位为 [米/秒]; Σ_1 为一常数, 它等于 0.101325×10^7 , 它是因这里的 a, p, ρ 采用不同的单位制而引入的。 $f_a(p, \rho)$ 的逼近系数已在表 1 中给出。

所以音速 a 的计算过程是这样: 给定压力 p (大气压) 和密度 ρ (克/厘米³) 后, 按式 (1) 算出 σ, Q 及 q (当 $Q > 0.45$ 时) 之值, 然后根据 Q 或 q 之值用相应的公式 (2), (3) 或 (4) 及表 1 中相应的系数, 就可算出 $f_a(p, \rho)$ 之值, 最后按公式

$$a = \sqrt{f_a \Sigma_1 \cdot Q} \quad [\text{米/秒}] \quad (6)$$

便可算得音速。

通过检验可知, 这样算出的音速值与函数表 [1] 中的值相比, 误差小于 1% (设 $10^{-5} \leq p \leq 10^3, 2000^\circ\text{K} \leq T \leq 20000^\circ\text{K}$)。

2. 焓的计算 完全气体的焓的表达式为

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$$

其中 γ 为一常数。仿照完全气体, 我们把平衡气体的焓表示成

$$h = \frac{f_h}{f_h - 1} \Sigma_2 Q \quad (7)$$

并且不对 h 而是对

$$f_h(p, \rho) \equiv \frac{1}{1 - \frac{Q \Sigma_2}{h}} \quad (8)$$

用前面给出的表达式来逼近。这里焓 h 的单位为 [卡/克]; Σ_2 是因这里的 h, p, ρ 采用不

同的单位制而引入的常数, 它等于 0.2420106×10^3 。 $f_h(p, \rho)$ 的逼近系数已在表 2 中给出。

所以焓 h 的计算过程是这样: 给定压力 p (大气压) 和密度 ρ (克/厘米³) 后, 利用表 2 的系数可算出 $f_h(p, \rho)$ 之值, 再由式 (7) 式求得焓值。这样算出的焓值与函数表 [1] 相比, 误差小于 1.5%。

3. 温度的计算 平衡空气的状态方程为 $\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{\mu}$, 其中 μ 为气体的平均分子量, 单位是 [克/克分子]; T 的单位为 [$^\circ\text{K}$]; 气体常数 $R = 82.0819$ 大气压·厘米³/克分子·度。因此要计算平衡空气的温度, 只要给出平均分子量

$$f_T(p, \rho) \equiv \frac{RT}{Q} \times 10^{-4} \quad (9)$$

的逼近表达式便可。 $f_T(p, \rho)$ 的逼近系数已在表 3 中给出。

因此温度 T 的计算过程是这样: 给定压力 p (大气压) 和密度 ρ (克/厘米³) 后, 利用表 3 的系数可算出 $f_T(p, \rho)$ 之值, 再由

$$T = \frac{f_T Q \cdot 10^4}{R} [^\circ\text{K}] \quad (10)$$

便可求得温度。这样求出的温度值与函数表 [1] 相比, 误差小于 2%。

参 考 文 献

- [1] Предводителев, А. С. и др., Таблицы термодинамических функций воздуха:
 - а) М., Изд-во АН СССР, 1957 ($6000^\circ\text{K} \leq T \leq 12000^\circ\text{K}, 0.001 \text{ атм.} \leq p \leq 1000 \text{ атм.}$);
 - б) М., Изд-во АН СССР, 1959 ($12000^\circ\text{K} \leq T \leq 20000^\circ\text{K}, 0.001 \text{ атм.} \leq p \leq 10 \text{ атм.}$);
 - в) М., Вц АН СССР, 1962 ($200^\circ\text{K} \leq T \leq 6000^\circ\text{K}, 0.00001 \text{ атм.} \leq p \leq 100 \text{ атм.}$).
- [2] Дьяконов, Ю. Н., Пространственное обтекание затупленных тел с учетом равновесных физико-химических реакций, *ДАН СССР*, 157, 4 (1964), 822—825.
- [3] Наумова, И. Н., Аппроксимация термодинамических функций воздуха, *ЖВМ и МФ*, 1, 2 (1961), 295—300.