

考虑到硬化的塑性区修正*

陈 麓

在断裂力学的分析和计算中,考虑到裂纹尖端塑性区的存在及其影响是很重要的,面外切变下的弹塑性解表明:小范围屈服时塑性区是个圆,而弹性区中的应力场恰好和尖端前移到圆心处的裂纹所产生的一样^[1].在I型加载(张开型)的情况下,一般假设塑性区的产生也近似地使弹性区的应力场向前平移,结果柔度和裂纹扩展力都增大,就好像裂纹的有效长度增加了一样.考虑到塑性区内的应力松弛,可以解出这个平移.运用这种概念来处理塑性区对裂纹扩展力的影响,一般称为塑性区修正.它由于简单,也收到一定的效果,所以被广泛应用.但 Irwin 所提出的修正,把材料作为无硬化的理想塑性体来处理,这是不足之处.本文指出考虑到材料的硬化时所应作的塑性区修正和由此得出的裂纹扩展力.所得到的塑性区尺寸和裂纹扩展临界应力和 Hilton 与 Hutchinson 用较严密的弹塑性力学计算所得到的结果^[2]符合得颇好.

一、塑性区修正

根据大量的实验结果金属材料的硬化律可表达如下:

$$\sigma^* = \alpha(\varepsilon^*)^n \quad (1)$$

其中 σ^* 为有效应力

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (2)$$

[$\sigma_i (i = 1, 2, 3)$ 为主应力.]

ε^* 为有效应变

$$\varepsilon^* = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{2}[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]} \quad (3)$$

(ε_i 为主应变^[1].)

在张开型加载时,如不考虑塑性区的存在,在裂纹的延伸线上($\theta = 0$)

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}}$$

它由图 1 中的 ABC 线表示.

由于塑性区的存在,可考虑弹性区内的应力场近似地发生了平移 q_1 . 换言之,弹性区内

* 1974 年 3 月 26 日收到.

1) 我们所考虑的是塑性应变远比弹性应变大的情况,因此 ε_i 就是塑性应变.

$$(\sigma_{yy})_{\theta=0} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(x-q_1)}} \quad (4)$$

它由图 1 中的 $A'B'C'$ 表示。必须指出, K_I 未变, 否则, 承载不变的条件就不是下面的式 (6) 了。因此, 说 K_I 有了增加是不合适的, 事实上是裂纹扩展力 G 有了增加。

我们用 ω_0 代表 $\theta = 0$ 上塑性区的尺寸, 在 $x \leq \omega_0$ 内应力 σ_{yy} 的主项为^[3,4,5]

$$(\sigma_{yy})_{\theta=0} = \sigma_Y^* \left(\frac{\omega_0}{x} \right)^{\frac{n}{1+n}} \quad x \leq \omega_0 \quad (5)$$

它由图 1 中的 $B'E$ 表示。式 (5) 中的 σ_Y^* 是和应力态 (平面应力, 平面应变) 相对应的屈服应力, 下面还会提到。

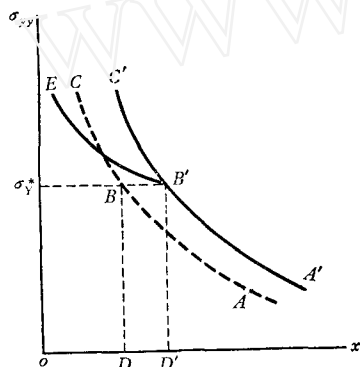


图 1
o 是裂纹尖端 $\omega_0 = oD'$ $b = oD$

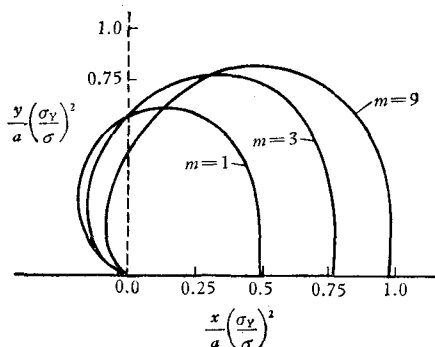


图 2 塑性区形状 ($m = 1/n$)

令 $x = b$ 是 $K_I/\sqrt{2\pi x} = \sigma_Y^*$ 的点, 从图 1 可见, 物体承载不变的条件是: $A'B'E$ 下的面积和 ABC 下的相同, 但面积 $A'B'D' =$ 面积 ABD (注意, K_I 相同)。故

$$\int_0^{\omega_0} \sigma_Y^* \left(\frac{\omega_0}{x} \right)^{\frac{n}{1+n}} dx = \int_0^b \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} dx \quad (6)$$

即

$$\omega_0 = \frac{2b}{1+n} = \frac{1}{1+n} \cdot \frac{1}{\pi} (K_I/\sigma_Y^*)^2 \quad (7)$$

$$q_1 = \omega_0 - b = \left(\frac{1-n}{1+n} \right) \frac{1}{2\pi} (K_I/\sigma_Y^*)^2 \quad (8)$$

迄今为止, 在文献中所应用的都是 Irwin 所提出的 $q_1' = \frac{1}{2\pi} (K_I/\sigma_Y^*)^2$, 在 n 小时它和式 (8) 相差不大, 但有的材料 n 可高达 0.5—0.6, 这时差别就大了。

在平面应力下取 $\sigma_Y^* = \sigma_Y$, σ_Y 代表通常单轴拉伸试样所提供的屈服强度。在平面应变下 Levy 等用增量理论所算得的结果是^[6]

$$\omega_0 = 0.036(K_I/\sigma_Y)^2$$

相当于 $\sigma_Y^* = 2.97\sigma_Y$ 。Larsson 和 Carlsson 也得出 $\omega_0 \cong 0.03(K_I/\sigma_Y)^2$ ^[7]。目前文献中广泛采用 Irwin 的估计 $\sigma_Y^* = 1.7\sigma_Y$ 看来是偏低的。

图 2 是 Hilton 和 Hutchinson 用有限元法把塑性区内应力场和应变场的主项和远处的线弹性场相接配算得的结果 (小范围屈服, 平面应力)。可以看出: 塑性区在 $\theta = 0$ 上的

伸展随 n 的减小 (图中 $m = 1/n$) 而增大, 在 $n = 1/9$ 时颇接近 $\frac{1}{\pi} (K_I/\sigma_Y)^2$. 图 2 和式 (7) 颇相符合.

Rice 证明^[1]在面外切变、小范围屈服的情况下, 等效裂纹尖端的位移是

$$q_{III} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1-n}{1+n} \right) \frac{K_{III}^2}{\tau_y^2} \quad (9)$$

它和 n 的关系和式 (8) 完全一样. McClintock 和 Irwin 认为, 面外切变的解答可类比地应用于张开型加载^[8]. 如果应用他们所建议的对应方法 ($K_{III} \rightarrow K_I$, $\tau_y \rightarrow \sigma_Y^*$), 的确可以从式 (9) 得到式 (8).

二、裂纹扩展力 G_I

我们以 $C(a)$ 代表线弹性柔度. 它是裂纹尖端到施力线的距离 a 的函数. 根据式 (8), 裂纹尖端的有效位置向前移动了 q_I , 因此施力点间位移 Δ 由

$$\Delta = PC(a + q_I) = P\{C(a) + q_I C'(a)\} \quad (10)$$

给出. 上式中 P 是载荷. 由于塑性区修正是个近似处理, 所以上式只取了展开式中的第一修正项.

应用 $q_I = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1-n}{1+n} \right) \frac{1}{\sigma_Y^{*2}} \cdot E \cdot \frac{1}{2} \frac{P^2}{B} C'(a) \cdot k$ ($k = 1$, 平面应力, $k = \frac{1}{1-\nu^2}$, 平面应变) 和

$$\left(\frac{\partial G_I}{\partial P} \right)_a = \left(\frac{\partial \Delta}{\partial A} \right)_P^{[9]} \quad (11)$$

得

$$G_I = G_{I0} \left\{ 1 + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1-n}{1+n} \right) \frac{C''(a)}{C'(a)} (K_I/\sigma_Y^*)^2 \right\} \quad (12)$$

G_{I0} 是线弹性 G_I .

从形式上讲式 (12) 似乎也可以由 $G_I = \frac{1}{2} \frac{P^2}{B} C'(a + q_I)$ 得到, 但式 (10) 右端如果不是仅仅取第一修正项, 那么所得结果就和 $G_I = \frac{1}{2} \frac{P^2}{B} C'(a + q_I)$ 不同了. 正确的推导是用 (10) 和 (11).

在式 (12) 成立的条件下, 它和 J 积分一致.

Hutchinson 等提出了对无限物体长 $2a$ 裂纹在张开型远处均匀加载时裂纹尖端塑性区内的应力场和应变场的计算方法, 这是个重要的进展^[2,4,5]. 结果表明塑性区内应力场、应变场的主项由下式给出:

$$\sigma_{ij} = \alpha \left(\frac{J}{\alpha I_n r} \right)^{\frac{n}{1+n}} \widetilde{\sigma}_{ij}(\theta) \quad (13)$$

$$\varepsilon_{ij} = \left(\frac{J}{\alpha I_n r} \right)^{\frac{1}{1+n}} \widetilde{\varepsilon}_{ij}(\theta) \quad (14)$$

α [见式 (1)] 是材料的性能, I_n 是硬化指数 n 的函数, $\widetilde{\sigma}_{ij}(\theta)$ 和 $\widetilde{\varepsilon}_{ij}(\theta)$ 是角度 θ 的函数, n 在其中是参数. 因此, 从外加载的角度来考虑, 把 J 积分的临界值作为裂纹扩展的

判据是很自然的。Hutchinson 等所用的塑性应力强度因子判据和 J 积分判据是等效的。

图 3 是他们所算得的大范围屈服下, 裂纹扩展临界应力 σ_c 和 σ_Y 的比值(平面应力)。

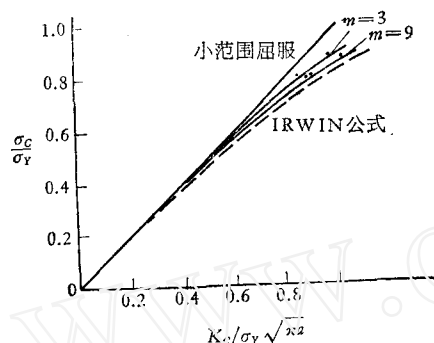


图 3 大范围屈服时的临界应力 ($m = 1/n$)

表 1

σ_c/σ_Y	$K_{IC}/\sigma_Y\sqrt{\pi a}$	
	$n = 1/3$	$n = 1/9$
0.2	0.291	0.202
0.4	0.408	0.413
0.5	0.515	0.524
0.6	0.626	0.642
0.7	0.742	0.766
0.8	0.862	0.897
0.9	0.987	1.036

针对无限物体中长 $2a$ 的裂纹在张开型远处均匀加载的情况, 应用式(12), $C'(a) \propto a$, $K_I^2 = \sigma^2 \pi a$, 得

$$G_I = \frac{\pi a \sigma^2}{E} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1-n}{1+n} \right) \left(\frac{\sigma}{\sigma_Y} \right)^2 \right\}$$

σ_c 由

$$G_I = G_c = K_{IC}^2/E$$

给出, 故

$$K_{IC}/\sigma_Y\sqrt{\pi a} = \frac{\sigma_c}{\sigma_Y} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1-n}{1+n} \right) \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_Y} \right)^2}$$

在 $n = 1/3$, $n = 1/9$ 时按上式所算得的结果列于表 1。它和图 3 符合得颇好。

Hilton 和 Hutchinson 还把图 3 和无硬化的 Dugdale-Barenblatt 模型相对比。根据 D-B 模型, 在平面应力下

$$J = \frac{8a\sigma_Y^2}{\pi E} \ln \sec \left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_Y} \right)$$

所以 σ_c 由

$$\sigma_c/\sigma_Y = \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left\{ \exp \left(- \frac{\pi K_{IC}^2}{8a\sigma_Y^2} \right) \right\}$$

给出。这样算出的 σ_c/σ_Y 介于 Irwin 修正和图 2 中 $n = 1/9$ 曲线之间。由于没有考虑硬化, 所以其缺点和 Irwin 修正一样。

综上所述, 我们看到, 从运用塑性区修正这种近似处理方法的角度, 考虑到硬化的式(8)和式(12)是较合理的。它和 Hilton 和 Hutchinson 用比较严密的方法所算得的一些结果颇相符合。

参 考 文 献

- [1] Rice, J. R., *J. Appl. Mech.*, **34** (1967) 287.
- [2] Hilton, P. A., Hutchinson, J. W., *Eng. Fract. Mech.*, **3** (1971), 435.
- [3] Rice, J. R., *J. Mech. Phys. Sol.*, **16** (1968), 1.
- [4] Hutchinson, J. W., *J. Mech. Phys. Sol.*, **16** (1968), 13.
- [5] Hutchinson, J. W., *J. Mech. Phys. Sol.*, **16** (1968), 337.
- [6] Levy, N., Marcal, P. V., Ostergren, W. T., Rice, J. R., *Intl. J. Fract. Mech.*, **7** (1971), 143.
- [7] Larsson, S. G., Carlsson, A. J., 3rd Intl. Cong. Fract., Part II, I-432.
- [8] McClintock, F. A., Irwin, G. R., ASTM STP, No. 381.
- [9] 陈饒、姚衡、金志英, 科学通报, **19** (1974), 41.