

号。如图 3 所示的框架结构总刚度矩阵为

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & & & & \\ K_{21} & K_{22} & & & \text{对称} \\ 0 & K_{32} & K_{33} & & \\ 0 & K_{42} & 0 & K_{44} & \\ 0 & 0 & 0 & K_{45} & K_{55} \end{bmatrix}$$

其中

$$K_{21} = k_{21}^{(1)};$$

$$K_{22} = k_{22}^{(1)} + k_{22}^{(2)} + k_{22}^{(3)}; \text{等等.}$$

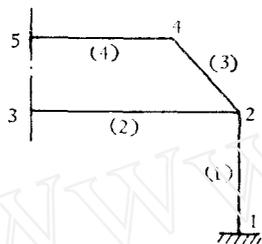


图 3 框架

ii) 总刚度矩阵的阶 设以 M 表示结点的自由度数, n 表示结点总数, 则结构总刚度矩阵的阶 $P = Mn$.

2. 总刚度矩阵的特点

i) 正定对称性 ($[K]^T = [K]$).

ii) 非零元素高度稀疏且呈带状分布在主对角线附近。设以 L 表示半带宽, 则有

$$L = M(N + 1) \quad (7)$$

式 (7) 中 M 为结点的自由度数, N 为相邻结点的序号差。对于用直接法解题的程序, 根据总刚度矩阵的特点, 总刚度矩阵可采取半带型 (变带宽) 存贮^[3]。为节省存贮, 相邻结点的序号差宜尽可能小。

三、荷载移置

对于结构上所受的荷载, 均须移置到结点上, 成为结点荷载。

1. 结构受集中荷载 由于单元分割结点布置具有任意性, 因此可将集中荷载的作用点布置为结点。

2. 结构受分布荷载 应按静力等效的原则, 将分布荷载移置到结点上, 成为等效结点

荷载^[4]。

上述结点荷载在结构坐标系中按规定的序号编排, 得

$$\{R\} = [X_{1R} Y_{1R} Z_{1R} M_{x1R} M_{y1R} M_{z1R} \cdots \cdots X_{nR} Y_{nR} Z_{nR} M_{xnR} M_{ynR} M_{znR}]^T \quad (8)$$

式 (8) 中 $\{R\}$ 称为荷载列阵, n 为结点总数。

四、边界条件处理

将结点位移在结构坐标系中按规定的序号编排, 得

$$\{\Delta\} = [u'_1 v'_1 w'_1 \theta'_{x1} \theta'_{y1} \theta'_{z1} \cdots \cdots u'_n v'_n w'_n \theta'_{xn} \theta'_{yn} \theta'_{zn}]^T \quad (9)$$

式 (9) 中 n 为结点总数, $\{\Delta\}$ 称为位移列阵, 它与结构总刚度矩阵 $[K]$ 及荷载列阵 $\{R\}$ 之间有如下关系:

$$[K]\{\Delta\} = \{R\} \quad (10)$$

式 (10) 是以结点位移为基本未知量的线性方程组, 称为结构刚度方程组, 再附以结构位移边界条件, 便可求得唯一解。

结构的位移边界条件, 表现为结构中某些结点的运动约束。

1. 弹性约束 设某结点位移为 u'_i , 与之相应的弹性支座约束反力为 f_i , 则有

$$f_i = -K'_i u'_i \quad (11)$$

式中 K'_i 为支座的刚性系数。

处理方法: 将式 (10) 右端 $\{R\}$ 中的第 i 行 $f_i = -K'_i u'_i$ 移到左端的对应行上, 即 $[K]$ 的第 i 行 i 列的元素变为

$$K''_{ii} = K_{ii} + K'_i \quad (12)$$

式中 K_{ii} 为 $[K]$ 的第 i 行 i 列原有的元素。

2. 刚性约束 设已知某结点位移 $u'_i = \alpha$, 则可按如下处理:

i) 用一个大数, 譬如 10^{10} , 乘 $[K]$ 的主对角线上第 i 行元素 K_{ii} , 得 $10^{10} K_{ii}$; 同时, $\{R\}$ 的对应行元素代以 $10^{10} K_{ii} \alpha$ 。

ii) 令 $[K]$ 的主对角线上第 i 行元素 $K_{ii} = 1$, 第 i 行 i 列的其它元素 $K_{ii} = K_{ji} = 0 (i \neq j)$; 同时, $\{R\}$ 的对应行元素代以

α.

上述刚性约束的两种处理方法,实质上相当于将与已知位移相对应的行和列从方程组(10)中划去,但在形式上却保持了总刚度矩阵[K]的正定对称性和阶数及行列原序号不变。

五、位移法解题步骤

1. 草绘结构的有限单元法计算简图,即将原结构离散化为若干杆件单元,并对杆件单元及结点进行编号。
2. 计算结点荷载,确定位移边界条件。
3. 形成杆件单元刚度矩阵,组集结构总刚度矩阵。
4. 计算结点位移和约束反力。式(10)位移列阵{Δ}中包含未知结点位移{Δ_r}和由

边界条件给定的已知结点位移{Δ_a};而荷载列阵{R}中则包含对应于{Δ_r}的已知荷载{R_r}和对应于{Δ_a}的未知约束反力{R_a}。按第四节的处理,相当于将与已知结点位移{Δ_a}相对应的行和列从式(10)中划去,即此时式(10)相当于

$$[K_r]\{\Delta_r\} = \{R_r\} \quad (13)$$

于是,由式(13)求得结点位移{Δ_r};然后,将{Δ_r}代入式(10),即可求得约束反力{R_a}。

求得位移列阵{Δ},从而得知杆件单元*ij*在结构坐标系*x'y'z'*中的结点位移{δ}^e(图2)与在单元坐标系*xyz*中的结点位移{δ₀}^e=*[T]*{δ}^e(图1),而杆件单元*ij*的任一截面(设该截面与端面*i*之间距离为*x*)的位移可由下式求得^[1]:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i + \frac{1}{l}(-u_i + u_j) \\ v_i + \theta_{zi}x + \left\{ \frac{3}{l^2}(-v_i + v_j) - \frac{1}{l}(2\theta_{zi} + \theta_{zj}) \right\} x^2 \\ + \left\{ \frac{2}{l^3}(v_i - v_j) + \frac{1}{l^2}(\theta_{zi} + \theta_{zj}) \right\} x^3 \\ w_i + \theta_{yi}x + \left\{ \frac{3}{l^2}(-w_i + w_j) - \frac{1}{l}(2\theta_{yi} + \theta_{yj}) \right\} x^2 \\ + \left\{ \frac{2}{l^3}(w_i - w_j) + \frac{1}{l^2}(\theta_{yi} + \theta_{yj}) \right\} x^3 \\ \theta_{xi} + \frac{1}{l}(-\theta_{xi} + \theta_{xj}) \\ \theta_{yi} + 2 \left\{ \frac{3}{l^2}(-w_i + w_j) - \frac{1}{l}(2\theta_{yi} + \theta_{yj}) \right\} x \\ + 3 \left\{ \frac{2}{l^3}(w_i - w_j) + \frac{1}{l^2}(\theta_{yi} + \theta_{yj}) \right\} x^2 \\ \theta_{zi} + 2 \left\{ \frac{3}{l^2}(-v_i + v_j) - \frac{1}{l}(2\theta_{zi} + \theta_{zj}) \right\} x \\ + 3 \left\{ \frac{2}{l^3}(v_i - v_j) + \frac{1}{l^2}(\theta_{zi} + \theta_{zj}) \right\} x^2 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

5. 计算杆件单元的结点力。由式(1)可求得在单元坐标系*xyz*中杆件单元*ij*的结点力{F₀}^e(图4)。

6. 计算杆件内力。设杆件单元*ij*的端面

*i*至计算截面之间的距离为*x*,则该截面的内力(轴力*s*,剪力*Q_y*,*Q_z*,扭矩*M_n*及弯矩*M_y*,*M_z*)为:

$$\begin{Bmatrix} s \\ Q_y \\ Q_z \\ M_n \\ M_y \\ M_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ M_{xi} \\ M_{yi} + Z_i x \\ M_{zi} + Y_i x \end{Bmatrix} \quad (15)$$

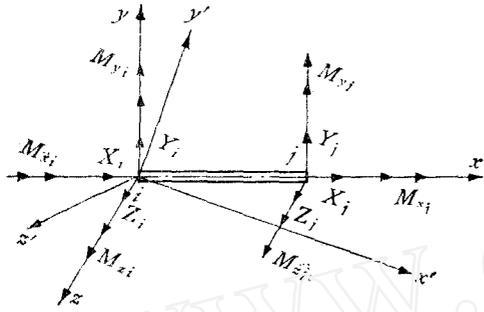


图4 杆件单元结点力

六、实例——铸工震压式造型机 框架的变位与内力分析

某汽车制造厂设计的铸工液压造型自动线上的震压式造型机空间框架如图5所示。油压100吨分别作用在横梁及底板上，底板油缸等重量为17吨，上滚道砂斗等重量为3.6吨，下滚道砂箱等重量为2.32吨。框架

箱型杆件及基础工字型梁柱均用厚度为20毫米的普通钢板(弹性模量 $E = 2.1 \times 10^3$ 吨/厘米², 弹剪模量 $G = 8.2 \times 10^2$ 吨/厘米²)。

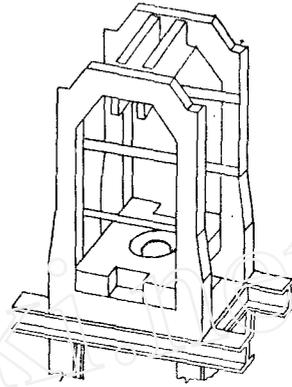


图5 造型机框架

根据结构和荷载的对称性、杆件联接点和荷载作用点的位置、杆件截面的变化情况、结构变位和内力分析的需要及计算机容量等的考虑,取该框架的四分之一进行研究,并用12个结点将其离散化11个杆件单元(图6)。

根据设计部门提供的有关数据,用自编的直接解程序(程序粗框如图7所示)在“DJS-14”机上算得框架的变位(图8)与内力(表1)。

表1 杆件单元结点力(力的单位:吨;力矩单位:吨·厘米)

杆号 \ 结点力	X_i	Y_i	Z_i	M_{xi}	M_{yi}	M_{zi}	X_j	Y_j	Z_j	M_{xj}	M_{yj}	M_{zj}
1	-8.16	0	0	0	-133.94	801.54	8.16	0	0	0	133.94	-801.54
2	-8.16	25.00	2.31	-962.00	-133.94	801.54	8.16	-25.00	-2.31	962.00	68.92	-96.54
3	-25.73	5.43	2.31	-421.32	-867.55	96.54	25.73	-5.43	-2.31	421.32	683.08	337.93
4	-25.00	-8.16	2.31	-23.32	-802.25	-337.93	25.00	8.16	-2.31	23.32	733.06	93.04
5	6.73	0	0	0	-3.63	14.73	-6.73	0	0	0	3.63	-14.73
6	-24.10	-1.43	2.31	-19.69	-706.97	-80.77	24.10	1.43	-2.31	19.69	591.67	9.19
7	-24.10	-1.43	2.31	-19.69	-591.67	-9.19	24.10	1.43	-2.31	19.69	474.07	-63.82
8	1.78	0	0	0	-1.64	21.83	-1.78	0	0	0	1.64	-21.83
9	-23.52	0.35	2.31	-18.05	-459.67	59.30	23.52	-0.35	-2.31	18.05	270.59	-30.60
10	-23.52	0.35	2.31	-18.05	-270.59	30.60	23.52	-0.35	-2.31	18.05	150.68	-12.40
11	2.31	0	0	1.15	0	1013.32	-2.31	0	0	-1.15	0	-1013.32

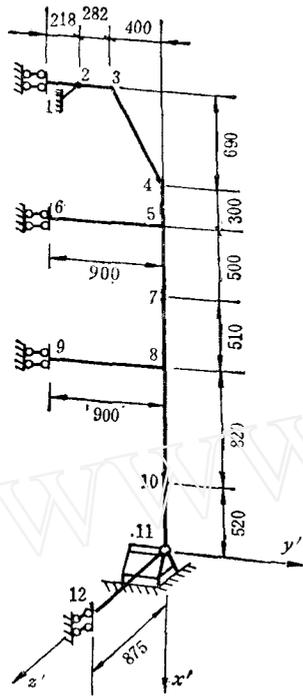


图6 框架有限单元法计算简图

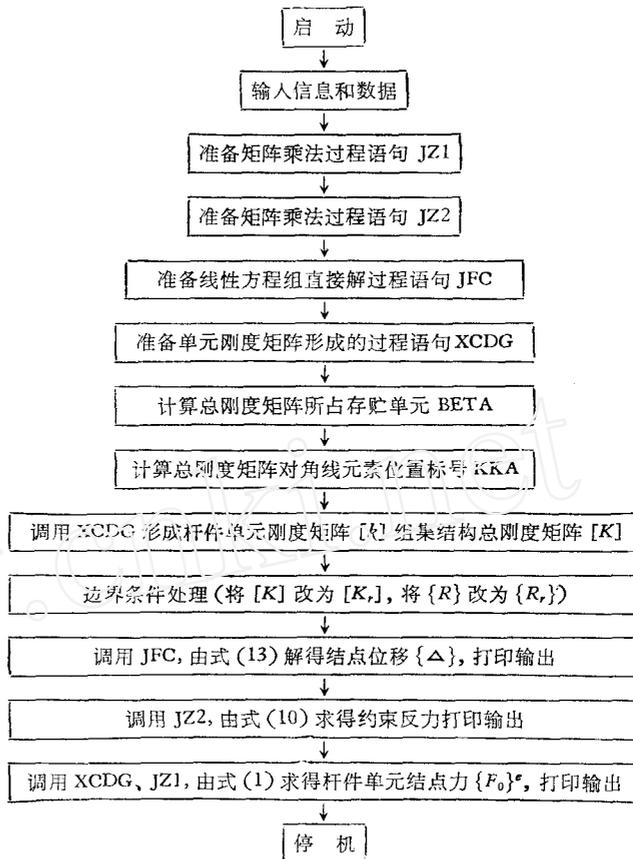


图7 直接解程序粗框

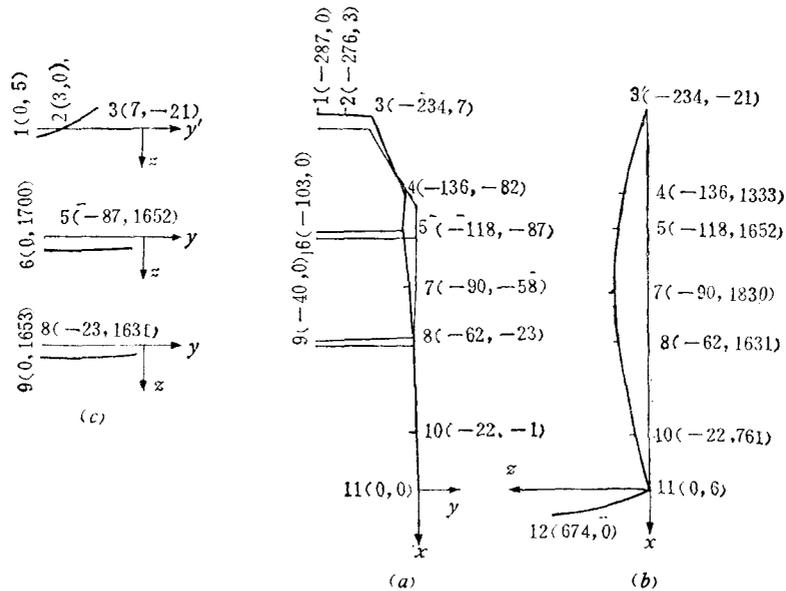


图8 造型机框架位移

(a) 括弧内数字为线位移 (u', v') (b) 括弧内数字为线位移 (u', w')
(c) 括弧内数字为线位移 (v', w') 单位: 10^{-3} 毫米

(下转第83页)

带式拖拉机前梁断裂分析和改进方案”的研究工作。这一工作的开展使我们认识到,我国农业的发展,特别是农业机械化的发展,向我们提出了大量迫切需要解决的课题。支援农业,大有可为。例如,现有拖拉机噪音大、振动厉害,影响机手的健康。我们搞固体力学的都知道,在进行汽车和飞机设计时,都要考虑消音和减振问题,要装消音器和减震装置。拖拉机的振动和噪音也完全可以运用力学理论加以解决。由于我国农业生产的迅速发展,一些拖拉机老产品的性能不能满足生产发展的需要。象东方红 75 履带式拖拉机是按国外四十年代的产品仿制的,前梁断裂问题相当严重和普遍。前梁是抵抗车架剪切和扭转的主要承力部件,据了解,仅 1975 年一年中,有一个县的 82 台此型拖拉机共断前梁一百来根,基础件变成了易损件。贫下中农深受其害,把它称为“癌症”,迫切希望找出断裂的原因和解决的办法。文化大革命以来,我国农业机械化的发展很快,已经从仿制走上了自己设计、自己制造的新阶段。这就提出了更多迫切需要解决的问题。如东方红 40 拖拉机驱动轴在应力集中处产生裂纹,造成疲劳断裂,致使拖拉机后轮飞出,发生严重事故。过去,我们片面地认为,我们是搞“尖端”的,支援农业使不上劲。当我们深入到农村,拜贫下中农做老师,做了一点调查研究以后,事实教育了我们,使我们毛主席关于农、轻、重的思想理解得更深了一步,提高了急贫下中农之所急的觉悟。以往,我们做有关农业的课题较少,并不是因为力学与农业关系不大,没什么好搞,而是因为我们对毛主席的指示领会不深,对发展农业、支援农业的意义认识不够。

过去,我们片面地认为上天的东西要设计得精一些、细一些,地上跑的可以粗一些、笨一些,农机方面就更不在话下了。通过调研,广大农机战线上的工人和贫下中农为我们提供了大量的实际情况,使我们认识到,要想使拖拉机更好地为农业生产服务,为实现农业现代化出力,必须用先进的科学技术来武装它,精心设计、精心制造。在飞机设计中要进行静力强度设计、抗疲劳设计、断裂控制,等等,我们认为也可以按照具体情况把这些原则运用到拖拉机和其他农业机械的设计上去,克服过去轻视农机的传统思想。实践使我们改变了过去认为“支农项目简单,没有理论”的错误认识。为了分析前梁断裂原因和提出解决的办法,必须对整个车架进行受力分析;对车架和前梁进行应力实测,还要进行前梁的静力试验和疲劳试验。这些工作的难度都较大,要求有过硬的技术和更广泛、更全面的理论基础。广大农机战线的工人、贫下中农和技术人员在实践中积累了丰富的经验,这也是我们在广泛深入实际的基础上把科学研究往高里提的丰富的源泉。

由于“四人帮”的干扰和破坏,我国农业发展的速度还不够快;农业机械化的速度还不够快。打倒了“四人帮”,农业大发展有了希望;农业机械化有了希望。在抓纲治国,走向大治的 1977 年,我们决心最紧密地团结在以华主席为首的党中央周围,为实现伟大领袖和导师毛主席的遗志,在 1980 年基本上实现农业机械化贡献我们的一份力量,让力学科学为支援农业发挥应有的作用。

(上接第 125 页)

参 考 文 献

[1] 北方交通大学, 矩阵结构分析, 中国建筑工业出版社(1975)。

[2] Przemieniecki, J. S., Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill (1968).

[3] 曹志浩, 巨型线性方程组的解, 复旦大学学报, 1 (1974)。